自抗扰控制技术

——估计补偿不确定因素的控制技术

Active Disturbance Rejection Control Technique
–the technique for estimating and compensating the uncertainties

韩京清　著



國防工業出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：周敏文　mwzhou@ndip.cn
肖志力　zlxiao@ndip.cn
责任校对：钱辉玲
封面设计：王晓军　xjwang@ndip.cn

自抗扰控制技术

——估计补偿不确定因素的控制技术



上架建议：控制技术

http://www.ndip.cn

ISBN 978-7-118-05795-9

9 787118 057959 >

定价：42.00 元

自抗扰控制技术

——估计补偿不确定因素的控制技术

Active Disturbance Rejection Control Technique—the technique for estimating and compensating the uncertainties

韩京清 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

自抗扰控制技术:估计补偿不确定因素的控制技术/韩京清著. —北京:国防工业出版社,2008.9
ISBN 978-7-118-05795-9

Ⅰ. 自... Ⅱ. 韩... Ⅲ. 自动控制 Ⅳ. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 084716 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 12 字数 300 千字
2008 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 42.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474
发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 在国防科学技术领域中，学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著；密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。

4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革

开放的新形势下，原国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金

评审委员会

国防科技图书出版基金
第五届评审委员会组成人员

主任委员 刘成海

副主任委员 王 峰 张涵信 程洪彬

秘 书 长 程洪彬

副秘书长 彭华良 蔡 镭

委 员
（按姓氏笔画排序）

于景元 王小谟 甘茂治 刘世参
李德毅 杨星豪 吴有生 何新贵
佟玉民 宋家树 张立同 张鸿元
陈冀胜 周一宇 赵凤起 侯正明
常显奇 崔尔杰 韩祖南 傅惠民
舒长胜

本书主审委员 何新贵

韩京清教授

学界良贤挚友
科部骁将先锋

两院院士 宋健

二〇〇八年六月

序

今年是韩京清研究员发表论文《自抗扰控制器及其应用》十周年，而自抗扰控制思想的形成则经历了更长时间的探索。1962年，随着现代控制理论在国际间的崛起，在钱学森的倡议下，中科院数学所成立了控制理论研究室，关肇直任室主任，宋健任副主任，该室的宗旨是面向国防并推动现代控制理论在中国的应用与发展，韩京清研究员作为该室的首批成员，在理论与实际的结合上辛勤工作了一生。韩京清研究员因20世纪60年代初配合宋健院士发展完善了线性最速控制系统的分析与综合理论；20世纪70年代末率先开办并主持全国现代控制理论暑期讨论班，在全国推动现代控制理论的应用研究工作；20世纪80年代在国内率先推动控制系统计算机辅助设计软件系统研究并主持完成了国家自然科学基金重大项目“中国控制系统计算机辅助设计软件系统”等一系列工作而蜚声中国控制理论界。作为一个多年致力于现代控制理论研究并取得突出成就的学者，韩京清研究员从20世纪80年代开始勇于以批判的态度反思现代控制理论的发展现状，对现代控制理论的研究方法提出了一系列触及本质的质疑，并义无返顾地踏上了一条探索开创实用控制方法的荆棘之路。

在对控制系统中线性与非线性的关系以及对模型论与控制论等问题的深入探讨中，在深入认识经典调节理论与现代控制理论各自的精华与局限的基础上，韩京清研究员提出了一系列实用控制设计思想并形成了自抗扰控制技术。在提出自抗扰控制这一思想后的10年中，韩京清研究员深入国内外的许多高校、工厂进行讲学和应用研究工作，不断发展完善并推动自抗扰控制技术的应

用。现在,在全国许多高校以及国外的一些学校都有不同院系的硕士生和博士生在各自的研究领域运用自抗扰控制思想进行课题研究,大家更期望韩京清研究员能够撰写一部全面系统地论述自抗扰控制技术方面的专著。现在这部力著出版了,这是人们已久的期待。韩京清研究员的这部专著论述了“自抗扰控制技术”的各个组成部分和各种实用非线性控制器,并且书中有大量的数字仿真实例阐述对一些现象和新问题的探索和思考,相信这本专著不但可以帮助读者更好地理解并运用自抗扰控制技术,更能推动控制科学与实际相结合的应用研究。

中国工程院院士

2008 年 6 月

前　言

控制是以适当的控制力来驾驭被控对象，使其运动在各种扰动作用之下也能按期望的方式（按给定的目标轨迹或设定值）变化. 施加控制力的根本途径和目的是“感受控制目标与对象实际行为之间的误差，适当处理这个误差来消除它”，即“基于误差来消除误差”. 近一个世纪的控制理论发展的历史就是围绕“消除这个误差”的两种不同方法相互交错而发展的历史. 这两种不同方法是：

一是“基于误差来消除误差”的控制策略. 以 PID 调节器为代表的实用工业控制器都是基于这种控制策略来做成的.

二是“基于内部机理描述的控制方法”的控制策略，即以对象数学模型为研究的“出发点”，也是研究的“归宿”的现代控制理论方法.

在控制工程实际中，控制目标和对象实际行为之间的误差是容易获取的，也是能够适当加以处理的，因而“基于误差来消除误差”的控制策略的原形——PID 控制器在工业控制实际中得到了广泛的应用. 实际控制工程问题，通常很难给出其“内部机理的描述”，因而基于数学模型的现代控制理论给出的控制策略，在实际控制工程中很难得到有效应用.

这是控制工程实践与控制理论之间，延续了半个多世纪而未能得到很好解决的脱节现象.

误差信号的适当处理来决定消除此误差的控制力，即“基于误差来消除误差”的控制策略是经典 PID 给我们留下的宝贵思想遗产. 经典 PID 原理可以直观地翻译成“误差的过去（I）、现在

(P)、将来(变化趋势)(D)的加权和”. 由于 PID 技术成形并投入工程应用的时期,受到当时的科技水平限制,处理误差信号的办法太单调、粗糙,使得“基于误差来消除误差”的效率未能得到充分的发挥. 但是为什么这样简单的误差反馈律能够解决许多控制工程实际问题而得到广泛的应用? 理论家们借助于被控对象数学模型来进行解释、演绎、推广,于是围绕精确模型的所谓“控制理论”产生和发展了,也促成了所谓“现代控制理论”的发展. 实际上,对象的精确模型是“现代控制理论”赖以生存发展的出发点(如分析、设计)也是其研究的归宿(辨识、建模).

尽管现代控制理论给出的设计方法不太实用,这个理论却阐明了控制系统的许多基本特性,提供了很丰富的新的信号处理方法. 但是,由于过于追求理论上的完美而经常限制在数学模型和线性思维框架之中,因而没能使信号处理效率得到进一步的提高.

如果基于现代微处理器的数字技术,用特殊的非线性效应(微处理器只认得程序,不会区分线性和非线性)来开发出效率更高的信号处理办法并把这些方法应用于误差信号的处理上,那么就能提高“基于误差来消除误差”的效率,从根本上克服 PID 技术的局限性而能够开发出品质更好、效率更高的新型实用控制器.

基于这种认识,自 20 世纪 80 年代末开始,本书的作者相继开发出非线性跟踪微分器、扩张状态观测器等对信号处理及控制具有独特功能和效率的新型非线性动态结构,也提出了具有特殊功能的非线性误差反馈机制,从而开发出非线性 PID、最优非线性 PID、自抗扰控制器、最优自抗扰控制器、自寻最优自抗扰控制器等一系列新型非线性实用控制器. 在这些新型控制结构中,自抗扰控制器最具代表性,因而统称“自抗扰控制技术”.

在实现消除误差来实现控制目标的过程中,很重要的任务是如何施加控制力来抵消各种不确定外扰作用的影响. 在达到控制目标的过程中,如何消除各种外扰影响是反馈系统设计必须考虑的重要课题. 在控制理论发展历史上曾出现过两种原理:20 世纪 40 年代苏联学者提出的“绝对不变性原理”(欲想克服外扰影响,

就要测量外扰;控制器必须同时含有反馈稳定的通道和抑制外扰的通道,即“双通道原理”)和20世纪70年代加拿大学者提出的“内模原理”(欲想克服外扰影响,就要知道外扰模型;控制器必须含有这个外扰模型).但是自抗扰控制器的最突出的特征就是把作用于被控对象的所有不确定因素作用都归结为“未知扰动”而用对象的输入输出数据对它进行估计并给予补偿.“自抗扰”的意义就在于此.这里并不需要直接测量外扰作用,也不需要事先知道扰动作用规律(当然能获取更好).这样,自抗扰控制技术,本质上彻底突破了“绝对不变性原理”和“内模原理”的局限性.

自抗扰控制技术是适应数字控制的时代潮流、吸收现代控制理论成果、发扬并丰富PID思想精髓(“基于误差来消除误差”)、开发运用特殊非线性效应来发展的新型实用技术.因此,凡是能用常规PID的场合,只要能够数字化,采用自抗扰控制器就会使其控制品质和控制精度有根本的提高.尤其是在恶劣环境中要求实现高速高精度控制的场合,自抗扰控制技术更能显出其优越性.

自抗扰控制技术所需的被控对象信息是对象的阶次,力的作用范围,输入输出通道个数和联结方式,信号延迟时间,特别是代表系统变化快慢的“时间尺度”等很容易得到且物理概念清晰的特征量.至于目前的按线性、非线性,时变、时不变,单变量、多变量等传统的系统分类法在自抗扰控制技术中已不再适用,而“时间尺度”才是区别不同被控对象的新的标准,即“时间尺度”相当的被控对象是可以用同样的自抗扰控制器进行控制的.“时间尺度”是描述被控对象的新的特征量.以这个特征量作为新的抽象被控对象的控制理论尚未展开,但自抗扰控制技术的广泛推广应用,必定会推进适应自抗扰控制技术的新的控制理论的产生和发展.

自抗扰控制技术是深入认识经典调节理论与现代控制理论各自优缺点,大量运用计算机数字仿真实验来探索和改进而发展出来的.回顾近20年的自抗扰控制技术发展历程,无法想象如果作者沿着传统的理论推理和命题证明的路子会发展出实用的自抗扰控制技术.作者很庆幸20世纪70年代自学了用Fortran算法语言

和应用软件 Matlab 来编程进行数字仿真实验，如果没有应用这些计算机软件来进行的数字仿真实验，不可能有今天的自抗扰控制技术. 至此作者更深刻地感受到 1982 年底美国何毓琦教授在一篇编者按语中所提倡的要发展“控制系统的实验研究”的实际意义. 按传统观点，靠计算机数字仿真研究所得到的结果是不能直接应用于实际控制工程实践中的. 但是大量的数字仿真研究和现场应用实践表明，由于自抗扰控制器完全独立于被控对象的具体数学模型，对被控对象进行大致描述的近似模型再加一些极端形式扰动的模型来代表被控对象，进行计算机数字仿真实验所得的结果，完全可以直接应用于实际对象上. 从这种观点看，把计算机作为数字仿真实验平台来进行控制系统的实验研究是完全可以的. 另外，计算机仿真技术已发展到很高的水平，以很高的逼真度来模仿许多实际系统行为. 实际上，以这种仿真系统作为平台来进行控制系统的实验研究已经在控制工程界得以实现.

自抗扰控制技术已在我国电力系统、精密机械加工车床、化工过程、现代武器系统等领域得到推广应用，取得了显著的社会效益和经济效益. 在导弹控制预研项目中的应用显示出传统控制方法无法比拟的效果. 聚丙烯反应釜升温段的自动控制是尚未解决好的难题，2002 年 8 月在广东茂名聚丙烯厂，用我们开发的自抗扰控制器来进行现场自控实验，取得了令人满意的控制效果 . 2004 年 9 月在日本成功地实现了微型机械 Micro-Slide 的精度为纳米级的位移控制. 2002 年在美国给 NASA 解决了航天太阳发电装置中的稳压控制问题取得很好效果 . 2004 年在 NASA 开发的喷气发动机仿真系统中运用自抗扰控制技术进行的喷气发动机控制实验，取得了令人振奋的效果. 自抗扰控制器在控制工程不同领域中的实物实验和现场应用效果表明，它将以数字控制器的形式，必定能够取代延续了半个多世纪的经典 PID 调节器，而进入更高层次的“自抗扰控制器时代”.

作者于 20 世纪 80 年代后期开始进行自抗扰控制技术研究，其后的十几年研究过程是该技术脱胎换骨的历程. 说“脱胎换骨”

是指抛开了熟悉的理论推理和命题证明的研究路线，踏上了用计算机仿真实验来探索实用工业控制器的新路子. 由于脱离了传统的研究路线而得不到专家们的认可，科研经费也难以得到保障. 更为困难的是，学数学出身的我，尽管从事过控制理论 20 多年，但既没有控制工程实践经验，也没有过程控制的基本概念和知识. 对旨在研究实用工业控制器的人来说，这些经验、概念和知识实在是太重要了. 也不能经常出去请教有关专家. 通过计算仿真发现的一些现象，我却不知道工程上该怎么理解，怎么解释，又如何去改进. 而在我们的研究环境没有能够获取经验的实验装置，身边也没有可以请教和讨论这些基本知识的人。这时我想到清华大学自动化系高龙教授. 我经常给高龙教授打电话请教并进行讨论，他始终很耐心地指教并鼓励我继续研究，一旦有什么新的结果他马上就在清华园内进行宣传推广. 在整个“自抗扰控制技术”的发展过程中高龙教授的贡献是不可忽略的. 在本书稿完成之际，我特别向高龙老师表示深深的谢意. 还要感谢自抗扰控制技术的形成过程中为解决工程实际问题始终进行合作的许可康研究员、黄一博士. 感谢以解决自抗扰控制技术的各种具体问题来完成学位论文的硕士生、博士生及博士后合作者们. 特别感谢美国克利夫兰州立大学的高志强博士，他在美国培养自抗扰控制技术人才，宣传、推广、应用自抗扰控制技术，以及他邀请我去讲学和作实物实验. 感谢日本上智大学的申铁龙博士，在研究自抗扰控制技术的初期邀请我去讲学并安排做机械人控制实验，这些实物实验的成功大大增强了我继续研究下去的决心.

在本书中很多推理和演绎是采用了微分方程的描述，但求解微分方程的数字计算方法却是采用了最简单的欧拉折线法. 在自抗扰控制技术的研究初期，作者也曾采用过尽可能精确的数字解法，但后来发现没有必要采用花费很多机时的精确算法. 这是因为自抗扰控制技术是把系统的所有不确定因素都归结到系统的总扰动而给予估计和补偿. 我们也可以把数字计算产生的误差归结为系统的不确定因素. 因此在自抗扰控制技术的数字仿真实验中完

全可以采用最简单的微分方程数值解法.

在本书中给出的算法描述都是借用程序语言的写法,特别算法中出现的“=”不是“相等”的符号,而是符号“=”右端表达式算出的结果赋给左端变量的赋值符号,请读者务必记住这点,否则好多地方就看不懂了.

本书将从“基于误差来消除误差”的经典 PID 调节器的分析开始,论述整个自抗扰控制技术的各组成部分和各种实用非线性控制器.各章节将用大量数字仿真实例来说明一些现象和探索改进的办法.因此为了更好地掌握本书的内容,读者最好掌握一种算法语言,编出相应程序,边读边算来进行验证、体会,效果会更好.

为了学习掌握好本书的内容,读者最好具备常微分方程、调节理论和线性控制系统理论的最基础的基本知识(这些理论的细节就不需深究).

在一些章节中有些较复杂的推导和证明过程,初学者可以先不去理会,不会影响读者学习掌握本书内容的.

本书可以作为学习控制技术应用相关专业的大学本科生、研究生、教师,以及从事控制工程技术的技术员、工程师的教材、参考书和技术参考书.

本书将由以下六章组成:

第一章　剖析经典 PID 调节器.介绍 PID 的基本原理、适应范围及其合理性,指出其不足之处、事先安排过渡过程的益处和安排过渡过程的办法,最后讨论线性对象的“时间常数”概念与反馈增益之间关系并引入“时间尺度”概念.

第二章　跟踪微分器.解剖经典微分器的噪声放大效应的原因,提出了跟踪和微分效率更高的非线性跟踪微分器及其一般形式,进一步给出了实用于数字计算的离散形式,讨论非线性跟踪微分器的频率特性与跟踪微分器在各种不同领域中的应用.

第三章　非光滑反馈的功能和效率.在降低控制目标与系统实际行为之间误差的过程中,线性反馈和非线性反馈的效率有很大差异,指出在非线性特别在非光滑领域有很多比起线性反馈效

率更高的反馈形式，因此“开发利用特殊的非线性效应”是很有意义的研究课题，介绍了“时间最优反馈综合函数”用于误差反馈上的效应.

第四章　扩张状态观测器. 运用现代控制理论中的状态观测器思想，提出了根据对象的输入－输出数据估计对象状态信息和作用于对象的“扰动总和的实时作用量”的扩张状态观测器，讨论“采样步长”与“扩张状态观测器”参数之间关系，以及“采样步长”与系统“时间尺度”之间的关系和用“采样步长”确定扩张状态观测器参数的具体办法.

第五章　自抗扰控制器. 介绍用安排过渡过程、跟踪微分器、扩张状态观测器的各种不同组合来形成的各种不同形式非线性控制器的办法；介绍自抗扰控制器的结构和仿真研究结果.

第六章　自抗扰控制器的应用. 介绍自抗扰控制器在不同类型被控对象问题上应用的具体办法，其中包括解耦控制、零点结构配置、时滞系统控制、串级系统控制、并联系统控制、自适应最优控制等.

本书的写作过程也是进一步探讨一些新问题的过程，因此某些问题的阐述方法比较零乱. 特别是“时间尺度”概念的描述和运用是尚未很好解决的问题，因此只能在不同问题的论述中，通过具体例子形象性地给予说明，加深理解.

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正.

韩京清

2007. 12

目　录

第一章　剖析经典 PID 调节器 …… 1

1.1　误差反馈控制律与经典 PID 调节器 …… 2

1.2　经典 PID 能控制的对象范围 …… 14

1.3　经典 PID 调节器的优缺点 …… 17

1.4　安排过渡过程的作用 …… 19

1.5　时间尺度 …… 32

第二章　跟踪微分器 …… 46

2.1　小时间常数惯性环节 …… 46

2.2　经典微分器 …… 49

2.3　跟踪微分器的一般形式 …… 56

2.4　快速跟踪微分器的离散形式 …… 66

2.5　最速跟踪微分器的频率特性(带通滤波器) …… 73

2.5.1　TD 的频率特性 …… 73

2.5.2　带通滤波器 …… 75

2.6　跟踪微分器的其他应用 …… 77

2.6.1　安排过渡过程 …… 77

2.6.2　配置系统零点 …… 80

2.6.3　求函数极值 …… 83

2.6.4　求函数的根 …… 85

2.6.5　频率估计 …… 87

2.6.6　相近频率的分离 …… 88

2.6.7　数字整流 …… 89

2.6.8　数字检波 …… 90

2.6.9 相位超前功能的实现 …… 93
2.6.10 剔除野值及预报方法 …… 93
2.7 离散系统快速最优控制综合函数的推导 …… 97
第三章 非光滑反馈的功能和效率 …… 111
3.1 非线性状态反馈 …… 111
3.2 线性反馈与非光滑反馈 …… 119
3.3 最速反馈控制的不变性 …… 133
3.4 状态反馈方法与误差反馈方法 …… 147
3.5 最速反馈函数的进一步性质 …… 149
3.6 三阶线性最速控制系统的开关曲面 …… 166
3.7 随动问题和调节问题 …… 172
3.8 几个有用的非线性函数 …… 174
第四章 扩张状态观测器 …… 183
4.1 状态观测器 …… 184
4.2 状态观测器观测误差的讨论 …… 192
4.3 扩张状态观测器 …… 197
4.4 其他形式的扩张状态观测器 …… 207
4.5 系统输出被噪声污染时的扩张状态观测器 …… 211
4.6 一类混沌系统的扩张状态观测 …… 213
4.7 扩张状态观测器与系统的时间尺度 …… 221
4.8 扩张状态观测器参数与菲波娜奇数列 …… 237
4.9 扩张状态观测器用于动态补偿线性化 …… 239
第五章 自抗扰控制器 …… 243
5.1 非线性 PID 控制器 …… 243
5.1.1 经典 PID 控制器的缺陷 …… 243
5.1.2 两个跟踪微分器来实现的“非线性 PID” …… 247
5.1.3 两个线性跟踪微分器来改造的“线性 PID” …… 250
5.1.4 一个跟踪微分器和状态观测器实现的“线性 PID” …… 251

5.1.5 函数发生器来安排过渡过程而实现的“线性 PID” …… 252
5.1.6 不同误差组合方式所成的“非线性 PID” …… 253
5.2 自抗扰控制器 …… 255
5.3 动态补偿线性化 …… 262
5.4 自抗扰控制器的仿真研究 …… 263
5.5 自抗扰控制器的控制能力 …… 271
5.6 系统的时间尺度与自抗扰控制器 …… 275
5.7 自抗扰控制器设计的分离性原理 …… 280
第六章 自抗扰控制器的应用 …… 288
6.1 多变量系统的解耦控制 …… 288
6.2 零极点配置设计方法 …… 296
6.3 时滞系统的自抗扰控制 …… 303
6.4 串级系统的自抗扰控制 …… 316
6.5 混沌系统的自抗扰控制 …… 331
6.6 并联系统的自抗扰控制 …… 338
6.7 自寻最优控制 …… 343
6.8 运用自抗扰控制技术的要点 …… 347
参考文献 …… 352

Contents

Chapter 1 Analysis of the classical PID regulator 1
1.1 Error based feedback control and the classical PID regulator 2
1.2 Scope of plants that can be controlled by the classical PID regulator 14
1.3 Advanteges and shortcomings of the classical PID regulator 17
1.4 Effects of arranging the transient dynamics 19
1.5 Time scale 32
Chapter 2 Tracking-Differentiator(TD) 46
2.1 The inertial unit with small time scale 46
2.2 The classical differentiator 49
2.3 The general form of the TD 56
2.4 The discrete form of the high speed TD 66
2.5 The frequency features of the time-optimal TD (Band pass filter) 73
2.5.1 The frequency features of TD 73
2.5.2 Band pass filter 75
2.6 The other applications of TD 77
2.6.1 Arranging the transient dynamics 77
2.6.2 Assigning the system zeroes 80
2.6.3 Solving optimal value of functions 83
2.6.4 Solving roots of functions 85

2.6.5 Estimating the frequency ····· 87
2.6.6 Separating the signals with close frequencies ····· 88
2.6.7 Digital rectification ····· 89
2.6.8 Digital detection ····· 90
2.6.9 Realizing the phase lead ····· 93
2.6.10 Eliminating and predicting the outliers ····· 93
2.7 Deduction of the discrete time-optimal control synthesis function ····· 97
Chapter 3 Effects of non-smooth feedback ····· 111
3.1 Nonlinear state feedback ····· 111
3.2 Linear feedback and nonlinear feedback ····· 119
3.3 The invariance of the time-optimal feedback ····· 133
3.4 State feedback and error feedback ····· 147
3.5 More properties of the time-optimal feedback ····· 149
3.6 The switch surface of the third order linear time-optimal control systems ····· 166
3.7 Servo problem and regulation problem ····· 172
3.8 Some useful nonlinear functions ····· 174
Chapter 4 Extended State Observer(ESO) ····· 183
4.1 State Observer ····· 184
4.2 The estimation error of the State Observer ····· 192
4.3 Extended State Observer ····· 197
4.4 More forms of ESO ····· 207
4.5 ESO design when the system output is polluted by the noise ····· 211
4.6 ESO design for a kind of chaos system ····· 213
4.7 ESO design and the time scale of the system ····· 221
4.8 The parameters of ESO and the Fibonacci sequences ····· 237
4.9 Dynamic linearization by utilizing ESO ····· 239

Chapter 5 Active Disturbance Rejection Controller (ADRC) 243
5.1 Nonlinear PID Controller 243
5.1.1 The disadvantages of the classical PID controller 243
5.1.2 The nonlinear PID realized by utilizing TDs 247
5.1.3 The linear PID realized by utilizing linear TDs 250
5.1.4 The linear PID realized by utilizing TD and the state observer 251
5.1.5 The linear PID realized by utilizing the function generator 252
5.1.6 The nonlinear PID realized by different error combination 253
5.2 Active Disturbance Rejection Controller 255
5.3 Linearization via dynamic compensation 262
5.4 The simulation research 263
5.5 The control ability of ADRC 271
5.6 System's time scale and ADRC design 275
5.7 The separate principle for ADRC design 280
Chapter 6 Applications of ADRC 288
6.1 The decoupling control for MIMO systems 288
6.2 Zero-Pole assignment 296
6.3 ADRC design for the time-delay system 303
6.4 ADRC design for the cascade systems 316
6.5 ADRC design for the chaos systems 331
6.6 ADRC design for the parallel systems 338
6.7 The auto-tuning optimal control 343
6.8 Key points in ADRC technique 347
References 352

第一章　剖析经典 PID 调节器

我们所要考察的系统是能够用外力作用来有目的地影响其运动行为的系统．这种系统叫做被控系统，或被控对象，简称对象．当然，一般情况下，当有外力作用时，非孤立系统的运动总能受到其影响．按一定的目的施予系统的作用力叫做控制力，或系统的控制输入，而其他能够影响系统运动的力则叫做系统的扰动力．能够规定系统运动全部行为的变量组称为系统的状态变量．通常，人们所感兴趣的并不是系统运动的全部状态变量，而是系统运动的部分状态变量．我们所感兴趣的这种系统运动的部分状态变量称为系统输出或被控输出．施加控制力的目的就是使这种被控输出要按事先设定的期望目标运行.

例如，骑一辆自行车到某一目的地，那么自行车本身是被控对象，自行车的车把的转动、车闸的刹车力、脚蹬的蹬踏力是为了到达目的地而施加的控制力，但阵风的影响、载重量、路面摩擦力、车胎充气量等是影响自行车运行的外扰．除上面列举的因素之外，像链条的松紧、轴承的光滑度等各种机械结构上的许多其他因素也是影响自行车正常行驶的特征量.但是，自行车作为交通工具，在达到指定目的地的一次行驶过程中，决定其运行特征的量就是行驶位置、行驶方向和行驶速度．这时，自行车的位置、方向和速度就是这个运行过程中的状态变量，而在这段运行中最关心的量却是行驶位置，因此行驶位置是这个运动过程所关心的被控输出.

控制的任务是给被控系统施加适当的控制力使被控输出要按期望轨迹，或目标值运行．这些期望轨迹，或目标值通常是根据控制目的和对象承受能力，由系统外部事先给定的.

从被控对象最容易获取的信息是系统的输入和输出信息. 设定值是由系统外部给的,也是能够获取的. 根据这些能够获取的信息,如何去确定使系统行为实现期望要求的控制力? 这是控制理论要解决的最终目的. 近一个世纪的控制理论发展史就是围绕这个最终目的而开展的两种截然不同的研究路线相互交错而发展的历史. ①由输入 - 输出信息来先确定对象运动的“输入 - 输出关系”,然后根据这个“关系”来决定所需控制力的办法;②直接加入输入 - 输出信息和设定值信息来决定所需控制力办法. 关于第二种办法的典型例子,是依据期望行为和实际行为之间的误差信息来决定控制力的经典 PID 调节方法. 这种依据期望行为与实际行为之间的误差信息来决定消除这个误差的控制策略叫做误差反馈控制律,或误差反馈策略.

本章先分析经典 PID 调节原理和给定的 PID 调节器能控制的对象范围,讨论根据设定值先安排过渡过程的优点,与线性控制系统的传递函数标准化相关的系统时间尺度等问题.

1.1 误差反馈控制律与经典 PID 调节器

下面用一个简单的例子来说明误差反馈控制律.

假定被控对象为一阶惯性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + u \\ y = x \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其传递函数为

$$w(s) = \frac{1}{s + a}$$

这是描述被控对象输入 - 输出关系的运动方程. 其中,u 是控制输入,y 是系统输出,是代表我们所感兴趣的实际行为,x 是规定系统运动的状态. 设 v_0 是系统行为要达到的期望值,叫做系统的设定值,目标值. 假定这个目标值是常数. 这时,$e = v_0 - y = v_0 - x$ 是

期望值与系统实际行为之间的误差，是设定值与系统输出之间误差.

在这里，我们的目的是：根据期望目标和实际行为之间的误差 e 来决定控制力 u，使系统在这个控制力的作用下，其实际行为 $y(t) = x(t)$ 最终达到设定值 v_0，即最终使误差 e 趋于零（图 1.1.1）.

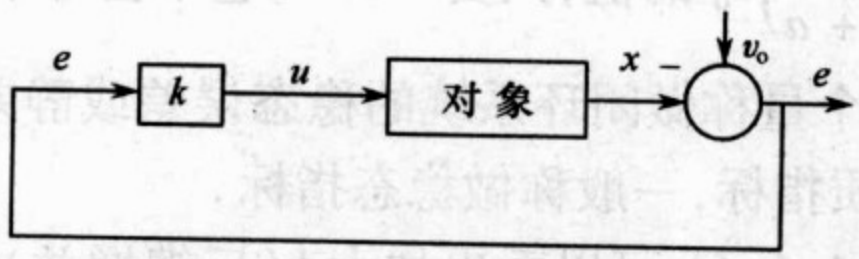


图 1.1.1

现在，根据误差 e，给出如下误差反馈控制力

$$u = ke = k(v_0 - x) \tag{1.1.2}$$

即误差大时施加大的作用力，误差小时施加小的作用力，这种形式的控制叫做误差的比例反馈. 把这个表达式代到(1.1.1) 式，得

$$\dot{x} = -ax + u = -(k + a)x + kv_0 =$$

$$-(k + a)\left(x - \frac{k}{k + a}v_0\right) \tag{1.1.3}$$

这个系统叫做闭环系统. 相对于闭环系统，系统(1.1.1) 叫做开环系统.

在式(1.1.3) 中，令

$$z = x - \frac{k}{k + a}v_0$$

那么式(1.1.3) 变成

$$\dot{z} = -(k + a)z$$

从而有

$$z(t) = \mathrm{e}^{-(k+a)t}z(0)$$

显然，只要$(k + a) > 0$(闭环系统将稳定，其解最终要达到平衡状态)，就有

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty}\left(x(t) - \frac{k}{k+a}v_0\right) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{k}{k+a}v_0 = v_0 - \frac{a}{k+a}v_0 \tag{1.1.4}$$

这里,系统的实际行为 $y(t) = x(t)$ 达到的不是期望的设定值 v_0,而是比它小$\left(\frac{a}{k+a}\right)v_0$ 的值,只要 $a \neq 0$,它不会等于零. 偏离期望设定值 v_0 的这个量称做闭环系统的稳态误差或静差,是闭环系统的很重要的品质指标,一般称做稳态指标.

从表达式(1.1.4) 可以看出加大 k(反馈增益) 是能够降低稳态误差的,但是反馈增益只能大到一定程度,再大会出现另一些问题(线性模型只是非线性对象在工作点附近的近似,反馈增益的增大很容易使系统的运动跃出线性近似范围而产生难以驾驭的复杂行为). 只要 $a \neq 0$,再大的 k 也消除不了稳态误差.

确定稳态误差的更直接的方法是让式(1.1.3) 的右端等于零(这种状态就是系统的平衡态) 而得到的. 实际上,系统(1.1.3) 是稳定系统,其运动最终是要进入系统的平衡点,而这个平衡点是由方程(1.1.3) 的右端等于零来确定. 让式(1.1.3) 的右端等于零,就能得到

$$x(\infty) = \frac{k}{k+a}v_0 = v_0 - \frac{a}{k+a}v_0$$

如果在系统(1.1.3) 中记 $A = k + a, b = k$,那么它可改写成

$$\dot{x} = -Ax + bv_0, x(0) = 0 \tag{1.1.5}$$

对给定的常值输入 $v_0 \neq 0$,这个方程的解叫做关于阶跃输入 v_0 的响应,特别当 $v_0 = 1$ 时,这个方程的解称为单位阶跃响应,或简称阶跃响应,显然这个阶跃响应有静差$\frac{b-A}{A}v_0$.

为了消除这个静差,通常采用再加误差 $e = v_0 - x$ 的积分 $\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的反馈 $k_0\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$,使整个误差反馈律变成

$$u = ke + k_0\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.1.6}$$

这时的闭环系统框图如图 1.1.2 所示.

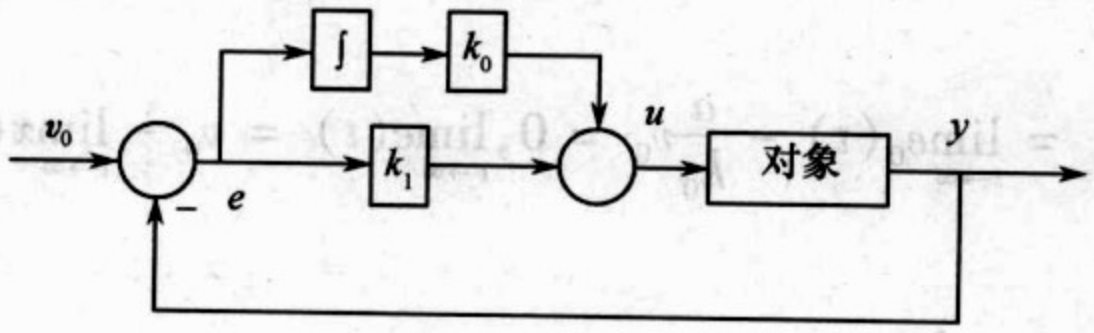


图 1.1.2

闭环系统方程变成

$$\dot{x} = -ax + u = -(k + a)x + kv_0 + k_0\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

现在,令

$$e_0(t) = \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

那么

$$\dot{e}_0 = e$$

而

$$\dot{e} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 - x) =$$

$$-\dot{x} = ax - ke - k_0e_0 =$$

$$a(x - v_0) + av_0 - ke - k_0e_0 =$$

$$-(a + k)e - k_0\left(e_0 - \frac{a}{k_0}v_0\right)$$

于是再令 $e_1 = e_0 - \frac{a}{k}v_0$,得

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = e\\ \dot{e} = -k_0e_1 - (a + k)e\end{cases} \tag{1.1.7}$$

当参数满足$(a + k) > 0, k_0 > 0$ 时,系统稳定,系统的运动最终达

到系统的平衡位置,即

$$e_1(t) \to 0, e(t) \to 0$$

因此,就有

$$\lim_{t\to\infty} e_1(t) = \lim_{t\to\infty} e_0(t) - \frac{a}{k_0} v_0 = 0, \lim_{t\to\infty} e(t) = v_0 - \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{1.1.8}$$

于是

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = v_0 \tag{1.1.9}$$

原闭环系统的静差(稳态误差)现在移到了误差积分分量 e_0 上,而使我们所关心的系统的误差(误差积分的微分)$e = v_0 - x$ 中完全消除了静差 $\frac{a}{a+k} v_0$,因而系统的实际行为 $y(t)$ 完全到达设定值 v_0.

如果系统(1.1.1)中的外扰 $w = w_0$ 为常值,那么令

$$e_1 = e_0 - \frac{av_0 + w_0}{k_0}$$

闭环系统仍为(1.1.7).

因此

$$\lim_{t\to\infty} e_1(t) = \lim_{t\to\infty} e_0(t) - \frac{av_0 + w_0}{k_0} = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = v_0 - \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} e_0(t) = \frac{av_0 + w_0}{k_0}, \lim_{t\to\infty} x(t) = v_0$$

静差还是移到了误差积分项上,而系统输出 $y(t) = x(t)$ 则完全达到设定值 v_0.

如果在系统(1.1.7)中记 $A_0 = k_0, A_1 = a + k, b = a$,那么它

变成

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e, & e_0(0) = 0 \\ \dot{e} = -A_0 e_0 - A_1 e + b v_0, & e(0) = v_0 \\ y = v_0 - e \end{cases} \tag{1.1.10}$$

这就是对一阶惯性环节加上误差的比例 - 积分反馈之后,对阶跃输入 v_0 的阶跃响应所应满足的微分方程组. 积分反馈的引入能够消除阶跃输入和常值扰动产生的稳态误差.

下面再来看看二阶对象的情形.

假定有二阶振荡环节:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_1 x - a_2 \dot{x} + w + u \\ y = x \end{cases},$$

其传递函数为

$$w(s) = \frac{1}{s^2 + a_2 s + a_1} \tag{1.1.11}$$

式中:u 为控制输入;y 为系统输出,是代表我们所感兴趣的实际行为;w 为影响系统运动的外扰. 这里,x 是和 $\dot{x}$ 一起成为规定系统运动全部信息的状态变量,而 $y = x$ 则是我们所感兴趣的系统输出,或被控输出,是系统的实际行为. 设 v_0 是系统的设定值. 这时,$e = v_0 - y = v_0 - x$ 是期望值与系统实际行为之间的误差,是设定值与系统输出之间误差. 这里把式(1.1.11)中的多项式 $s^2 + a_1 s + a_2$ 叫做系统的特征多项式,而二次方程 $s^2 + a_1 s + a_2 = 0$ 称为系统的特征方程,这个方程的根叫做系统的特征根. 如果系统的特征根都具有负实部,那么系统是稳定的,即系统的所有解 $(x(t)\dot{x}(t))$ 都趋于零. 在这里,二次特征方程根都具有负实部的充要条件为 $a_1 > 0, a_2 > 0$.

把系统的全部作用力 $-a_1 x - a_2 \dot{x} + w$ 中的部分作用力 $-(a_1 x + a_2 \dot{x})$($-a_1 x$ 为恢复力或弹性力,$-a_2 \dot{x}$ 为阻尼)当作系统的内扰来看待,而把另一部分作用力 w 当作系统的外扰,并把内扰和外扰

的总和作用,看成作用于纯积分器串联型系统

$$\ddot{x} = u(\text{其特征方程为 } s^2 = 0)$$

(积分器串联型系统,无内力作用的)的总和扰动是很有意义.

实际上,整个自抗扰控制技术的核心就在于这个“总和扰动”的实时作用量的估计与补偿.

在这个系统中,误差 $e = v_0 - x$ 的比例反馈 $k_1 e$ 只能改变闭环系统特征多项式的常数项系数,而误差微分反馈 $k_2\dot{e} = k_2 \dfrac{\mathrm{d}(v_0 - x)}{\mathrm{d}t} = -k_2\dot{x}$ 只改变闭环系统特征多项式的一次项(阻尼项)系数,因而适当的误差比例反馈和误差微分反馈可以任意改变闭环系统的特征多项式系数. 采用误差的比例、微分反馈律

$$u = k_1 e + k_2\dot{e} = k_1(v_0 - x) + k_2(\dot{v}_0 - \dot{x}) = k_1 v_0 - k_1 x - k_2\dot{x}$$

然后,得如下闭环系统

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -a_1 x - a_2\dot{x} + k_1(v_0 - x) - k_2\dot{x} = \\ &\quad -(a_1 + k_1)x - (a_2 + k_2)\dot{x} + k_1 v_0 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

显然,只要满足 $(a_1 + k_1) > 0$,$(a_2 + k_2) > 0$,这个闭环系统稳定,从而有

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -a_1 x - a_2\dot{x} + k_1(v_0 - x) - k_2\dot{x} = \\ &\quad -(a_1 + k_1)\left(x - v_0 + \frac{a_1}{a_1 + k_1}v_0\right) - (a_2 + k_2)\dot{x}\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{k_1}{a_1 + k_1}v_0 = v_0 - \frac{a_1}{a_1 + k_1}v_0, \lim_{t\to\infty}\dot{x}(t) = 0 \tag{1.1.13}$$

和前面一样,$y(t) = x(t)$ 并不趋于设定值 v_0,而是趋于比它小 $\dfrac{a_1}{a_1 + k_1}v_0$ 的偏差值. 这个偏差值叫做闭环系统(1.1.12)的稳态误差,或闭环系统的静差.

为了消除这个静差，采用加上误差的积分$\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$的反馈$k_0\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$的办法，使整个误差反馈律变成

$$u = k_1 e + k_2 \dot{e} + k_0\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau, e = v_0 - x \qquad (1.1.14)$$

这时的闭环框图如图 1.1.3 所示.

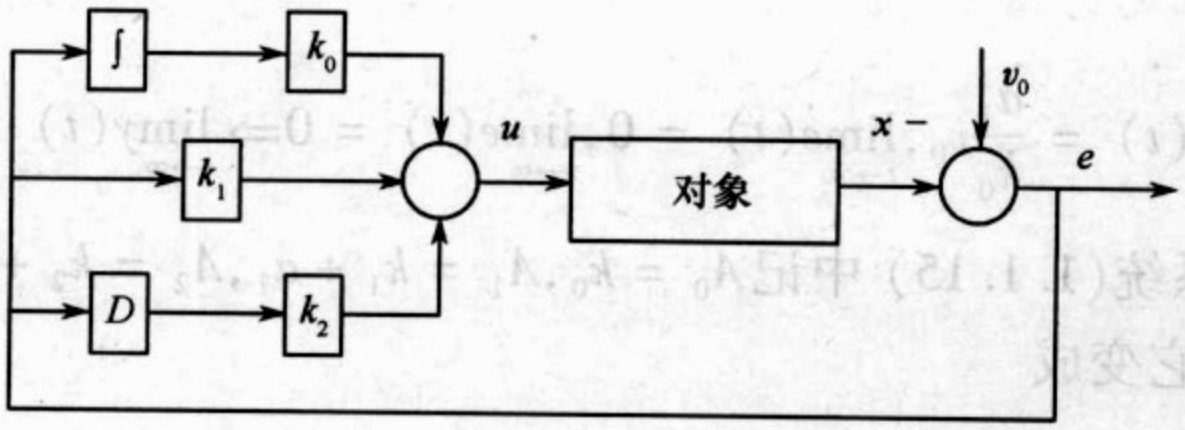


图 1.1.3

现在，又令

$$e_0(t) = \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$$

那么

$$\dot{e}_0 = e,$$

$$\ddot{e} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(v_0 - x) = -\ddot{x} = a_1 x + a_2\dot{x} - k_1 e - k_2\dot{e} - k_0 e_0 =$$

$$a_1(x - v_0) + a_1 v_0 + a_2\dot{x} - k_1 e - k_2\dot{e} - k_0 e_0 =$$

$$-(a_1 + k_1)e + (a_2 + k_2)\dot{e} - k_0\left(e_0 - \frac{a_1}{k_0}v_0\right) \quad (\text{因 } \dot{v}_0 = 0)$$

于是得如下闭环系统

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e, & e_0(0) = 0 \\ \ddot{e} = -(k_1 + a_1)e - (k_2 + a_2)\dot{e} - k_0\left(e_0 - \dfrac{a_1}{k_0}v_0\right), & e(0) = v_0 \end{cases} \qquad (1.1.15)$$

此系统的实际输出(实际行为)为

$$y(t) = x(t) = v_0 - e(t)$$

根据三阶线性定常系统稳定性条件,只要满足

$$k_0 > 0, (k_1 + a_1) > 0, (k_2 + a_2) > 0,$$

$$且(k_1 + a_1)(k_2 + a_2) > k_0 \tag{1.1.16}$$

就有

$$\lim_{t\to\infty} e_0(t) = \frac{a_1}{k_0} v_0, \lim_{t\to\infty} \dot{e}(t) = 0, \lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = v_0$$

在系统(1.1.15)中记$A_0 = k_0, A_1 = k_1 + a_1, A_2 = k_2 + a_2, b = a_1$,那么它变成

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e_1, & e_0(0) = 0 \\ \dot{e}_1 = e_2, & e_1(0) = v_0 \\ \dot{e}_2 = -A_0 e_0 - A_1 e_1 - A_2 e_2 + b v_0, & e_2(0) = 0 \\ y = v_0 - e_1 \end{cases} \tag{1.1.17}$$

这就是对二阶振荡环节加上误差的比例 - 积分 - 微分反馈之后所得闭环系统的微分方程组. 显然,这个系统稳定的充分必要条件(三次多项式稳定的条件)为

$$A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0, 且 A_1 A_2 > A_0 \tag{1.1.18}$$

如果系统(1.1.11)中的外扰 $w = w_0$ 为常值,那么闭环系统(1.1.17)变成

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e \\ \ddot{e} = -(a_1 + k_1)e - (a_2 + k_2)\dot{e} - k_0\left(e_0 - \dfrac{a_1 v_0 + w_0}{k_0}\right) \end{cases}$$

$$A_0 > 0, A_1 > 0, A_2 > 0$$

因此仍有

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \lim_{t\to\infty} y(t) = v_0 - \lim_{t\to\infty} e(t) = v_0$$

反馈律(1.1.14)

$$u = k_0 \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + k_1 e + k_2 \dot{e} \tag{1.1.19}$$

就是控制工程中最常用而著名的 PID(Proportional-Integral-Derivative) 控制律,系数 k_0, k_1, k_2 分别称作误差反馈的积分增益,比例增益,微分增益.

这个 PID 控制律也可以翻译成:误差的过去(积分 $\int e$),现在(比例 e) 和将来(发展趋势 —— 微分 $\dot{e}$) 的加权和(线性组合).

在许多控制工程中,常把 PID 控制律(1.1.19) 也表示成

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d \dot{e}\right) \tag{1.1.20}$$

式中:K 为反馈增益;T_i 为积分时间常数;T_d 为微分时间常数.

这种形式反馈律所决定的闭环系统运动方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e_1, & e_0(0) = 0 \\ \dot{e}_1 = e_2, & e_1(0) = v_0 \\ \dot{e}_2 = -\dfrac{K}{T_i}e_0 - (K + a_1)e_1 - (KT_{d_2} + a_2)e_2 + a_1 v_0, & e_2(0) = 0 \\ y = v_0 - e_1 \end{cases}$$

而对应于式(1.1.18) 的稳定性条件相应地变成

$$\begin{cases} (K + a_1) > 0, (KT_d + a_2) > 0, \dfrac{K}{T_i} > 0 \\ (K + a_1)(KT_d + a_2) > \dfrac{K}{T_i}, \text{或} (K + a_1)(KT_d + a_2) > \dfrac{K}{T_{il}} \end{cases} \tag{1.1.21}$$

如果单纯地从系统输出达到设定值的要求来看，一个给定的PID控制律（即给定的k_1,k_0,k_2 或 K,T_i,T_d），它所能控制的(1.1.11)型对象，并不是一个，而是能够满足稳定性条件(1.1.16)，或(1.1.21)的 a_1,a_2 所代表的一类对象，而且参数 k_1，k_0,k_2 取值越大，这个对象类也越大．这就是为什么PID控制律有那么广的应用场合的原因.

闭环系统的稳态指标，即系统的静差，是达到控制目的很重要的指标，但是它并不是衡量控制好坏的唯一指标．在实际控制工程中，在达到稳态指标的前提下，工程师们更关心实现稳态指标的动态过程．

例　今考察(1.1.11)型系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = -x - \dot{x} + u \\ y = x \end{cases},(a_1 = 1, a_2 = 1) \qquad (1.1.22)$$

设控制目标为 $v_0 = 1$.

在不同的PID反馈律作用下，系统在达到静态指标之前的动态过程有何区别呢?

按PID反馈律(1.1.14)，取两组不同的增益：

①$k_0 = 1, k_1 = 0.5, k_2 = 0.5$；②$k_0 = 1, k_1 = 1.8, k_2 = 1.5$.

根据闭环稳定条件(1.1.16)：

$$a_1 + k_1 = 1.5 > 0, a_2 + k_2 = 1.5 > 0, k_0 = 1 > 0;$$

$$(a_1 + k_1)(a_2 + k_2) = 1.5 \times 1.5 > 1 = k_0$$

$$a_1 + k_1 = 2.8 > 0, a_2 + k_2 = 2.5 > 0, k_0 = 1 > 0;$$

$$(a_1 + k_1)(a_2 + k_2) = 2.8 \times 2.5 > 1 = k_0$$

这两组增益都能使闭环稳定，因而系统输出最终能够达到设定值．然而，在这两个闭环系统中，输出跟踪设定值的动态过程有很大差别(图1.1.4)．前者在设定值附近来回振荡几次才能稳定住，而后者几乎一次到位．图1.1.4中的下面两个曲线表示的是两组误差反馈律所决定的控制量．闭环稳定所需的这两组控制量的变化特

性也有很大差异，前者的变化范围小且变化稍微缓慢，而后者变化范围大且变化比较剧烈．

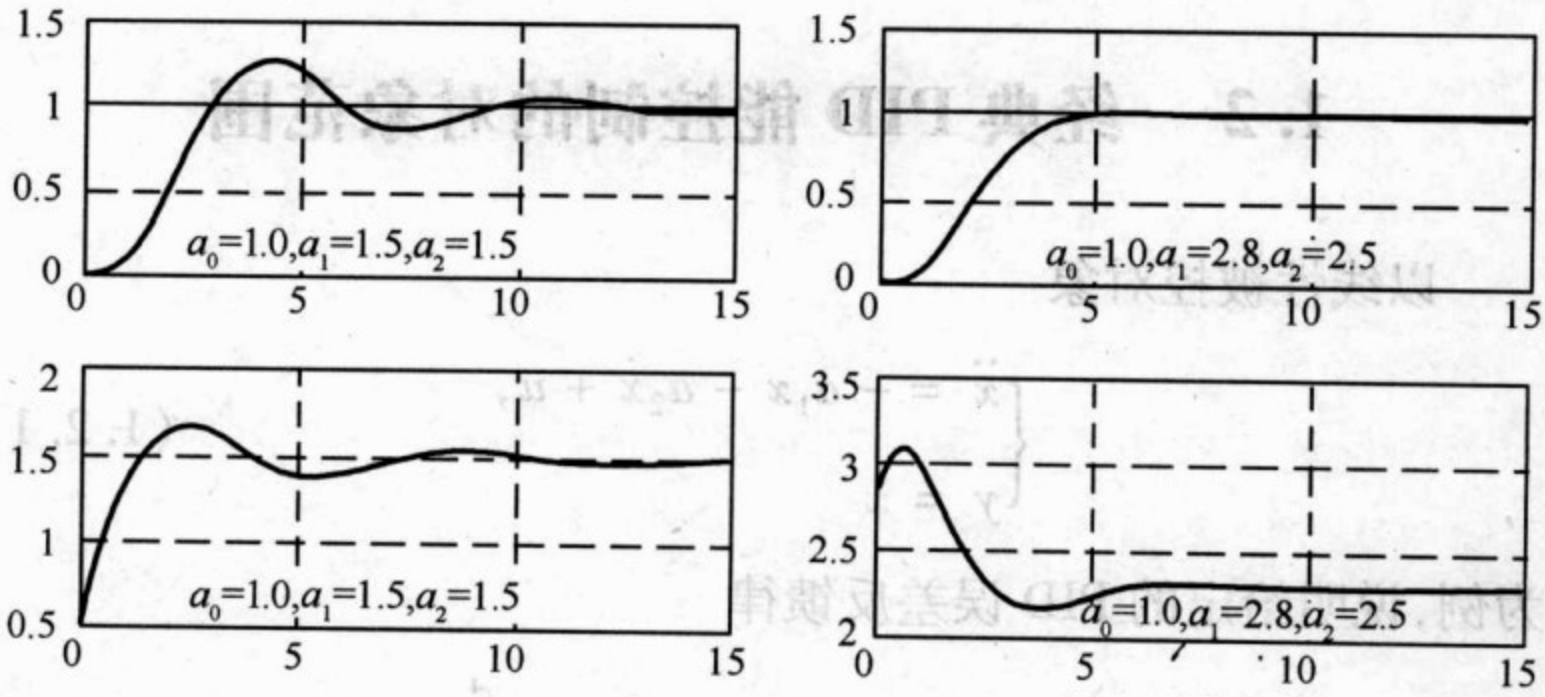


图 1.1.4

输出跟踪设定值的动态过程的差异是用闭环系统的动态品质（或瞬态品质）来衡量．闭环系统的动态品质包括两方面的内容：系统输出的动态品质和控制量变化的控制品质．输出的动态品质主要是由如下三个指标所决定：过渡过程（或引入）时间，超调量，振荡次数，而控制品质则由控制量的变化范围和变化速度来决定．过渡过程时间 T 是这样的时间，当 $t \geqslant T$ 时，设定值与系统输出之间的误差都在小于设定值的5% 范围之内，如图1.1.4的第一个过程的 $T \approx 12\text{s}$，而第二个过程的 $T \approx 2\text{s}$；超调量是指输出在变化过程中超出设定值的最大值，通常用超出的量在设定值中所占百分比 σ 来表示，如第一个过程的超调量 $\sigma > 32\%$；振荡次数是指系统输出在过渡过程时间内围绕设定值来回摆动的次数，如第一个过程的振荡次数为1.5，而第二个为0. 这三个指标越小，意味着闭环系统输出行为的动态品质越好．由于控制信号最终是由相应执行机构来实现的．过程中所需的控制量太大，执行机构提供不了那么大的能量，而控制量的变化太快，执行机构又跟不上其变化，从而达不到控制目的．因此，控制的好坏应当综合考虑这些静态指标，动态品质和控制品质．

所谓控制系统设计问题就是选择合适的误差反馈律和其他辅

助措施,使闭环系统输出行为和控制量的变化都要满足闭环的静态指标,动态品质和控制品质.

1.2 经典 PID 能控制的对象范围

以线性被控对象

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_1 x - a_2 \dot{x} + u, \\ y = x \end{cases} \tag{1.2.1}$$

为例,说明给定的 PID 误差反馈律

$$e = v_0 - x, u = k_1 e + k_2 \dot{e} + k_0 \int_0^t e(\tau) \mathrm{d}\tau \tag{1.2.2}$$

能控制什么范围的参数 a_1, a_2 所代表的对象.

根据稳定性条件(1.1.16),参数 a_1, a_2 只要满足

$$\begin{cases} (a_1 + k_1) > 0, (a_2 + k_2) > 0, k_2 > 0 \\ (a_1 + k_1)(a_2 + k_2) > k_0 \end{cases} \tag{1.2.3}$$

闭环系统就稳定,从而输出行为能达到静态指标.

记

$$\alpha = a_1 + k_1, \beta = a_2 + k_2$$

上述稳定性条件变成

$$\alpha > 0, \beta > 0, \alpha\beta > k_0 > 0,$$

现在在 α, β 平面上画出

$$\alpha\beta = k_0$$

曲线. 这是以直线 $\beta = \alpha$ 为对称轴的双曲线(图1.2.1). 这个双曲线右上方点的坐标(α, β) 代表着以 α, β 为参数的闭环系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\alpha x - \beta \dot{x} \\ y = x \end{cases}$$

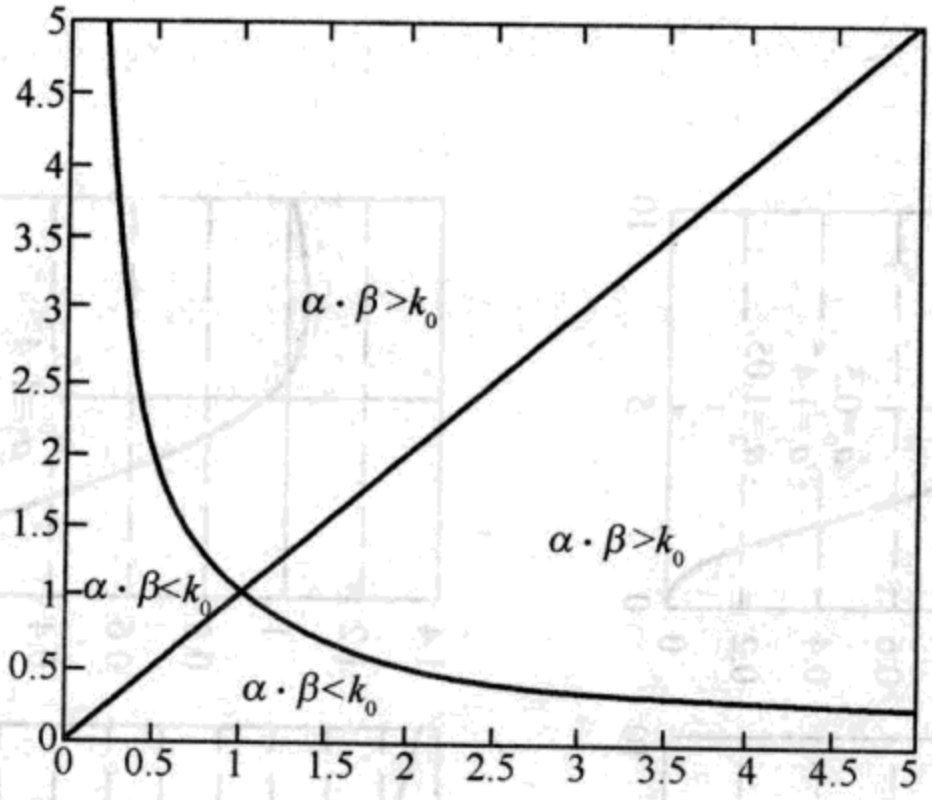


图 1.2.1

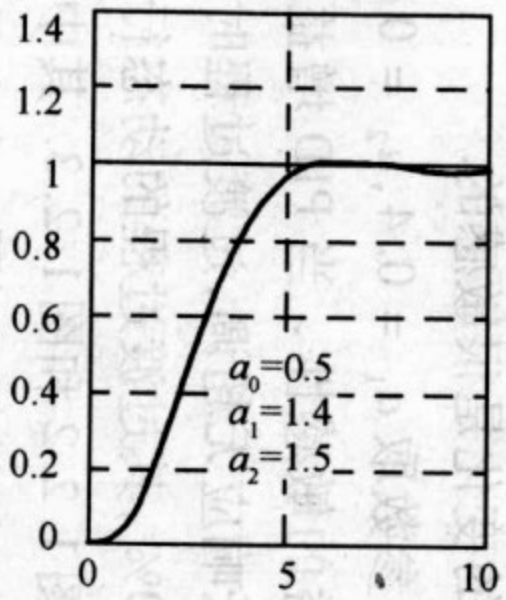
是稳定的闭环;左下方点的坐标代表着这个系统不稳定的闭环.由图 1.2.1 可以确定给定的 PID 反馈律所能控制的开环对象类:由积分增益 k_0 画出双曲线 $\alpha\beta = k_0$;然后,把原点移到坐标点 $(-k_1, -k_2)$ 上;那么双曲线右上方点的坐标值($a_1 = \alpha - k_1, a_2 = \beta - k_2$) 所代表的开环对象,就是给定的 PID 控制律所能控制的对象.由此看出,给定的 PID 控制律所能控制的线性对象是很大的一类.这正是为什么经典 PID 调节器在工业上有如此广泛应用的根本原因.当然,这只是针对达到静态指标的目的而言的.

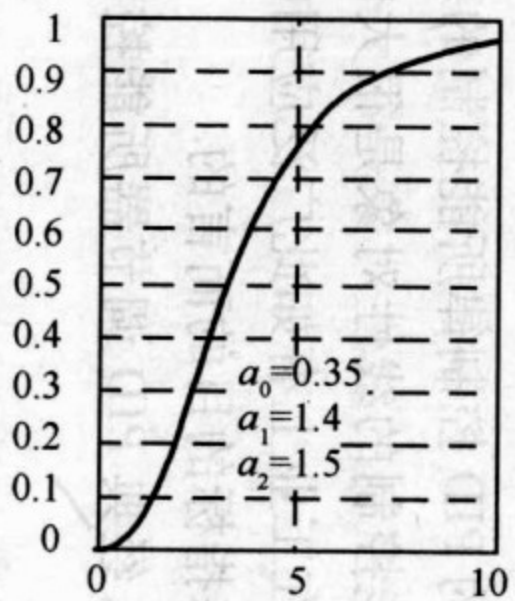
如果考虑到闭环系统的动态品质,经典 PID 调节器所能控制好的对象类将会大大缩小.

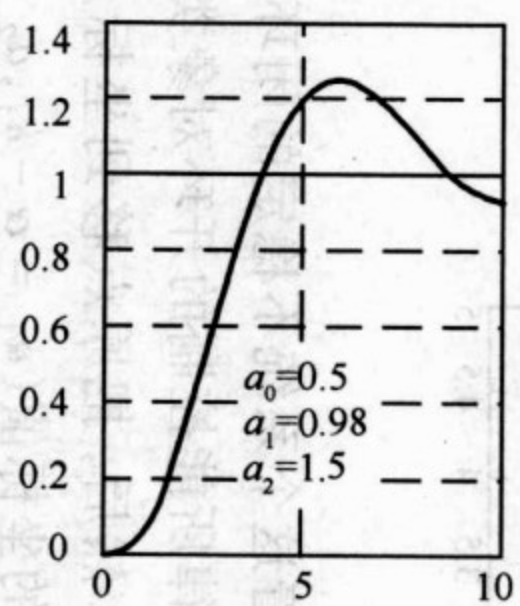
闭环系统的动态品质对 PID 增益的变化是很敏感的.

例 在二阶线性对象(1.2.1) 中参数取 $a_1 = 0.4, a_2 = 0$ 的情形为例,说明其阶跃响应对 PID 增益的敏感性.当 PID 增益取 $k_0 = 0.5, k_1 = 1.0, k_2 = 1.5$ 时,其阶跃响应无超调,过渡过程时间约等于 5s.但是,这些增益上下变动 30%,其过渡过程的动态行为变化就很明显了.这些仿真结果示于图 1.2.2 和图 1.2.3.其中图 1.2.2 显示的是每个增益分别下调 30% 的结果,而图 1.2.3 显示的是每个增益分别上调 30% 的结果.

从这些仿真结果看出,闭环系统的阶跃响应对 PID 的各增益


a_0=0.5
a_1=1.4
a_2=1.5


a_0=0.35
a_1=1.4
a_2=1.5


a_0=0.5
a_1=0.98
a_2=1.5

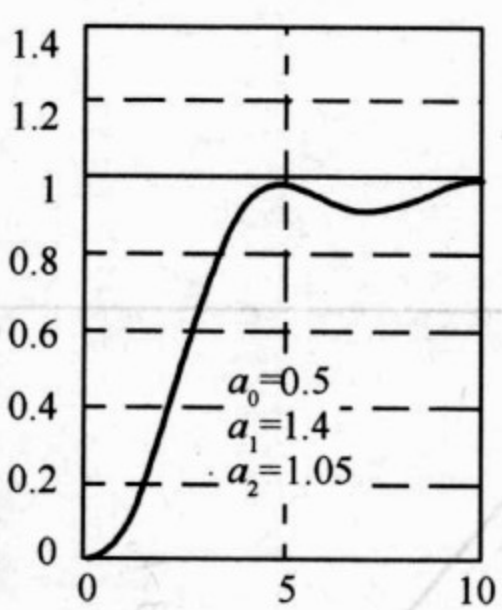
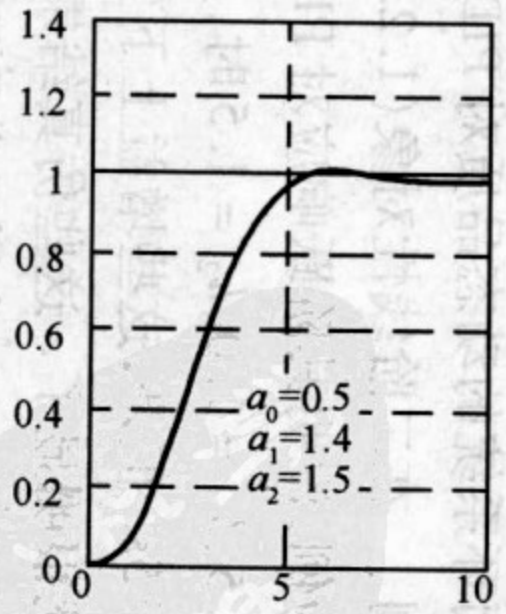
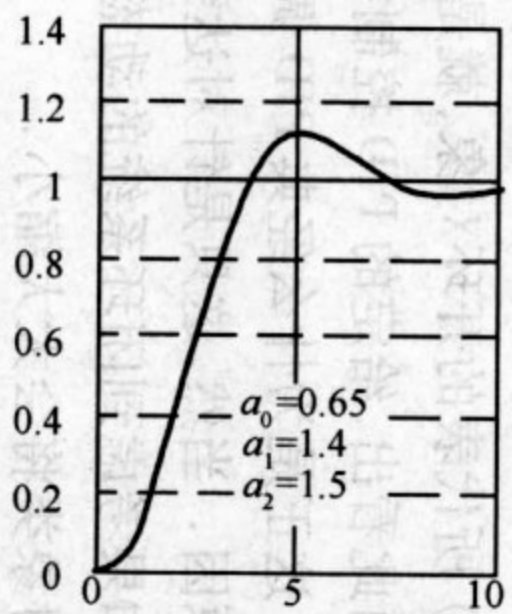
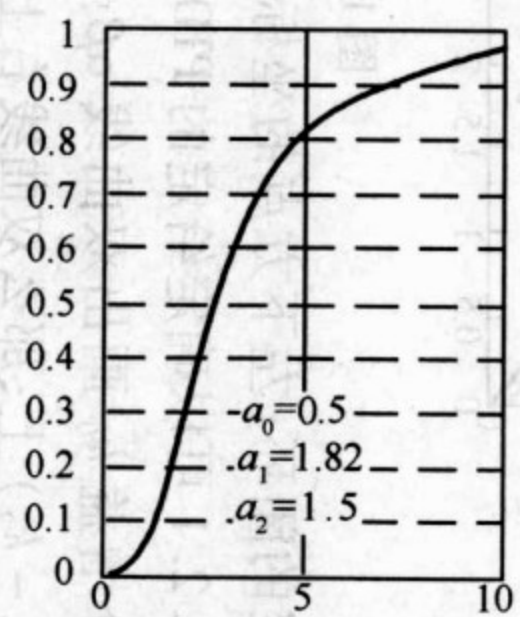

a_0=0.5
a_1=1.4
a_2=1.05

图 1.2.2


a_0=0.5
a_1=1.4
a_2=1.5


a_0=0.65
a_1=1.4
a_2=1.5


$-a_0$=0.5
$.a_1$=1.82
$.a_2$=1.5

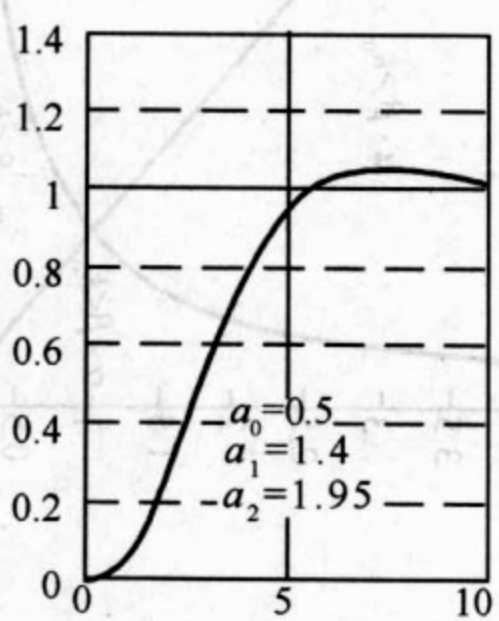

a_0=0.5
a_1=1.4
$-a_2$=1.95

图 1.2.3

是比较敏感的. 由于闭环系统的参数 A_1 和 A_2 只是对开环系统的参数 a_1, a_2 上叠加了 P,D 增益 k_1, k_2 所得(见式(1.2.3)),因此增益 k_1, k_2 的上下浮动相当于对象参数 a_1, a_2 的浮动. 这就是为什么当实际工况发生变化时需要经常调整 PID 参数的根本原因.

另一方面,可以利用闭环系统的行为对 PID 增益的敏感性来估计对象参数. 从上面仿真例子看,当闭环系统参数为 $A_0 = 0.5$, $A_1 = 1.4, A_2 = 1.5$ 时,闭环几乎无超调,而过渡过程时间约为 5s. 如果对某一二阶线性对象调好 PID 增益 k_0, k_1, k_2,使闭环响应无超调而过渡过程时间约为 5s,那么开环对象的参数应该是

$$a_1 = 1.4 - k_1, a_2 = 1.5 - k_2$$

当然,要具体做,还要考虑系统放大系数等别的因素的影响.

1.3 经典 PID 调节器的优缺点

经典 PID 的最主要的优点(也是其精髓),就是靠目标与实际行为之间的误差来决定消除此误差的控制策略,而不是靠对象的输入 - 输出关系,即不是靠对象的输入 - 输出模型来决定控制策略. 只要选择 PID 增益使闭环稳定,那么就能使一类对象达到静态指标. 这是它在过程控制中广泛被采用的主要原因.

经典 PID 调节器成形的时期是 20 世纪 20 年代 ~ 40 年代,由于当时的科学技术水平的限制,只能用简单的模拟器件来实现 PID 反馈律. 从而 PID 反馈律以最原始的、带有许多不尽人意的缺点步入控制工程界. 当时还不能使用稍微复杂一些的误差信号处理技术,因而经典 PID 未能尽情发挥其优点. 经典 PID 调节器在工业应用的初期,由于一般的控制工程的精度和速度要求尚不高,简单的 PID 调节就能成功地满足控制工程要求,从而逐渐被视为几乎完美的调节器件而占据了控制工程界的神圣地位.

然而,科学技术的发展对控制精度和速度的要求,以及对环境变化的适应能力的要求越来越高,经典 PID 慢慢显露出其缺点.

正是这些缺点的显露，推动了半个多世纪控制理论的发展．一部分走的是把先进的信号处理技术和数字化方法融入 PID 框架之中来提高其性能，如自校正 PID、智能 PID、模糊 PID、专家系统 PID 等；另一部分则是认为单靠系统输入 - 输出信息而不靠系统内部状态变量信息是导致 PID 缺点的根本原因，因此走了靠对象的状态变量运动模型来决定状态反馈控制策略的所谓现代控制理论的路子．

现在，应该说，控制理论对控制量、系统输出与被控对象之间关系本质的认识已经很深入了，而且整个控制工程已经向数字化方向发展．基于现代的科技水平，如何正确地认识 PID 的优缺点，如何用现代的信号处理技术和数字化技术来进一步发扬 PID 留给我们的宝贵理念：根据目标与实际行为之间的误差来确定消除此误差的控制策略，是很有实用意义的研究课题．

（1）从 1.2 节的讨论可以看出，尽管 PID 的稳定余度不小，但具有好的动态品质的余度不大．闭环动态品质对 PID 增益的变化太敏感．由于这个缺点，当被控对象处于经常变化的环境之中时，根据环境变化，需要经常变动 PID 增益，这使 PID 的实际应用受到一定限制．正是这个缺点也推动了各种所谓先进控制器的研究和发展．

（2）“基于误差反馈来消除误差”是 PID 的精髓，但是在下一节将看到直接取目标与实际行为之间的误差并不是完全合理的．直接取这种误差，常常使初始控制力太大而使系统行为出现超调．这个缺点是导致用 PID 控制的闭环系统中产生“快速性”和“超调”之间矛盾的主要原因．

（3）PID 是误差的比例、积分、微分的加权和形式来形成反馈控制量的．然而，除直接量测实际行为变化速度的场合（实际中这种场合比较少）外，由于没有比较合适的微分器，常常只用 PI（无误差微分反馈）控制律．这又限制了 PID 的控制能力．

（4）PID 是误差的过去、现在、将来（发展趋势）的适当组合来产生控制量的．经典 PID 采用的是这三者的加权和（线性组合）形

式. 有没有别的更好的组合方式呢?我们已经发现,在非线性领域,有很多效率更高、更好的组合方式. 在控制器向数字化方向发展的今天,限制在加权和(线性组合) 形式已经没有必要了.

(5)PID 中的误差积分的反馈,对抑制常值扰动确实有其效果. 但是,无扰动作用时,误差积分的反馈常使闭环的动态特性变差,而对随时变化的扰动来说,积分反馈的抑制能力又不显著,因此采用误差积分反馈的必要性是值得商榷的.

如果我们吸收现代控制理论成果和现代信号处理技术,适应数字化时代的潮流,进行进一步改善来克服上述缺点,那么根据"基于误差反馈来消除误差"的 PID 的精髓将会更加发扬光大,使许多实际控制工程问题以更为简单而有效的方式得到圆满地解决.

1.4 安排过渡过程的作用

考察对放大系数为 1 的二阶系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_1(x - v_0) - a_2\dot{x} \\ y = x \end{cases} \tag{1.4.1}$$

输入单位阶跃信号 $v_0 = 1$ 时的响应.

我们希望系统的输出 y 尽可能快而无超调地跟踪阶跃信号 $v_0 = 1$. 当然,对象参数 a_1 和 a_2 都是正数时,输出 y 最终能跟上输入信号 v_0,但是其过渡过程不一定没有超调和振荡. 然而,当对象参数 a_1, a_2 取成 $a_1 = r^2, a_2 = 2r, r > 0$ 时,其过渡过程已经没有超调了. 这时系统(1.4.1) 可表示成

$$\begin{cases} \ddot{x} = -r^2(x - v_0) - 2r\dot{x} \\ y = x \end{cases} \tag{1.4.2}$$

这里,r 分别取 2,4,6,8 时的仿真结果如图 1.4.1.

这些阶跃响应的过渡过程时间 T_0 完全是由参数 r 所确定,过渡过

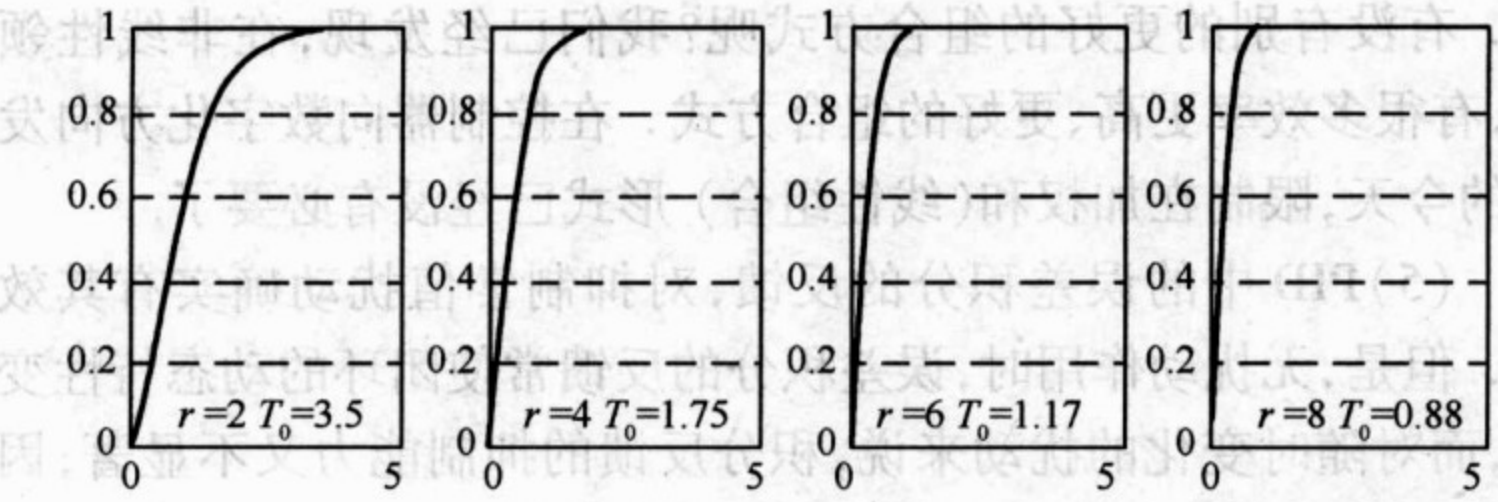


图 1.4.1

程时间约为

$$T_0 = \frac{7}{r} \tag{1.4.3}$$

如果对象参数 a_1 和 a_2 偏离了 r^2 和 $2r$，那么其阶跃响应要么有超调和振荡，要么过渡过程时间拉长. 在给定 $a_1 = r^2$ 的情况下，当阻尼系数 $a_2 > 2r$（过阻尼）时，其过渡过程虽然无超调，但跟踪时间变长；反之，当 $a_2 < 2r$（缺阻尼）时，虽然加快了跟踪速度，但产生超调和振荡，且阻尼系数 a_2 越小，超调就越大.

在 PID 调节律中的 P 和 D 的增益 k_1 和 k_2 的作用，就是把系统（1.4.1）的参数 a_1, a_2 改变成新的参数 $\bar{a}_1 = a_1 + k_1 > 0$ 和 $\bar{a}_2 = a_2 + k_2 > 0$，使新参数 $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ 所代表的闭环系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\bar{a}_1(x - v_0) - \bar{a}_2\dot{x} \\ y = x \end{cases} \tag{1.4.4}$$

的阶跃响应快而无超调. 前面已看到，欲使这个系统的阶跃响应无超调，最好 $\bar{a}_1$ 和 $\bar{a}_2$ 满足关系：$\bar{a}_1 = r^2, \bar{a}_2 = 2r$，因此要满足 $\bar{a}_2 = 2\sqrt{\bar{a}_1}$. 而这时的过渡过程时间约为 $\frac{7}{r} = 7/\sqrt{\bar{a}_1}$. 显然，$\bar{a}_1$ 大，且 $\bar{a}_2 = 2\sqrt{\bar{a}_1}$ 时，闭环的阶跃响应将快而无超调. 如果对象参数 a_1，a_2 给定，那么 PID 调节律中 P 和 D 的增益 k_1, k_2，当满足关系式

$$k_2 = 2\sqrt{(a_1 + k_1)} - a_2 \tag{1.4.5}$$

时,闭环的阶跃响应才无超调,而其过渡过程时间约为

$$T_0 = \frac{7}{\sqrt{a_1 + k_1}} \tag{1.4.6}$$

显然,k_1 取大,而 k_2 满足关系式(1.4.5),就能实现快而无超调的阶跃响应.

假定对象的额定参数为

$$a_1 = 2, a_2 = 2$$

那么取 P 的增益 $k_1 = 2.0$ 时,过渡过程时间为

$$T_0 = \frac{7}{\sqrt{a_1 + k_1}} = \frac{7}{\sqrt{2 + 2}} = 3.5$$

而实现快而无超调所需的 D 的增益

$$k_2 = 2\sqrt{(a_1 + k_1)} - a_2 = 2\sqrt{4} - 2 = 2$$

现在固定 PD 的增益 k_1 和 k_2,然后让对象的参数 a_1, a_2 上下摄动 50% 来看闭环的阶跃响应.

图 1.4.2 显示的四条上升曲线所对应的对象参数(a_1, a_2)分别是(3,2),(1,2),(2,3),(2,1). 从这里可以看出,对象参数的摄动对过渡过程的影响是比较大的.

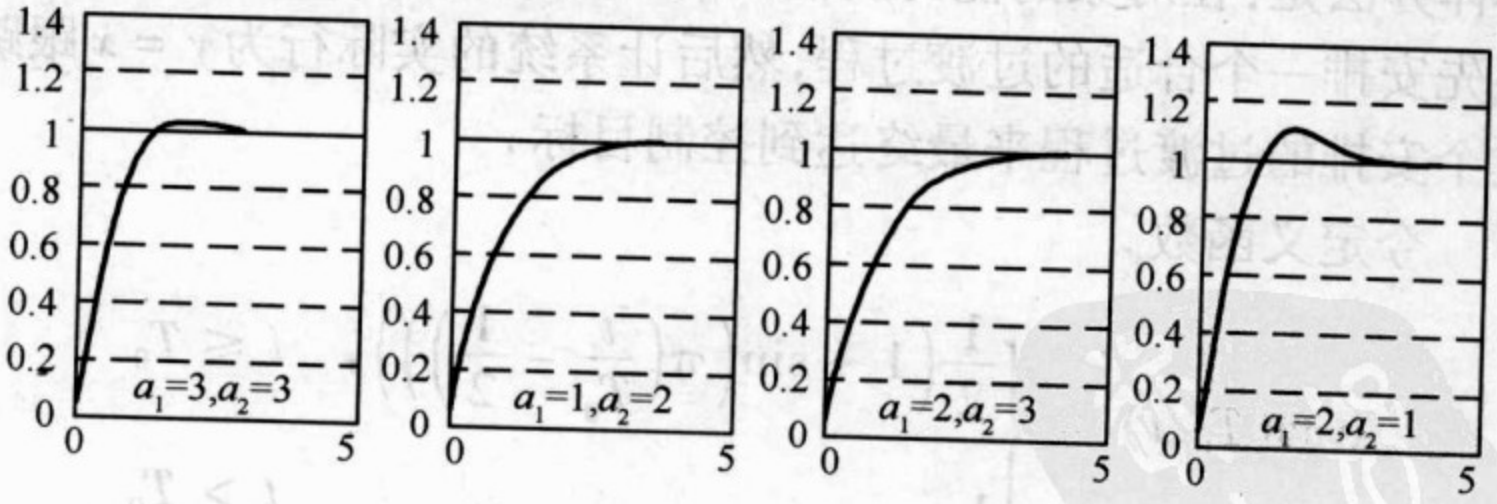


图 1.4.2

在过去,由于没有获取微分信号的合适办法,绝大部分 PID 调节,实际上,就是 PI 调节,即不能用 D 的增益 k_2 来改变对象阻尼部分参数 a_2,只能用 P 的增益 k_1 来改变对象参数 a_1. 由于不能施加 $k_2(k_2 = 0)$,于是无超调所需的增益 k_1 应满足关系式(根据式

(1.4.4))$k_2 = 2\sqrt{(a_1 + k_1)} - a_2 = 0, k_1 = \frac{a_2^2}{4} - a_1$，而对应的过渡过程时间(根据式(1.4.5))为 $T_0 = \frac{7}{\sqrt{a_1 + k_1}} = 7\frac{2}{a_2}$. 这样，过渡过程无超调的要求，使P的增益 k_1 和过渡过程时间 T_0 完全由对象参数 a_1, a_2 所定死. 要想加快过渡过程，势必要加大P的增益 k_1，这就使闭环成为缺阻尼过程而产生超调. 这就是在经典调节理论中所说的快速性和超调的矛盾.

能否避免这种快速性和超调的矛盾呢?在系统(1.4.4)的阶跃响应中，我们直接取了系统的实际行为 $y = x$ 与控制目标 v_0 之间的误差 $e = x - v_0$. 实际上，由于实际系统都具有惯性，系统输出 $y = x$ 只能从零初始状态开始缓慢变化，而控制目标的初始值却是非零值 v_0，从而误差 $e = x - v_0$ 的初始值成为 $-v_0$. 这样，如果为了加快过渡过程而取较大的增益 k_1，那么系统(1.4.4)的第一项 $\overline{a_1}(x - v_0)$ 变成很大，给予系统很大的初始冲击，使系统的实际行为 $y = x$ 很容易产生超调.

因此，如果我们能够降低起始误差，那么在不改变系统阻尼的情况下有可能用较大的增益 k_1 来加快过渡过程. 降低起始误差的具体办法是：在对象的能力所能承受的范围内，根据控制目标 v_0，事先安排一个合适的过渡过程，然后让系统的实际行为 $y = x$ 跟踪这个安排的过渡过程来最终达到控制目标.

今定义函数

$$\mathrm{trns}(T_0, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_0} - \frac{1}{2}\right)\right)\right), & t \leqslant T_0 \\ 1, & t > T_0 \end{cases} \tag{1.4.7}$$

这个函数是，在 T_0 时间内，从0单调上升到1并保持不变的曲线. 对它乘上设定值 v_0 作为安排的过渡过程，其中 T_0 是过渡过程时间，是根据对象的能力来确定，v_0 是控制目标.

现在,在系统(1.4.4)中用安排的过渡过程 $v_0\mathrm{trns}(T_0,t)$ 来代替 v_0,并假定 D 的增益 $k_2 = 0$,那么系统(1,4,4)变成

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\bar{a}_1(x - v_0\mathrm{trns}(T_0,t)) - a_2\dot{x}, \bar{a}_1 = a_1 + k_1 \\ y = x \end{cases} \tag{1.4.8}$$

下面,先看对象(1.4.4)的参数为 $a_1 = 2 = a_2$,而 P 的增益 k_1 取不同值时的仿真图(图 1.4.3).

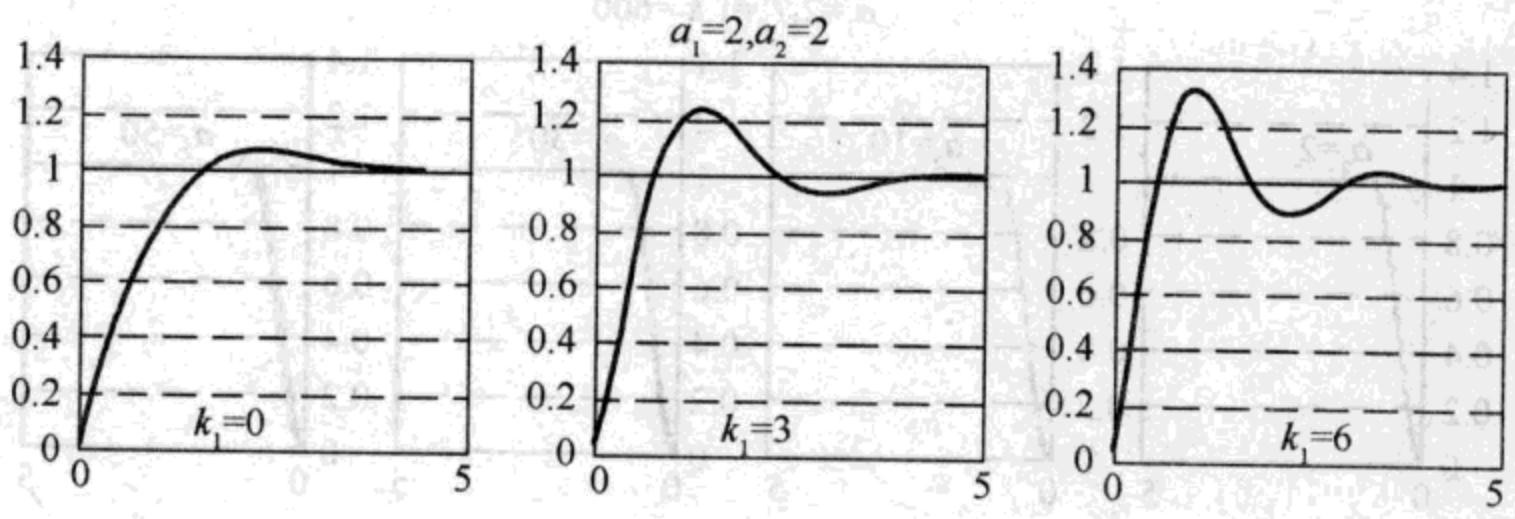


图 1.4.3

从图 1.4.3 中明显看出,k_1 的加大,虽能加快过渡过程,但超调却显著增大.

作为对比,我们来看看 P 的增益 k_1 对已安排的过渡过程作为输入的系统(1.4.8)的影响. 取过渡过程时间分别为 $T_0 = 2,1$,而分别取 P 的增益为 $k_1 = 800,400$(由于安排的过渡过程和系统输出之间的误差始终都很小,要有足够的推动力来启动系统,必须增益 k_1 要足够大). 这个仿真结果(图 1.4.4)表明,在这里,快速性和超调并不对立,而且系统的响应效果对一定范围的增益 k_1 的变化并不敏感,因此一个固定的增益 k_1 能够适应较大范围内的对象参数 a_1(如,当 $k_1 = 400$ 时,a_1 取区间[0,400]范围内的值并不改变响应效果). 安排过渡过程也能扩大增益 k_1 对对象参数 a_2 的适应范围. 图 1.4.5 显示的是 $T_0 = 1, k_1 = 600$,而 a_2 分别取 2,10,30,50 的仿真结果. 比起图 1.4.3 的结果,这里的参数 a_2 的适应范围扩大了一个数量级.

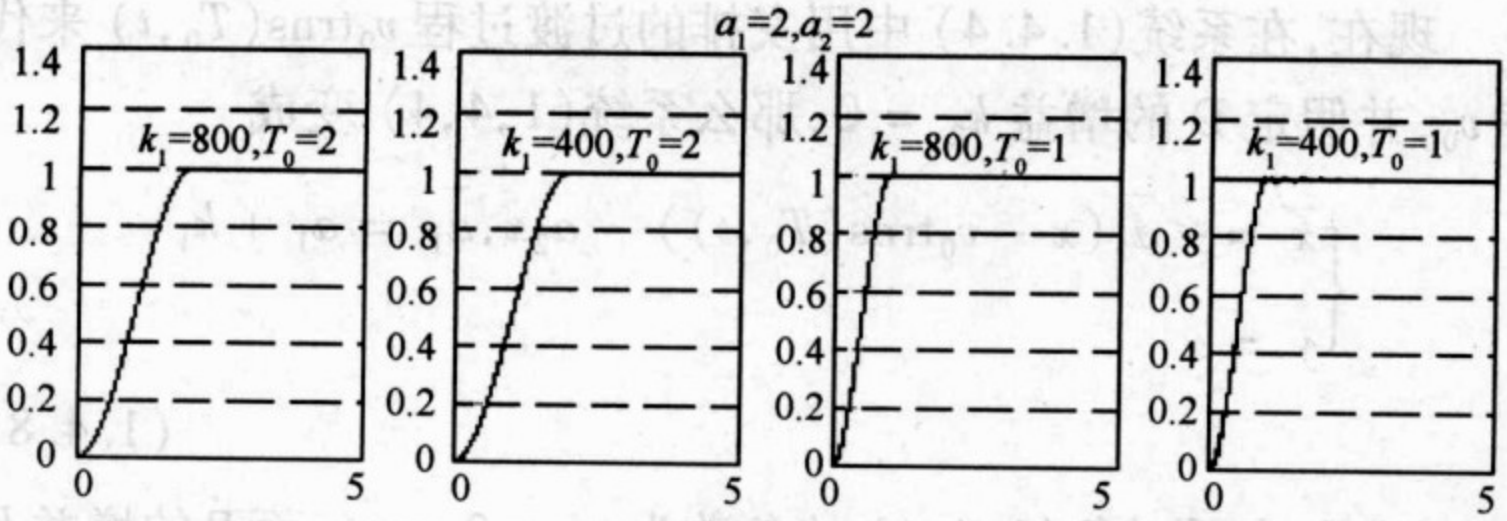


图 1.4.4

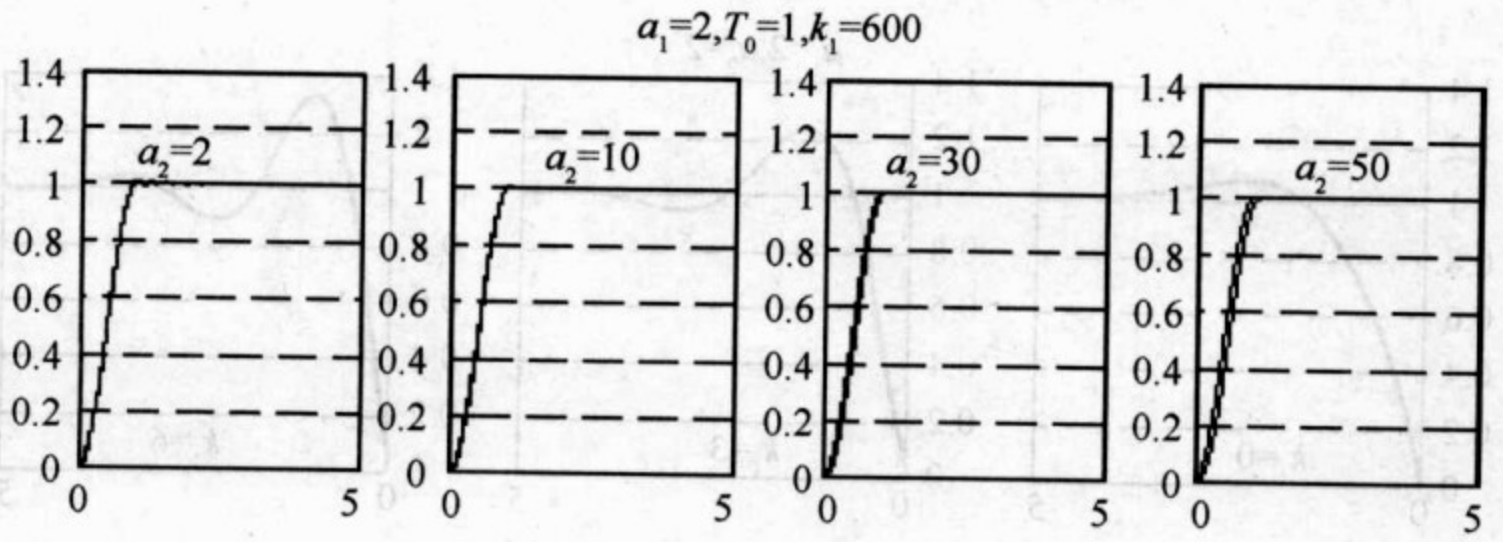


图 1.4.5

既然我们事先安排了过渡过程,那么我们也能够得到安排的过渡过程的微分信号,如对式(1.4.7)定义的 $\mathrm{trns}(T_0,t)$ 而言,其微分信号为

$$\mathrm{dtrns}(T_0,t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2T_0}\cos\left(\pi\left(\dfrac{t}{T_0}-\dfrac{1}{2}\right)\right), & t\leqslant T_0\\ 0, & t>T_0\end{cases} \tag{1.4.9}$$

如果系统输出的微分信号 $\dot{x}$ 能获取,那么误差信号 $e=v_0\mathrm{trns}(T_0,t)-x$ 的微分信号 $\dot{e}=v_0\mathrm{dtrns}(T_0,t)-\dot{x}$ 也能够得到,从而 PID 的 D 反馈 $-k_2\dot{e}$ 就能实现. 这时,实现了 PD 反馈的系统

$$\begin{cases}\bar{a}_1=a_1+k_1,\bar{a}_2=a_2+k_2\\ \ddot{x}=-\bar{a}_1(x-v_0\mathrm{trns}(T_0,t))-\bar{a}_2(\dot{x}-v_0\mathrm{dtrns}(T_0,t))\\ y=x\end{cases} \tag{1.4.10}$$

对系统(1.4.10)来说,可适应的对象参数 a_1, a_2 的范围就更为扩大了.

仿真图 1.4.6 表明,PD 的增益 k_1, k_2 在大范围内的不同选取,对过渡过程特性的影响并不大. 这也说明,在这个范围内给定的 PD 增益 k_1, k_2 所能适应的对象参数 a_1, a_2 的范围也很大.

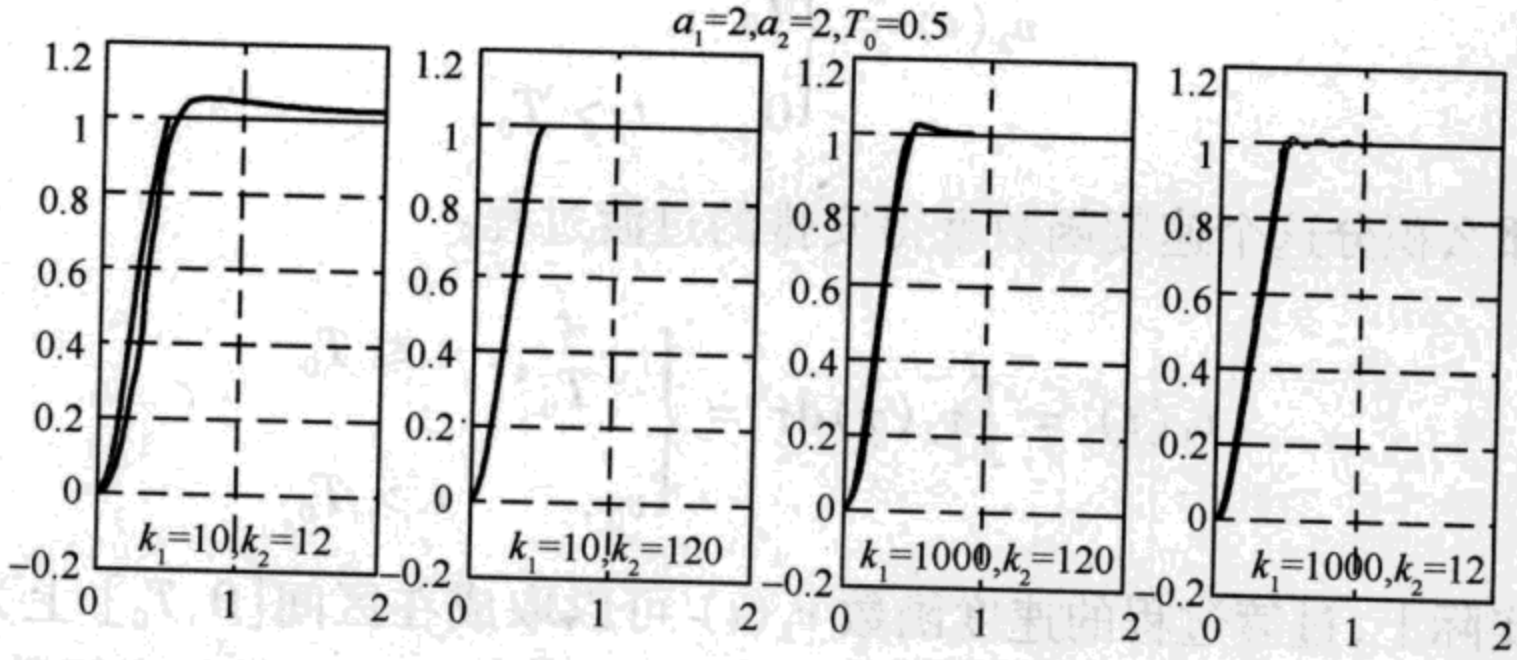


图 1.4.6

以上仿真结果说明:

(1) 事先安排过渡过程是解决超调与快速性矛盾的一种很有效的办法.

(2) 事先安排过渡过程使误差反馈增益和误差微分反馈增益的选取范围大为扩大,从而使其整定更为容易.

(3) 事先安排过渡过程使给定的反馈增益所能适应的对象参数范围大为扩大,即控制器的鲁棒性更为加强.

这就是安排过渡过程所带来的好处.

如何合理安排快速而无超调的过渡过程呢?

系统对阶跃响应的过渡过程特性是与系统的阶密切相关. 比如,一阶系统的阶跃响应就有非零初始斜率;二阶系统的阶跃响应就有非零初始加速度等. 因此安排过渡过程,不仅要考虑系统的各种约束条件,还要适应对象的系统阶.

下面,分别考察对一,二,三,… 阶系统安排过渡过程的几种方法.

我们用 T_0 表示过渡过程时间，$v_0 = \text{const} \neq 0$ 表示设定值，而用 $v_1(t), v_2(t), v_3(t)\cdots$ 分别表示安排的过渡过程、过渡过程的速度、过渡过程的加速度等.

一阶对象. 先取过渡过程的速度函数：

$$v_2(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{T_0}, & t \leqslant T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$$

那么积分这个速度函数就得安排的过渡过程：

$$v_1(t) = \int_0^t v_2(\tau)\mathrm{d}\tau = \begin{cases} v_0 \dfrac{t}{T_0}, & t \leqslant T_0 \\ v_0, & t > T_0 \end{cases}$$

实际上，过渡过程的速度函数 $v_2(t)$ 可以取成在区间 $[0, T_0]$ 上为非负，此区间之外为零，而在 $[0, T_0]$ 上的积分值为 v_0 的任意函数.

图 1.4.7 是 $T_0 = 3, v_0 = 1$ 时各种可能的速度函数形式.

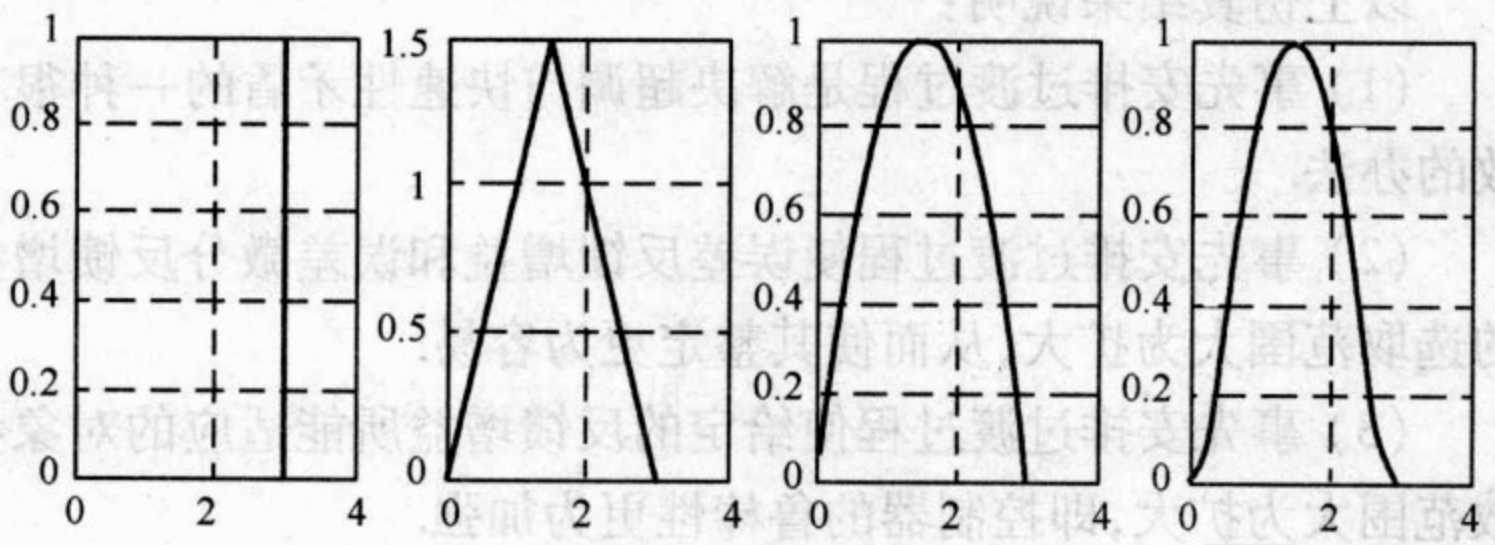


图 1.4.7

二阶对象. 先取过渡过程的加速度函数：

$$v_3(t) = \begin{cases} 4\dfrac{v_0}{T_0^2}, & t \leqslant \dfrac{T_0}{2} \\ -4\dfrac{v_0}{T_0^2}, & \dfrac{T_0}{2} < t \leqslant T_0 \\ 0, & T_0 < t \end{cases}$$

积分这个加速度函数,得速度函数:

$$v_2(t) = \int_0^t v_3(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} 4\dfrac{v_0}{T_0^2}t, & t \leqslant \dfrac{T_0}{2} \\ 2\dfrac{v_0}{T_0}\left(1 - \dfrac{2}{T_0}\left(t - \dfrac{T_0}{2}\right)\right), & \dfrac{T_0}{2} < t \leqslant T_0 \\ 0, & T_0 < t \end{cases}$$

这时安排的过渡过程 $v_1(t)$ 将是速度函数 $v_2(t)$ 的积分. 由于 $v_2(t)$ 在 $(0,T_0)$ 上为正函数,故安排的过渡过程 $v_1(t)$ 是从零开始单调上升无超调的到达 v_0 的函数.

一般地,加速度函数 $v_3(t)$ 可以取成这样的形式:在区间 $[0, T_0]$ 的前一部分取正,后一部分取负,而取正部分的面积和取负部分的面积相等. 如下面几种类型都可以取(图 1.4.8).

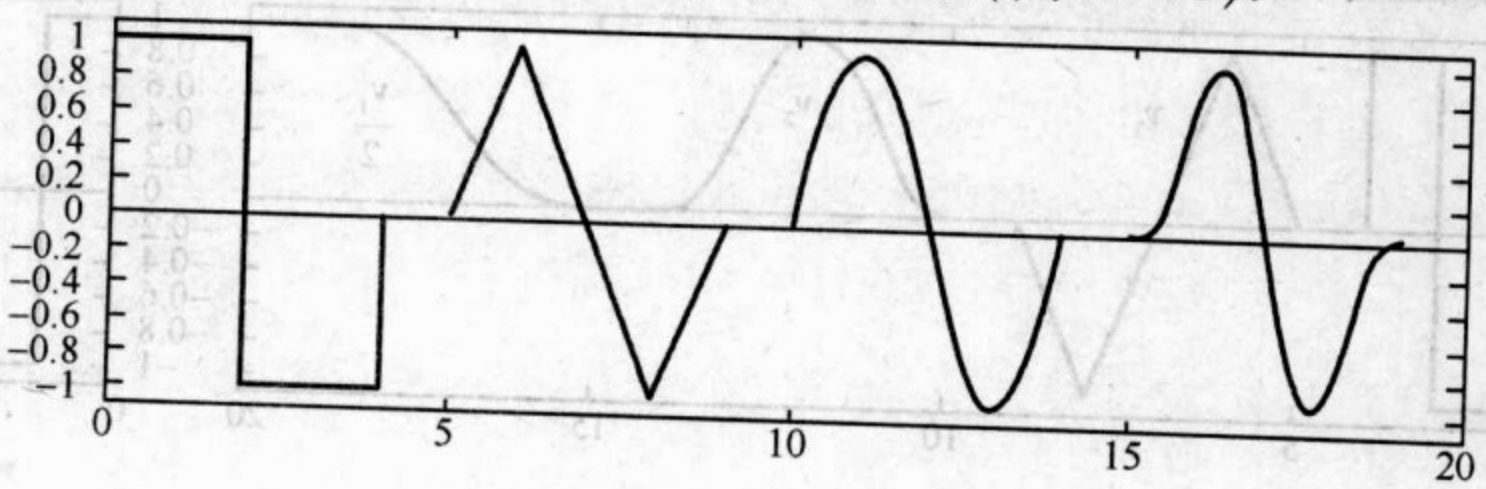


图 1.4.8

三阶对象. 先取过渡过程的加加速度函数:

$$v_4(t) = \begin{cases} 32\dfrac{v_0}{T_0^3}, & t \leqslant \dfrac{T_0}{4} \\ -32\dfrac{v_0}{T_0^3}, & \dfrac{T_0}{4} < t \leqslant 3\dfrac{T_0}{4} \\ 32\dfrac{v_0}{T_0^3}, & 3\dfrac{T_0}{4} < t \leqslant T_0 \\ 0, & T_0 < t \end{cases}$$

积分此加加速度函数得加速度函数:

$$v_3(t) = \int_0^t v_4(\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$\begin{cases} 32\dfrac{v_0}{T_0^3}t, & t \leqslant \dfrac{T_0}{4} \\ 8\dfrac{v_0}{T_0^2}\left(1 - \dfrac{4}{T_0}\left(t - \dfrac{T_0}{4}\right)\right), & \dfrac{T_0}{4} < t \leqslant 3\dfrac{T_0}{4} \\ -8\dfrac{v_0}{T_0^2}\left(1 - \dfrac{4}{T_0}\left(t - 3\dfrac{T_0}{4}\right)\right), & 3\dfrac{T_0}{4} < t \leqslant T_0 \\ 0, & T_0 < t \end{cases}$$

安排的过渡过程$v_1(t)$是由加速度函数$v_3(t)$的两次积分所得. 从$v_4(t)$依次积分得到$v_1(t)$的过程表示为图 1.4.9.

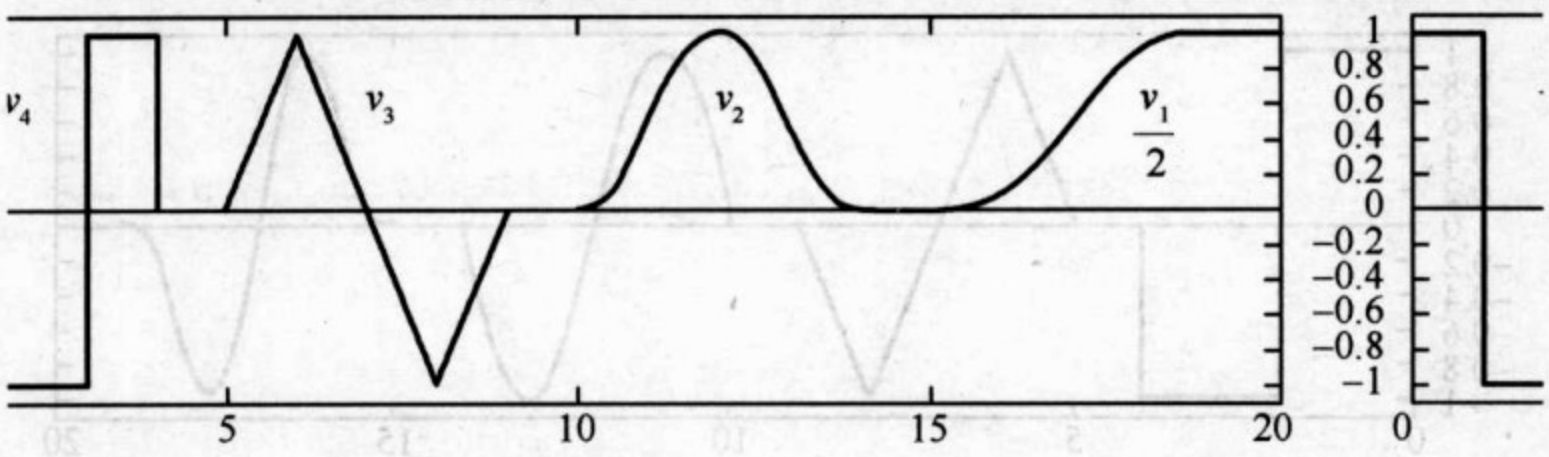


图 1.4.9

构造$v_3(t)$的一般办法如下:把区间$[0, T_0]$分成:前部,中间,后部三段. 然后构造函数,使前后两段取正值,中间段取负值;两个正部分的面积各相等,而正部分的面积之和是与中间负部分的面积相等.

对各阶对象安排过渡过程的一般方法可按如下公式给出:这里设定的过渡过程时间为T_0,记

$$s(t, T_0) = \begin{cases} \operatorname{sign}(t), & t \leqslant T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$$

则函数

$$u_1 = s(t, T_0), u_2 = -s\left(t - \frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right),$$

$$u_3 = s\left(t - \frac{T_0}{4}, T_0\right)s\left(t - \frac{3T_0}{4}, \frac{T_0}{4}\right)$$

$$u_4 = -s\left(t - \frac{2-\sqrt{2}}{4}T_0, T_0\right)s\left(t - \frac{2}{4}T_0, \frac{T_0}{2}\right)s\left(t - \frac{2+\sqrt{2}}{4}T_0, T_0\right),$$

是一组方波函数,其图像如图1.4.10所示. 实际上,这些方波函数分别是一,二,三,四阶积分器串联对象,在控制输入受限制 $|u| \leqslant 1$ 时,从静止初态移动到另一位置停下来的最速控制规律.

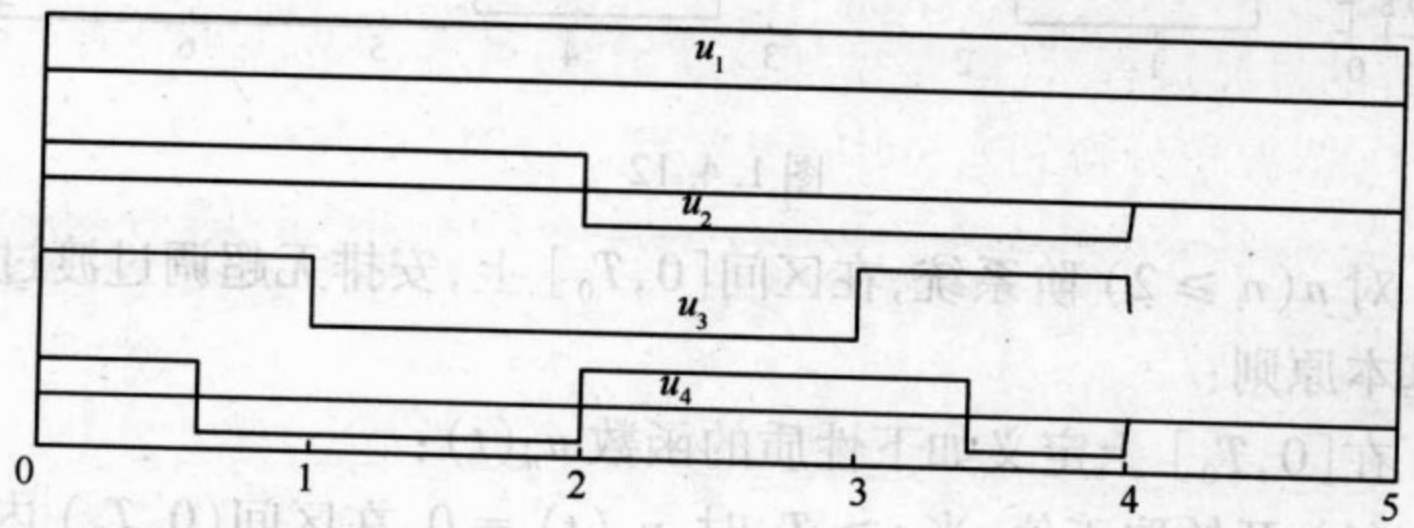


图 1.4.10

把这些函数分别送入一,二,三,四阶积分器串联型系统,令系统的初始状态都取 0 而积分,就得到安排的过渡过程及其相应各阶的微分信号(图 1.4.11).

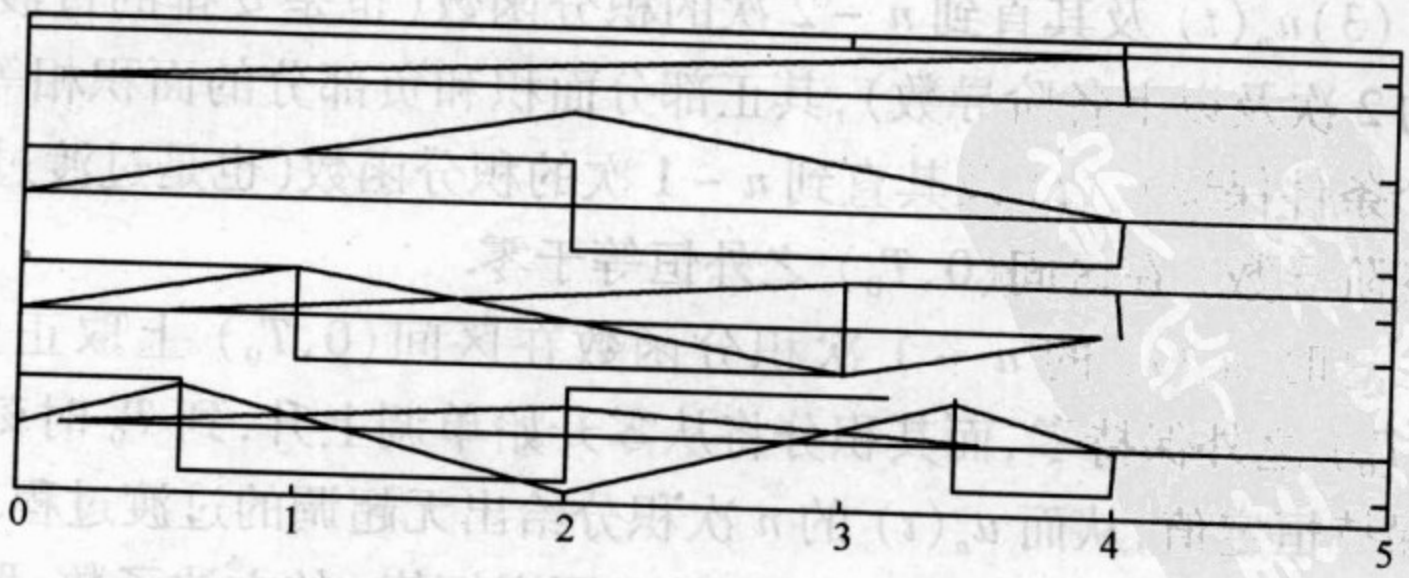


图 1.4.11

对于五阶对象,把按下面公式定义的方波函数

$$u_5 = s(t - 0.095475T_0, T_0) \times s(t - 0.345475T_0, T_0) \times$$
$$s(t - 0.654525T_0, T_0) \times s(t - 0.904525T_0, T_0)$$

送入五阶积分器串联型系统,积分得到安排的过渡过程及其一、二、三、四阶微分信号. 这些信号的曲线图如图 1.4.12 所示.

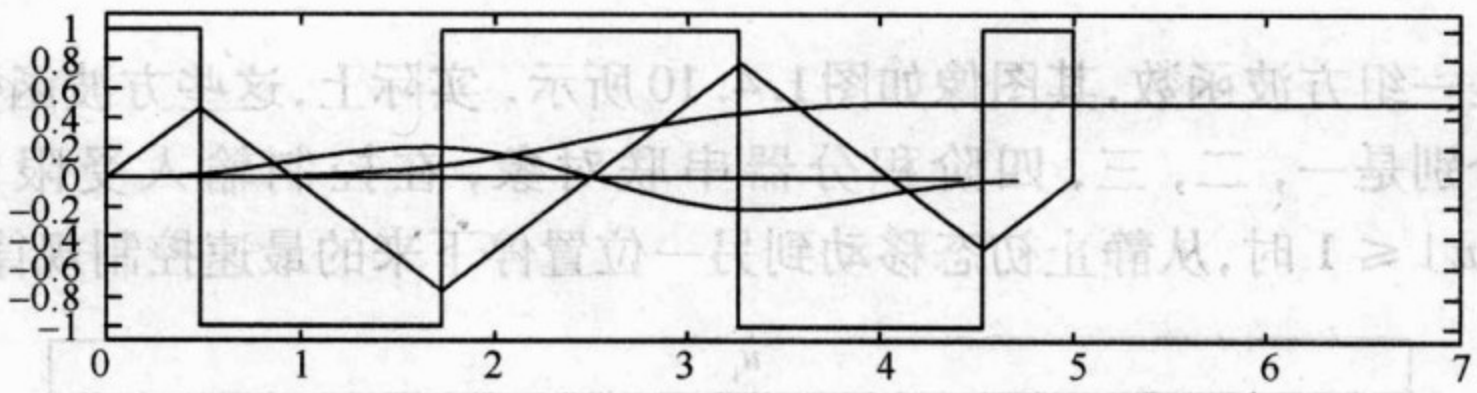


图 1.4.12

对 $n(n \geqslant 2)$ 阶系统,在区间$[0, T_0]$ 上,安排无超调过渡过程的基本原则:

在$[0, T_0]$ 上定义如下性质的函数 $u_n(t)$:

(1) 开始取正值,当 $t \geqslant T_0$ 时,$u_n(t) \equiv 0$,在区间$(0, T_0)$ 内要变 $n-1$ 次符号.

(2)$u_n(t)$ 的1次积分函数在$(0, T_0)$ 内要变 $n-2$ 次符号;2次积分函数要变 $n-3$ 次符号;……;$m(m \leqslant n-2)$ 次积分函数变 $n-(m+1)$ 次符号.

(3)$u_n(t)$ 及其直到 $n-2$ 次的积分函数(也是安排的过渡过程的2次及以上各阶导数),其正部分面积和负部分的面积相等. 这个条件保证 $u_n(t)$ 及其直到 $n-1$ 次的积分函数(也是过渡过程的各阶导数) 在区间$(0, T_0)$ 之外恒等于零.

这时,$u_n(t)$ 的 $n-1$ 次积分函数在区间$(0, T_0)$ 上取正值,$(0, T_0)$ 之外保持零,而其积分将从零开始单调上升,到 T_0 时刻以后保持恒定值,从而 $u_n(t)$ 的 n 次积分给出无超调的过渡过程.

如果满足上述条件的 $u_n(t)$ 是以固定幅值 r 的方波函数,那么函数 $u_n(t)$ 是最速控制问题

$$\begin{cases} x^{(n)} = u, & |u| \leqslant r \\ x^{(i)}(0) = 0, & i = 1, \cdots, n-1 \\ x(T_0) = v_0 > 0, & x^{(i)}(T_0) = 0, i = 2, \cdots, n-1 \\ \min T_0 \end{cases}$$

的最速控制函数.

另外更为直接而简单的办法是求解传递关系

$$y = w(s)v_0 = \frac{r^2}{(s-r)^n}v_0$$

来决定. 此传递函数的状态变量实现为

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = v_2 \\ \dot{v}_2 = v_3 \\ \vdots \\ \dot{v}_{n-1} = v_n \\ \dot{v}_n = -r(\cdots r(r(r(v_1 - v_0) + C_n^2 v_2) + C_n^3 v_3) + \cdots + C_n^n v_n) \end{cases}$$

从零初值开始积分这个方程就得安排的过渡过程 v_1,过渡过程的速度 v_2,过渡过程的加速度 v_3,……,直至安排的过渡过程的 n 阶导数. 此方程的具体积分算法为

$$\begin{cases} f = -r(r(\cdots r(r(v_1 - v_0) + C_n^2 v_2) + C_n^3 v_3) + \cdots + C_n^n v_n) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + hv_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} = v_{n-1} + hv_n \\ v_n = v_n + hf \end{cases}$$

这里 v_m 是过渡过程的 $m-1$ 阶导数,f 才是过渡过程的 n 阶导数.

例 $n=4$ 的情形 $y=\dfrac{r^4}{(s+r)^4}v_0=\dfrac{r^4v_0}{1+4s+6s^2+4s^3+s^4}$ 对应的具体算法为

$$\begin{cases} f=-r(r(r(r(v_1-v_0)+4v_2)+6v_3)+4v_4) \\ v_1=v_1+hv_2 \\ v_2=v_2+hv_3 \\ v_3=v_3+hv_4 \\ v_4=v_4+hf \end{cases}$$

如图 1.4.13 所示。

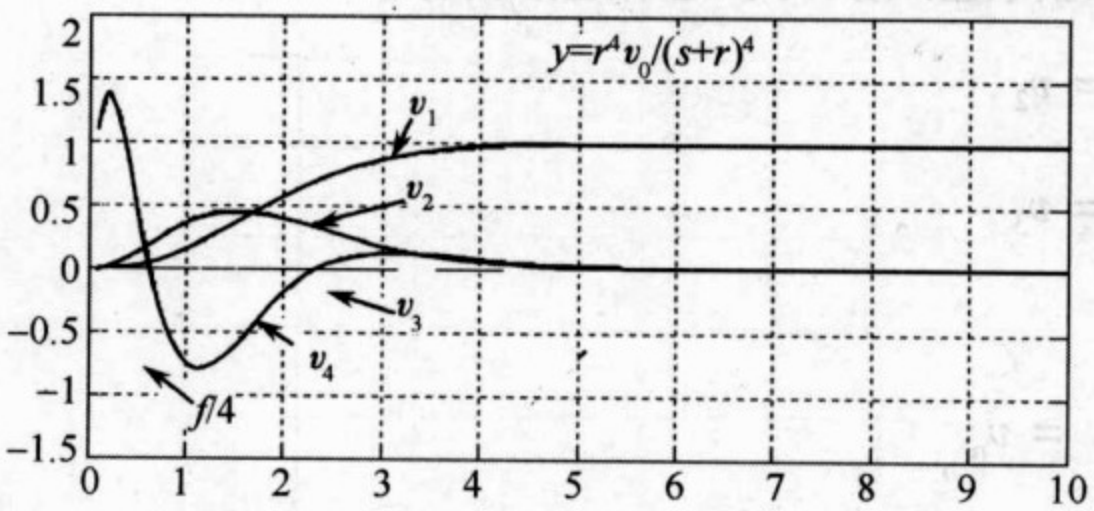


图 1.4.13

1.5 时间尺度

实际控制对象的具体表现是五花八门的，两个实际物理背景完全不同的对象，把它们作为抽象的被控对象来考察时，如何比较由它们作成的闭环系统的控制品质？尽管各种对象其物理背景很不相同，但是作为被控对象，按控制系统的典型特征，可以归类为几种不同系统．例如，一个工业用电炉子，升温时间花了 3h，而另一个实验室用的电炉子，升温时间只花了 30min. 这两个炉子作为抽象的被控对象，问哪一个对象的过渡过程快，哪一个慢？又如何比较这两个受控系统的动态品质和控制品质呢？

下面看看放大系数为 1 的一，二，三阶线性系统阶跃响应的快

慢特性.

一阶系统通常表示成

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}(x - v_0), W(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

式中:T 为系统的时间常数.

时间常数 T 越小,系统的响应越快. 如果记 $r = 1/T$,上述方程变为

$$\dot{x} = -r(x - v_0) \tag{1.5.1}$$

显然,r 越大,$x(t)$ 跟踪 v_0 的速度越快,即系统的阶跃响应越快. 图 1.5.1 显示了 $r = 1$ 和 $r = 5$ 时的阶跃响应. 从中看出阶跃响应速度是与 r 成反比.

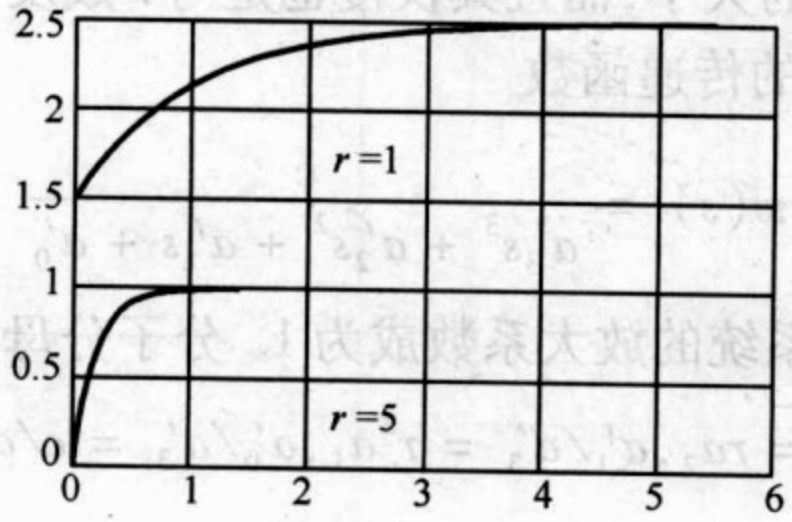


图 1.5.1

二阶系统通常表示成

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\left(x - u + 2\frac{\xi}{\omega_0}\dot{x}\right)$$

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\omega_0\xi s + \omega_0^2}$$

式中:ω_0 为谐振频率,也是决定系统响应快慢的一个参数;ξ 为阻尼系数. 如果 $r = \omega_0$,那么等价的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r^2(x_1 - u) - 2r\xi x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1.5.2}$$

此系统对不同的 r 和 ξ 的阶跃响应如图 1.5.2 所示.

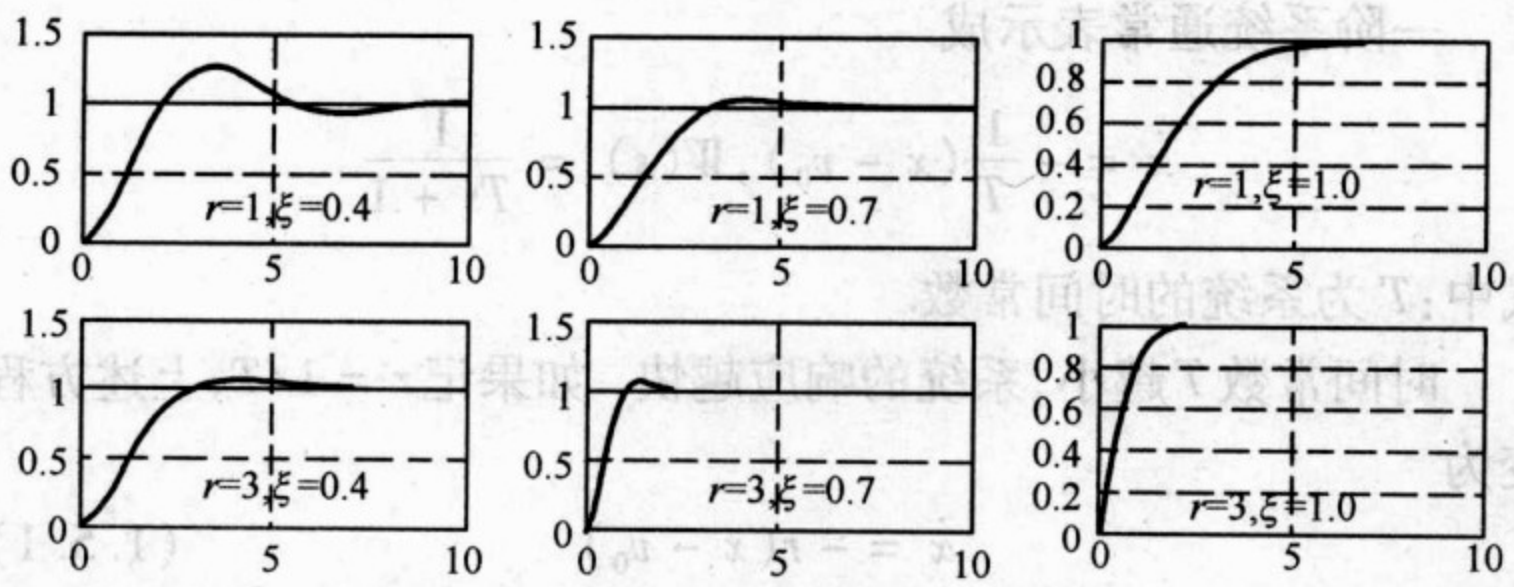


图 1.5.2

从这些仿真图看出,不管是过阻尼还是缺阻尼,阶跃响应的快慢主要取决于 r 的大小,而且其快慢也是与 r 成反比.

在三阶系统的传递函数

$$w(s) = \frac{c}{a'_3 s^3 + a'_2 s^2 + a'_1 s + a'_0}$$

中若有 $c = a'_0$,系统的放大系数成为 1. 分子分母各除以 a'_3,并记

$$a'_2/a'_3 = ra_2, a'_1/a'_3 = r^2 a_1, a'_0/a'_3 = c/a'_3 = r^3$$

得

$$w(s) = \frac{r^3}{s^3 + ra_2 s^2 + r^2 a_1 s + r^3}$$

这个传递函数的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -r^3(x_1 - u) - r^2 a_1 x_2 - r a_2 x_3 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1.5.3}$$

用数值仿真来看这个系统的阶跃响应的快慢特性. 图 1.5.3 显示了 r, a_1, a_2 取不同值时的阶跃响应曲线. 同样,阶跃响应快慢主要决定于 r 的大小,而且其快慢也反比于 r.

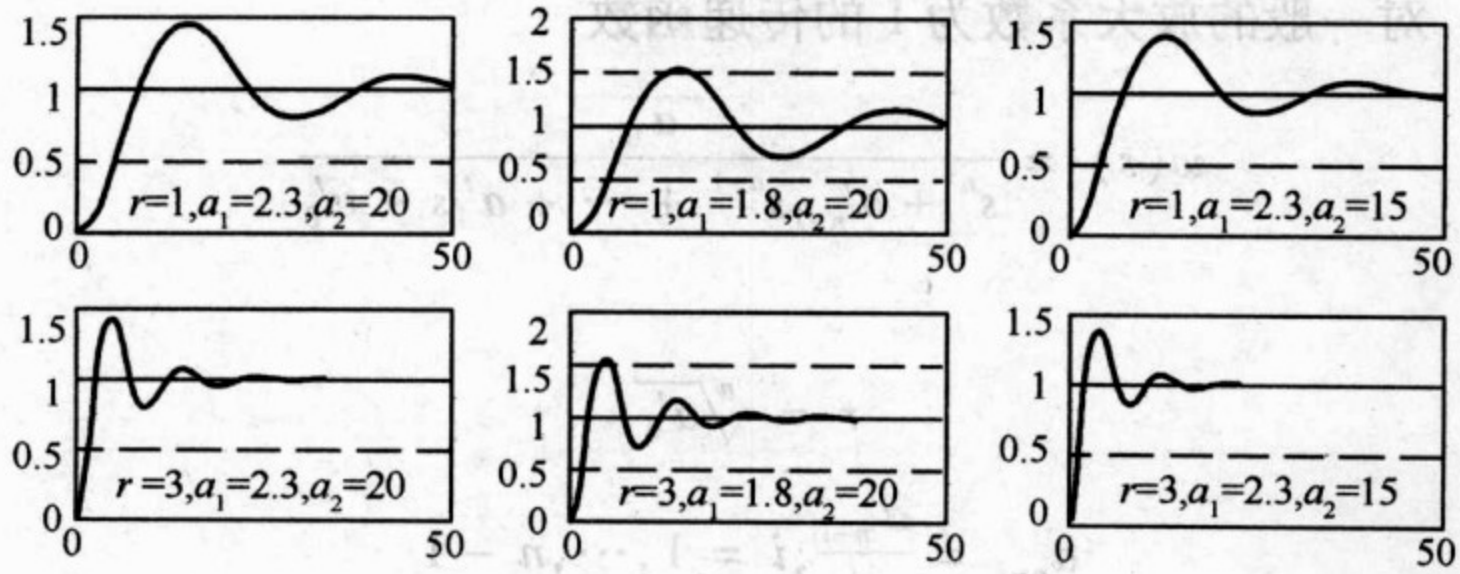


图 1.5.3

从图 1.5.1 ~ 图 1.5.3 看出如下有意思的现象:当 ξ 或 a_1, a_2 给定时,不同的 r 所给出的响应曲线只是沿时间轴压缩或伸张的相似曲线. 这说明,在系统(1.5.1),系统(1.5.2),系统(1.5.3)中的参数 r 确实起着决定响应快慢的"时间尺度"作用.

实际上,如果在系统(1.5.1),系统(1.5.2),系统(1.5.3) 中分别做如下时间尺度和状态变量的变换

$$t = \frac{1}{r}\tau\left(\text{即时间尺度扩大 } r \text{ 倍}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$z_1 = x_1, z_2 = \frac{x_2}{r}, z_3 = \frac{x_3}{r^2}$$

那么这三个系统分别变成

$$\dot{z}_1 = -(z_1 - u), \qquad w_1(s) = \frac{1}{s+1};$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -(z_1 - u) - 2\xi z_2, \\ y = z_1 \end{cases} \quad w_2(s) = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1};$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -(z_1 - u) - a_1 z_2 - a_2 z_3 \\ y = z_1 \end{cases}, w_3(s) = \frac{1}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$

对一般的放大系数为 1 的传递函数

$$w(s) = \frac{a'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a'_1 s + a'_0}$$

令

$$r = \sqrt[n]{a'_0}$$

$$a_{n-i} = \frac{a'_{n-i}}{r^i}, i = 1, \cdots, n-1$$

并做时间尺度变换

$$t = \frac{1}{r}\tau$$

那么在新的时间尺度下传递函数变成

$$w(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1}$$

在经典调节理论中,把传递函数分母多项式的最高次项系数和常数项系数都化为单位 1 的上述过程称做传递函数的标准化过程. 显然,把分母多项式的最高次项系数和常数项系数都等于单位的传递函数称做标准传递函数.

借此术语,在放大系数为 1 的传递函数的状态空间能控标准形实现

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0(x_1 - u) - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n \\ y = x_1 \end{cases}$$

中,只要 x_1 的系数 a_0 等于 1,就可以称它为标准系统,而 $a_0 > 0$ 时,量 $r = \sqrt[n]{a_0}$ 则成为代表系统响应快慢程度的一个指标.

根据上述讨论,在线性控制系统

$$w(s) = \frac{b}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

及其能控标准形实现

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + bu \\ y = x_1 \end{cases}$$

中,我们完全有理由认为

$$\rho = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_0}} \tag{1.5.4}$$

是衡量该系统响应快慢的"时间尺度",是数字积分上述微分方程时决定其采样步长的主要依据,即数字积分这个方程所需的采样步长 h 应该与 ρ 成正比.

这样定义的"时间尺度"概念,对线性控制系统有什么用处呢?

下面来考察 PID 的各"增益"与上面定义的"时间尺度"之间的关系.

给定的二阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1(x_1 - u) - a_2 x_2 \end{cases} \tag{1.5.5}$$

的时间尺度,按上面的定义为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{a_1}} \tag{1.5.6}$$

现在给定设定值 v_0,并用 PID 控制律(1.1.19)

$$u = k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2 \tag{1.5.7}$$

来实现闭环,则闭环系统的误差方程为(见式(1.1.17))

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e_1, & e_0(0) = 0 \\ \dot{e}_1 = e_2, & e_1(0) = v_0 \\ \dot{e}_2 = -a_1(e_1 - v_0) - a_2 e_2 - (k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2), & e_2(0) = 0 \\ y = v_0 - e_1 \end{cases} \tag{1.5.8}$$

现在,假定时间尺度 $\rho = 1$(即 $a_1 = 1$ 的)系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 - u) - a_2 x_2 \end{cases} \tag{1.5.9}$$

设定值为 v_0 时,已调好了 PID 控制律

$$u^* = k_0^* e_0 + k_1^* e_1 + k_2^* e_2 \tag{1.5.10}$$

这时所得的闭环系统误差方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_0^* = e_1^*, & e_0^*(0) = 0 \\ \dot{e}_1^* = e_2^*, & e_1^*(0) = v_0 \\ \dot{e}_2^* = -(e_1^* - v_0) - a_2 e_2^* - (k_0^* e_0^* + k_1^* e_1^* + k_2^* e_2^*), & e_2^*(0) = 0 \\ y = v_0 - e_1^* \end{cases} \tag{1.5.11}$$

我们的问题是误差反馈律(1.5.7)$u = k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2$ 和误差反馈律(1.5.10)$u^* = k_0^* e_0 + k_1^* e_1 + k_2^* e_2$ 之间有何关系?

对误差系统(1.5.8)施行如下时间尺度变换和误差尺度变换

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{\sqrt{a_1}}\tau = \rho\tau \\ \varepsilon_0 = \dfrac{e_0}{\rho}, \varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = \rho e_2 \end{cases} \qquad \left(x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \rho \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.5.12}$$

就得

$$\begin{cases} \varepsilon_0' = \varepsilon_1, & \varepsilon_0(0) = 0 \\ \varepsilon_1' = \varepsilon_2, & \varepsilon_1(0) = v_0 \\ \varepsilon_2' = -\rho^2 a_1(\varepsilon_1 - v_0) - \rho a_2 \varepsilon_2 - (\rho^3 k_0 \varepsilon_0 + \rho^2 k_1 \varepsilon_1 + \rho k_2 \varepsilon_2), & \varepsilon_2(0) = 0 \\ y = v_0 - \varepsilon_1 \end{cases} \tag{1.5.13}$$

显然,由于$\rho^2 a_1 = 1$,这个系统变成时间尺度$\rho = 1$的系统. 于是由等式

$$u^* = k_0^* e_0 + k_1^* e_1 + k_2^* e_2 = \rho^3 k_0 \varepsilon_0 + \rho^2 k_1 \varepsilon_1 + \rho k_2 \varepsilon_2$$

可得控制系统(1.5.5) 所需的 PID 控制律(1.5.7) 的各增益

$$k_0 = \frac{k_0^*}{\rho^3}, k_1 = \frac{k_1^*}{\rho^2}, k_2 = \frac{k_2^*}{\rho} \tag{1.5.14}$$

即,如果k_0^* ,k_1^* ,k_2^* 是控制时间尺度为1的对象所需要的PID控制律增益,那么控制时间尺度为ρ的对象所需要的PID控制律各增益,就可由公式(1.5.14) 来确定. 对由公式(1.1.20) 所决定的 PID 控制律

$$u = K\left(e + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d \dot{e}\right)$$

做同样推理,可得

$$K = \frac{K^*}{\rho^2}, T_d = \rho T_d^*, T_i = \rho T_i^* \tag{1.5.15}$$

其中,K^* ,T_i^* ,T_d^* 分别是控制标准系统($\rho = 1$ 的系统) 所需要的 PID 控制律的反馈增益、积分时间常数和微分时间常数.

当然,时间尺度变换后的系统(1.5.13) 中的阻尼项ρa_2不一定等于标准系统(1.5.11) 中的2ξ,这就需要适当调整k_2,使得系统(1.5.13) 中的ε_2的系数和系统(1.5.11) 中的e_2^*的系数相等,即

$$\rho(a_2 + k_2) = (2\xi + k_2^*), \text{或} k_2 = \frac{k_2^*}{\rho} + \frac{2\xi - \rho a_2}{\rho} \tag{1.5.16}$$

这说明,增益 k_0 和 k_1 是按公式(1.5.14)转换就可以,而增益 k_2 是按公式(1.5.16),在增益值 $\frac{k_2^*}{\rho}$ 的基础上,做同样数量级的补充 $\frac{2\xi - \rho a_2}{\rho}$ 就可以了.

例 今对时间尺度为 1 的对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 - u) - x_2 \end{cases}, (a_1 = 1, a_2 = 1)$$

已调好了 PID 增益

$$k_0^* = 0.9, k_1^* = 2, k_2^* = 1.6$$

今有参数分别为

$$a_1 = 4, a_2 = 1; a_1 = 9, a_2 = 1; a_1 = 16, a_2 = 1$$

的三个不同对象. 问分别能控制这三个对象的 PID 增益各取多少?

由于这三个对象的时间尺度分别为

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}; \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}; \rho_3 = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

因此,按公式(1.5.14),三组 PID 增益分别为

$$k_0 = 2^3 \times 0.9 = 7.2, k_1 = 2^2 \times 2 = 8,$$
$$k_2 = 2 \times 1.6 + ? = 3.2 + ?$$
$$k_0 = 3^3 \times 0.9 = 24.3, k_1 = 3^2 \times 2 = 18,$$
$$k_2 = 3 \times 1.6 + ? = 4.8 + ?$$
$$k_0 = 4^3 \times 0.9 = 57.6, k_1 = 4^2 \times 2 = 32,$$
$$k_2 = 4 \times 1.6 + ? = 6.4 + ?$$

在这里,I,P 的增益 k_0, k_1 用不着调,就用算出来的值就可以. 需要

调的只是 D 的增益 k_2. k_2 的调试是在 $\frac{k_2^*}{\rho}$ 的基础上进行，用公式(1.5.16)中的 $\frac{2\xi - \rho a_2}{\rho}$ 的估计来进行补充. 由于在式(1.5.16)中的 2ξ 和 a_2 现在都等于1，就可用 $\frac{1}{\rho} - 1$ 来补充上面“?”的部分就可以了.

用这种方法确定了 PID 增益之后，对闭环所做的仿真结果示于图 1.5.4.

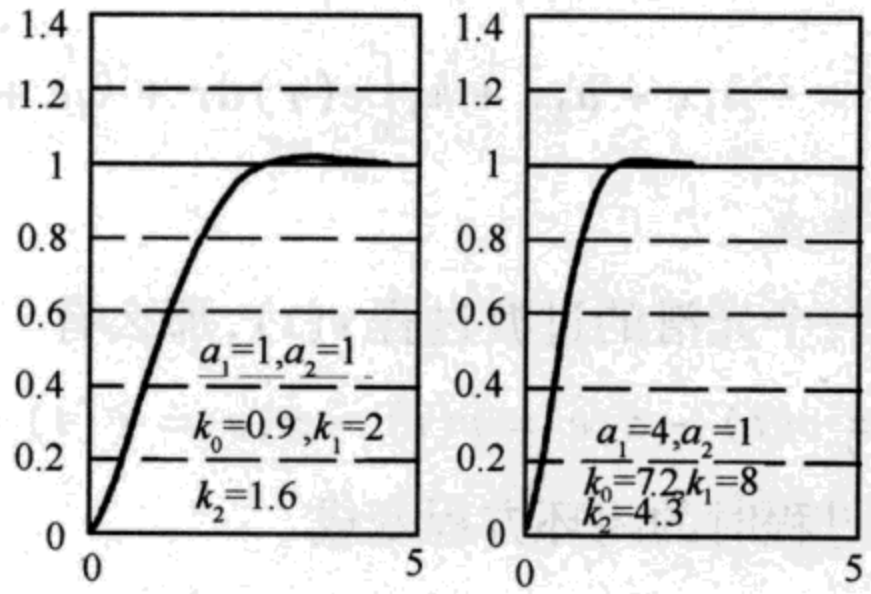


图 1.5.4

上述讨论说明，如果我们对一个标准系统($a_1 = 1$ 的系统)调好了 PID 增益 k_0^*，k_1^*，k_2^*，那么控制参数 a_1 确知的另一对象所需的P，I增益 k_0，k_1 可由公式(1.5.14)确定，而D的增益 k_2 则参考公式(1.5.16)来进行调整.

当然，这种做法只能用于参数 a_1 确知的情形. 如果对参数 a_1

的估计有误差,那么按上述方式确定的 PID 增益,使闭环的过渡过程将会变形,即这种做法对参数 a_1 的估计误差很敏感.

然而,如果我们在安排过渡过程的基础上运用这种时间尺度变换的办法,那么对对象参数的认知程度就大为宽松了.

原先对二阶系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_1 x - a_2 \dot{x} + u \\ y = x \end{cases} \tag{1.5.17}$$

施加 PID 控制律所得的闭环系统为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_1 x - a_2 \dot{x} + k_0 \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + k_1 e + k_2 \dot{e} \\ y = x \end{cases}$$

如果事先安排一个光滑的过渡过程 $v(t)$,那么有

$$e = v(t) - x, \dot{e} = \dot{v}(t) - \dot{x}, \ddot{e} = \ddot{v}(t) - \ddot{x} \tag{1.5.18}$$

于是安排过渡过程时的闭环方程变成

$$\begin{cases} \ddot{e} = -(a_1 + k_1)e - (a_2 + k_2)\dot{e} - k_0 \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + \\ \qquad \ddot{v}(t) + a_1 v(t) + a_2 \dot{v}(t) \\ y = v(t) - e \end{cases}$$

今记

$$e_0 = \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau, e_1 = e, e_2 = \dot{e},$$

$$w(t) = \ddot{v}(t) + a_1 v(t) + a_2 \dot{v}(t) \tag{1.5.19}$$

$$\begin{cases} \dot{e}_0 = e_1, & e_0(0) = 0 \\ \dot{e}_1 = e_2, & e_1(0) = 0 \\ \dot{e}_2 = -k_0 e_0 - (a_1 + k_1)e_1 - (a_2 + k_2)e_2 + w(t), & e_2(0) = 0 \\ y = v(t) - e_1 \end{cases} \tag{1.5.20}$$

今取安排的过渡过程为如下函数(见式(1.4.7))

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{2}\left(1 + \sin\left(\pi\left(\dfrac{t}{T_0} - \dfrac{1}{2}\right)\right)\right), & t \leqslant T_0 \\ v_0, & t > T_0 \end{cases}$$

其一阶,二阶导数为

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0}{2}\dfrac{\pi}{T_0}\cos\left(\pi\left(\dfrac{t}{T_0} - \dfrac{1}{2}\right)\right), & t \leqslant T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$$

$$\ddot{v}(t) = \begin{cases} -\dfrac{v_0}{2}\left(\dfrac{\pi}{T_0}\right)^2\sin\left(\pi\left(\dfrac{t}{T_0} - \dfrac{1}{2}\right)\right), & t \leqslant T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases}$$

把这些表达式代到方程(1.5.20)中,就可以做仿真对比了.

现在取对象(1.5.17)的参数为 $a_1 = 1, a_2 = 1$(是“标准”对象),设定值为 $v_0 = 1$,而安排的过渡过程时间为 $T_0 = 2$. PID 控制律增益分别取

$$k_0 = 50, k_1 = 50, k_2 = 50;$$

$$k_0 = 30, k_1 = 30, k_2 = 30;$$

$$k_0 = 70, k_1 = 70, k_2 = 70$$

所作的仿真结果示于图 1.5.5.

这个仿真结果说明,安排了过渡过程之后:

(1) 由于“误差”本身很小,PID 的增益都可以取比较大的值.

(2) 对给定的对象来说,保证过渡过程品质的 PID 增益的允许范围很大.

(3) 对给定的 PID 增益来说,它所能控制的对象范围很大.

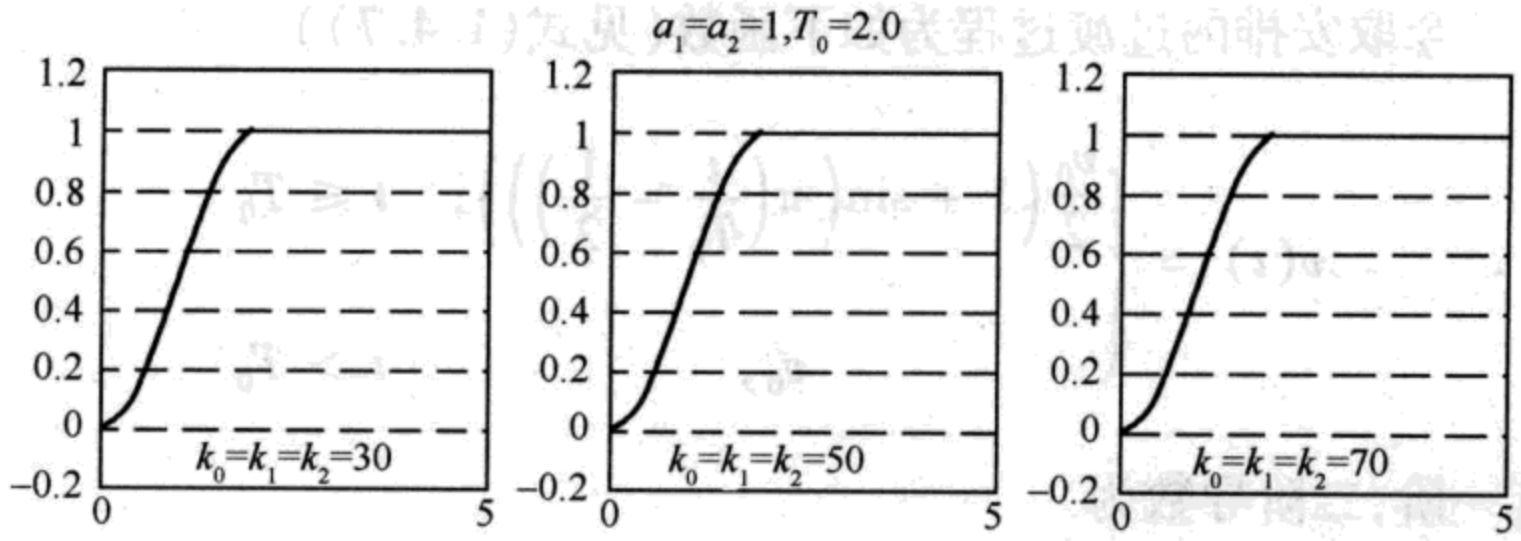


图 1.5.5

在上述例子中,对给定的对象参数 $a_1 = 1, a_2 = 1$ 来说,PID 增益 k_i 可取 $|k_i - 50| \leqslant 20$ 范围的值,而给定的 PID 增益 $k_0 = k_1 = k_2 = 50$,却都能控制满足 $|a_1 - 1| \leqslant 20, |a_2 - 1| \leqslant 20$ 的参数所代表的对象. 尽管参数 $a_1 = 1$ 的对象和 $a_1 = 20$ 的对象,其时间尺度相差 $\sqrt{20} \approx 4.47$ 倍,但可以用同一个 PID 增益 $k_0 = k_1 = k_2 = 50$ 来实现 $T_0 = 2$ 的过渡过程.

如果把 $k_0^* = k_1^* = k_2^* = 50$ 作为标准 PID 增益,那么控制以 $a_1 = 20$ 为参数的对象所需要的 PID 增益 k_0, k_1, k_2,是用时间尺度 $\rho = 1/\sqrt{20} = 0.2236$,按公式(1.5.14)计算得到

$$k_0 = 50/\rho^3 = 4472, k_1 = 50/\rho^2 = 1000,$$

$$k_2 = 50/\rho = 223.6$$

当然,这组增益能更好地跟踪前面安排的 $T_0 = 2$ 的过渡过程. 以 $a_1 = 20$ 为参数的系统具有快速响应的能力,对这个系统来说,$T_0 = 2$ 的过渡过程是很慢的过程了. 由于 $a_1 = 20$ 代表的系统时间 t 和把它化成标准系统的时间 τ 之间有关系 $t = \rho\tau$,因此相当于标准系统 $T_0 = 2$ 的过渡过程,在 t 时间尺度上应该是 $T_0 = \rho \times 2 = 2/\sqrt{20} = 0.447$,即新的增益能控制 $a_1 = 20$ 的对象应该很好地跟踪 $T_0 = 0.447$ 的过渡过程(图 1.5.6).

如果没有安排过渡过程,做时间尺度变换时,需要适当调整微分增益 k_2 来匹配阻尼项系数. 然而,事先安排了适当的过渡过程,就把标准系统的增益 k_i^* 按时间尺度转换过来就可以用了,不必再

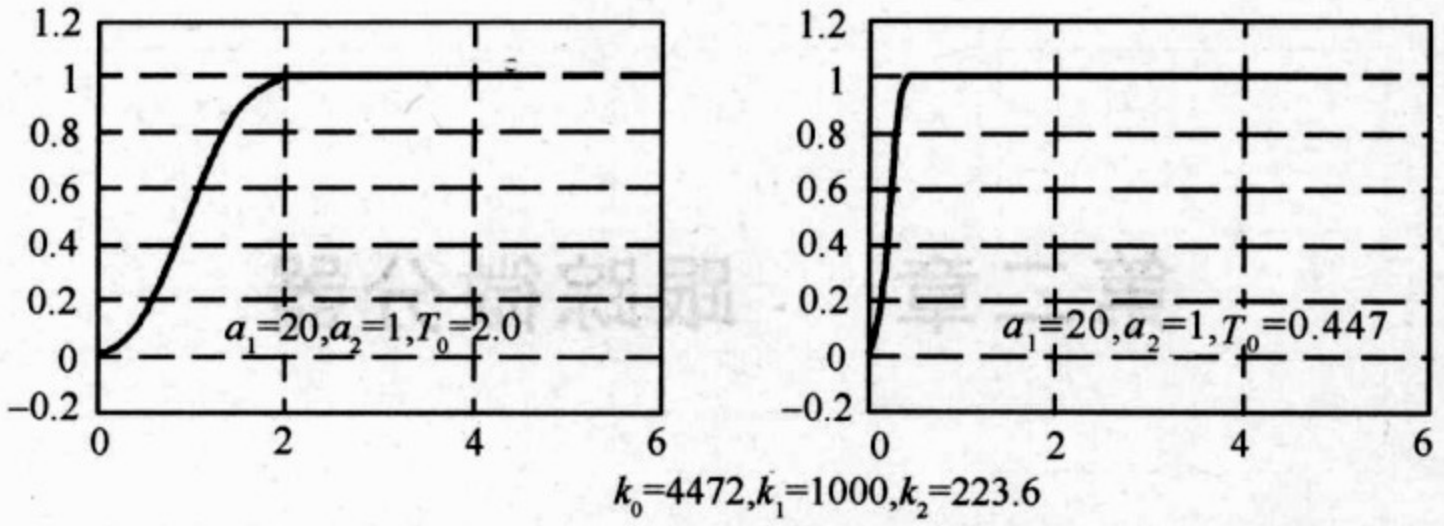


图 1.5.6

去调整微分增益了．事先安排过渡过程，对对象时间尺度的估计并不需要那么精确，只做数量级的估计就可以了．

这就是“时间尺度”概念的用处．当然对一般的系统，特别对非线性对象如何定义“时间尺度”是需要进一步探讨的问题．

第二章　跟踪微分器

本章将讨论从被噪声污染的信号中合理提取微分信号的问题. 先分析经典微分器的数学含义及其噪声放大的根本原因,然后提出能克服噪声放大效应的二阶及高阶微分环节. 实际上,微分信号是尽快地跟踪给定信号的方式提炼的,因此本章将提出最快地跟踪给定信号的办法来提取微分信号的非线性最速跟踪微分器和相应的一般理论. 为了避免数字计算中高频颤振的出现,给出了最速跟踪微分器的离散形式和它的频率特性,然后介绍跟踪微分器在各种不同问题上的应用.

2.1　小时间常数惯性环节

下面考察小时间常数一阶惯性环节的一个典型性质.

一阶惯性环节的传递函数为

$$y = w(s)u = \frac{k}{Ts+1}u \tag{2.1.1}$$

式中:k 为系统放大系数;T 为时间常数.

记 $\alpha = \frac{1}{T}$,则

$$y = \frac{\alpha k}{s+\alpha}u \tag{2.1.2}$$

则传递函数(2.1.1) 的状态空间实现为

$$\dot{y} = -\alpha(y - ku(t)) \tag{2.1.3}$$

当 $u(t) \equiv 1$,初值为 $y(0) = 0$ 时的解 $y(t)$ 称为此系统的阶跃响

应. 这个阶跃响应(即系统(2.1.3) 的解) 的表达式为

$$y(t) = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\alpha k u(\tau)\,d\tau = \alpha k e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}\,d\tau = k(1 - e^{-\alpha t}) \tag{2.1.4}$$

图 2.1.1 显示的是 $k = 2$,而 α 取三个不同值 $\alpha = 1, \alpha = 2, \alpha = 0.5$ 时的阶跃响应曲线.

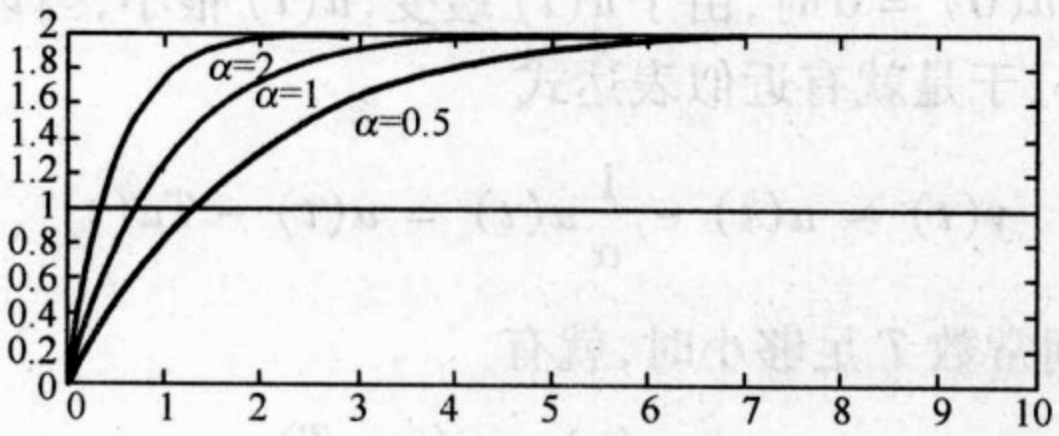


图 2.1.1

从图2.1.1 中看出,放大系数 k 是系统输出放大输入信号的倍数,而时间常数决定系统输出达到设定常值 2 的速度,因此时间常数越小,上升到 2 的速度越快. 根据阶跃响应的表达式(2.1.4),令 $t = T$,由于 $\alpha = \frac{1}{T}$,就得

$$y(T) = k(1 - e^{-1}) = k\left(1 - \frac{1}{e}\right) = k\left(1 - \frac{1}{2.718}\right) \approx 0.63k$$

于是时间常数 T 是系统输出 y 从0 上升到目标值1 的63% 行程所需要的时间.

下面考察 $k = 1$,时间常数 T 很小,即 α 很大,输入 $u(t)$ 为缓变的时变函数时的近似解. 系统的解的表达式

$$y(t) = \alpha e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\zeta}u(\zeta)\,d\zeta$$

经过分部积分,得

$$y(t) = \alpha e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha\zeta}u(\zeta)\Big|_0^t - \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{\alpha\zeta}\dot{u}(\zeta)\,d\zeta\right) =$$

$$u(t) - e^{-\alpha t}u(0) - e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\zeta}\dot{u}(\zeta)\,d\zeta =$$

$$u(t) - e^{-\alpha t}u(0) - \frac{1}{\alpha}\left(\dot{u}(t) - e^{-\alpha t}\dot{u}(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\zeta}\ddot{u}(\zeta)d\zeta\right) =$$

$$u(t) - \frac{1}{\alpha}\dot{u}(t) + e^{-\alpha t}\left(u(0) - \frac{1}{\alpha}\ddot{u}(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{\alpha\zeta}\dddot{u}(\zeta)d\zeta\right)$$

当 $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ 时，由于 $u(t)$ 缓变，$\ddot{u}(t)$ 很小，当 t 足够大时，$e^{-\alpha t}$ 也很小，于是就有近似表达式

$$y(t) \approx u(t) - \frac{1}{\alpha}\dot{u}(t) = u(t) - T\dot{u}(t)$$

于是当时间常数 T 足够小时，就有

$$y(t) \approx u(t) - T\frac{u(t) - u(t-T)}{T} = u(t-T)$$

因此

$$y(t) \Rightarrow u(t-T)$$

这就是说，当方程

$$\dot{y} = -\frac{1}{T}(y - u(t)) = -\alpha(y - u(t))$$

或传递关系 $y = \dfrac{1}{Ts+1}u$ 中的输入项 $u(t)$ 的变化比较缓慢时，其解（系统输出）可近似地表示成

$$y(t) \approx u(t-T) \tag{2.1.5}$$

即系统的输出 $y(t)$ 将以时间常数 T 为延迟时间来跟踪输入信号 $u(t)$.

这个解的近似式也可以从另一角度直接得到. 实际上，上述惯性环节的传递函数，当时间常数 T 较小时，可近似成

$$\frac{1}{1+Ts} \approx e^{-Ts}$$

而表达式 $e^{-Ts}x$ 是变量 $x(t)$ 延时（时滞）T 时间的函数 $x(t-T)$ 的

拉普拉斯变换表达式,因此可以形象地推导出

$$y(t) = \frac{1}{Ts+1}u(t) \approx e^{-Ts}u(t) = u(t-T)$$

2.2 经典微分器

在经典调节理论中,对给定信号的微分信号是用如下微分环节

$$y = w(s)v = \frac{s}{Ts+1}v = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{1}{Ts+1}\right)v \qquad (2.2.1)$$

来得到的,式中 T 是比较小的时间常数.

这个微分环节可改写成

$$y = w(s)v = \frac{1}{T}\left(v - \frac{1}{Ts+1}v\right) \qquad (2.2.2)$$

这里右边括号内的第二项是时间常数为 T 的惯性环节,而第一项是把输入信号直接传递到输出的过程. 其等价的方块图如图 2.2.1 所示.

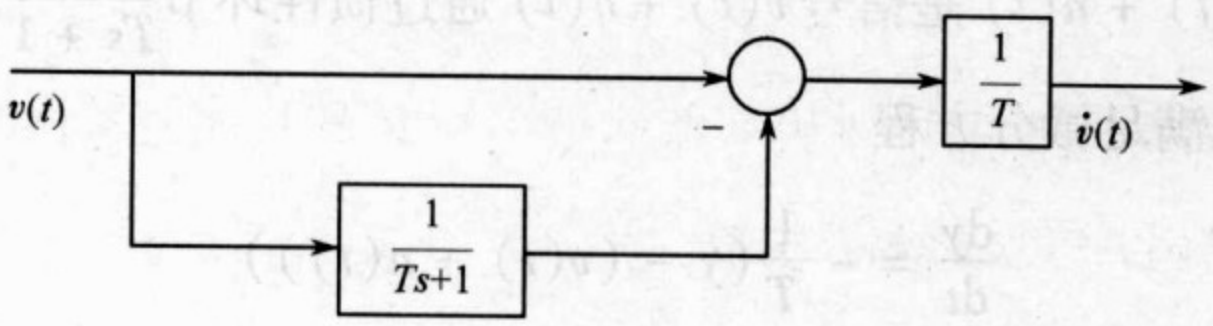


图 2.2.1

如果把第二项惯性环节的输出记做 $\bar{v}$,那么式(2.2.2)将满足等式

$$y(t) = \frac{1}{T}(v(t) - \bar{v}(t)) \qquad (2.2.3)$$

于是根据前一节的讨论,当输入信号 $v(t)$ 的变化比较缓慢而时间常数 T 较小时,就有近似关系

$$\bar{v}(t) \approx v(t-T)$$

因此由式(2.2.2),得

$$y(t) = \frac{1}{T}(v(t) - \bar{v}(t)) \approx \frac{1}{T}(v(t) - v(t-T)) \approx \dot{v}(t) \tag{2.2.4}$$

当然,时间常数 T 越小,输出 $y(t)$ 越接近微分 $\dot{v}(t)$. 这就是微分环节(2.2.1) 的数学含义.

可以说,这里的微分是用微分近似公式

$$\dot{v}(t) \approx \frac{v(t) - v(t-T)}{T} \tag{2.2.5}$$

来实现的. 式中的延迟信号 $v(t-T)$ 是通过惯性环节 $1/(Ts+1)$ 来实现. 这个惯性环节的时间常数越小,延迟信号 $v(t-T)$ 越接近 $v(t)$,从而微分的近似度也就越高.

但是,如果输入信号 $v(t)$ 被随机噪声 $n(t)$ 所污染,那么由式(2.2.2) 和式(2.2.3) 得到

$$y(t) = \frac{1}{\tau}(v(t) + n(t) - \overline{v(t) + n(t)}) \tag{2.2.6}$$

式中,$\overline{v(t) + n(t)}$ 是信号 $v(t) + n(t)$ 通过惯性环节 $\frac{1}{Ts+1}$ 所得信号,因此满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T}(y - (v(t) + n(t)))$$

这个方程有解的表达式为

$$y(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{T}(t-\zeta)}(v(\zeta) + n(\zeta))\mathrm{d}\zeta =$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{T}(t-\zeta)} v(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{T}(t-\zeta)} n(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

在这里,由于 $n(\zeta)$ 是均值为 0 的高频噪声,因此积分项 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{1}{T}(t-\zeta)} n(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 几乎等于零,右端积分只剩第一项

$\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{T}(t-\zeta)} v(\zeta)\,d\zeta \approx v(t-T)$. 由此等式(2.2.6) 变成

$$y(t) \approx \frac{1}{T}(v(t) + n(t) - v(t-T)) =$$

$$\frac{1}{T}(v(t) - v(t-T) + n(t)) \approx$$

$$\dot{v}(t) + \frac{1}{T}n(t) \tag{2.2.7}$$

即输出信号 $y(t)$ 是输入信号 $v(t)$ 的微分信号叠加上放大了 $1/T$ 倍的噪声信号,从而 T 越小,噪声放大越严重,完全可以淹没微分信号 $\dot{v}(t)$. 这就是经典微分环节(2.2.1) 的噪声放大效应.

为了消除或减弱噪声放大效应,把微分近似公式(2.2.5) 换成另一种微分近似公式

$$\dot{v}(t) \approx \frac{v(t-\tau_1) - v(t-\tau_2)}{\tau_2 - \tau_1}, 0 < \tau_1 < \tau_2 \tag{2.2.8}$$

而且延迟信号 $v(t-\tau_1)$ 和 $v(t-\tau_2)$ 分别将由惯性环节 $1/(\tau_1 s + 1)$ 和 $1/(\tau_2 s + 1)$ 来获取,那么可以降低噪声放大效应. 式(2.2.8) 的等价方框图为图2.2.2. 这个微分近似公式的传递函数为

$$y = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1}\left(\frac{1}{\tau_1 s + 1} - \frac{1}{\tau_2 s + 1}\right)v =$$

$$\frac{s}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}v \tag{2.2.9}$$

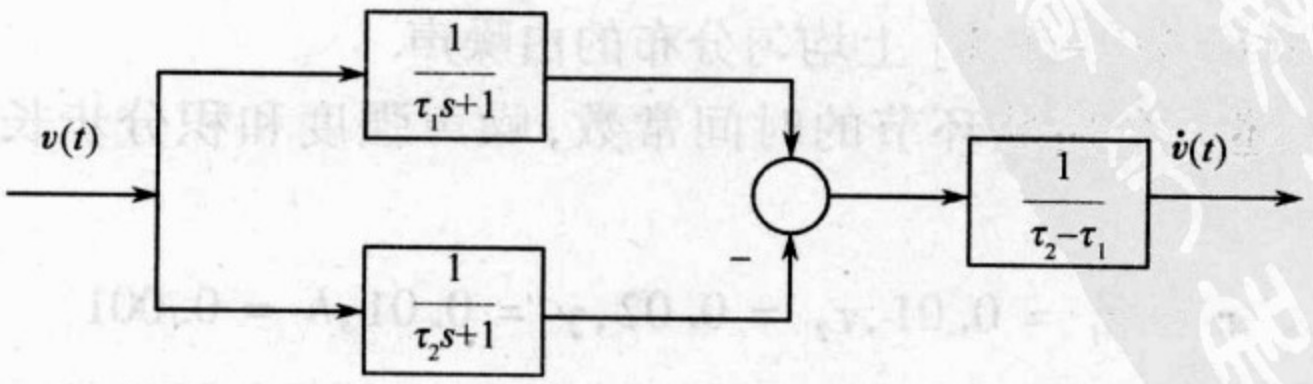


图 2.2.2

等价的状态变量实现为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{\tau_1\tau_2}(x_1 - v(t)) - \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \tag{2.2.10}$$

下面比较传递关系(2.2.2) 和(2.2.9) 确定的微分信号.

为了便于计算,把传递函数(2.2.2) 和(2.2.9) 相对应的时域方程分别离散化成

$$\begin{cases} \bar{v}(k+1) = \bar{v}(k) - h\dfrac{1}{T}(\bar{v}(k) - v(k)) \\ y_1(k) = \dfrac{1}{T}(v(k) - \bar{v}(k)) \end{cases} \tag{2.2.11}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - h\left(\dfrac{1}{\tau_1\tau_2}(x_1(k) - v(k)) + \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}x_2(k)\right) \\ y_2(k) = x_2(k) \end{cases} \tag{2.2.12}$$

式中:h 为积分步长;$x(k)$ 为函数 $x(t)$ 在 kh 时刻的值.

现在对这两个离散系统都输入被噪声污染的正弦信号

$$v(t) = \sin(t) + \gamma n(t) \tag{2.2.13}$$

式中:$n(t)$ 为[- 1,1] 上均匀分布的白噪声.

上述三个惯性环节的时间常数,噪声强度和积分步长分别取为

$$\tau = \tau_1 = 0.01, \tau_2 = 0.02, \gamma = 0.01, h = 0.001$$

图2.2.3 和图2.2.4 分别显示了方程(2.2.11) 和方程(2.2.12) 确定的微分信号.

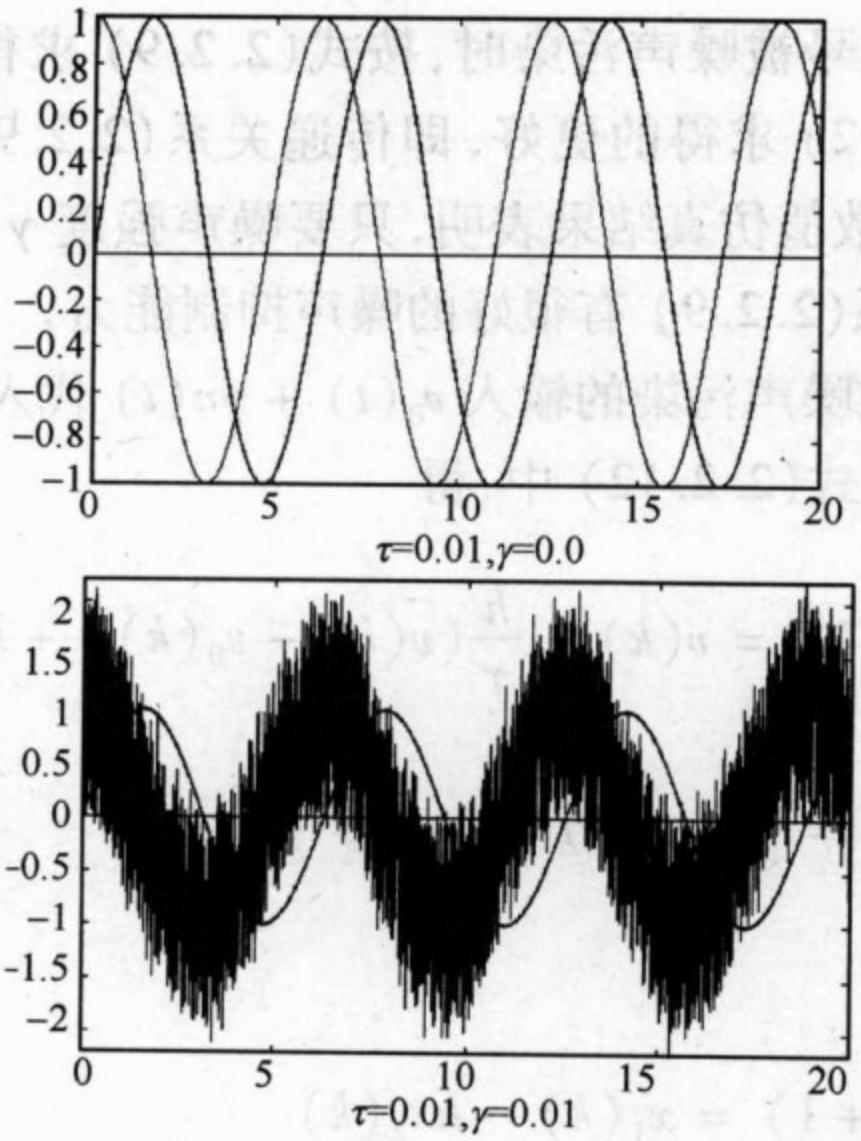

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
5
10
15
20
τ=0.01,γ=0.0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
−1
-1.5
−2
0
5
10
15
20
τ=0.01,γ=0.01

图 2. 2. 3

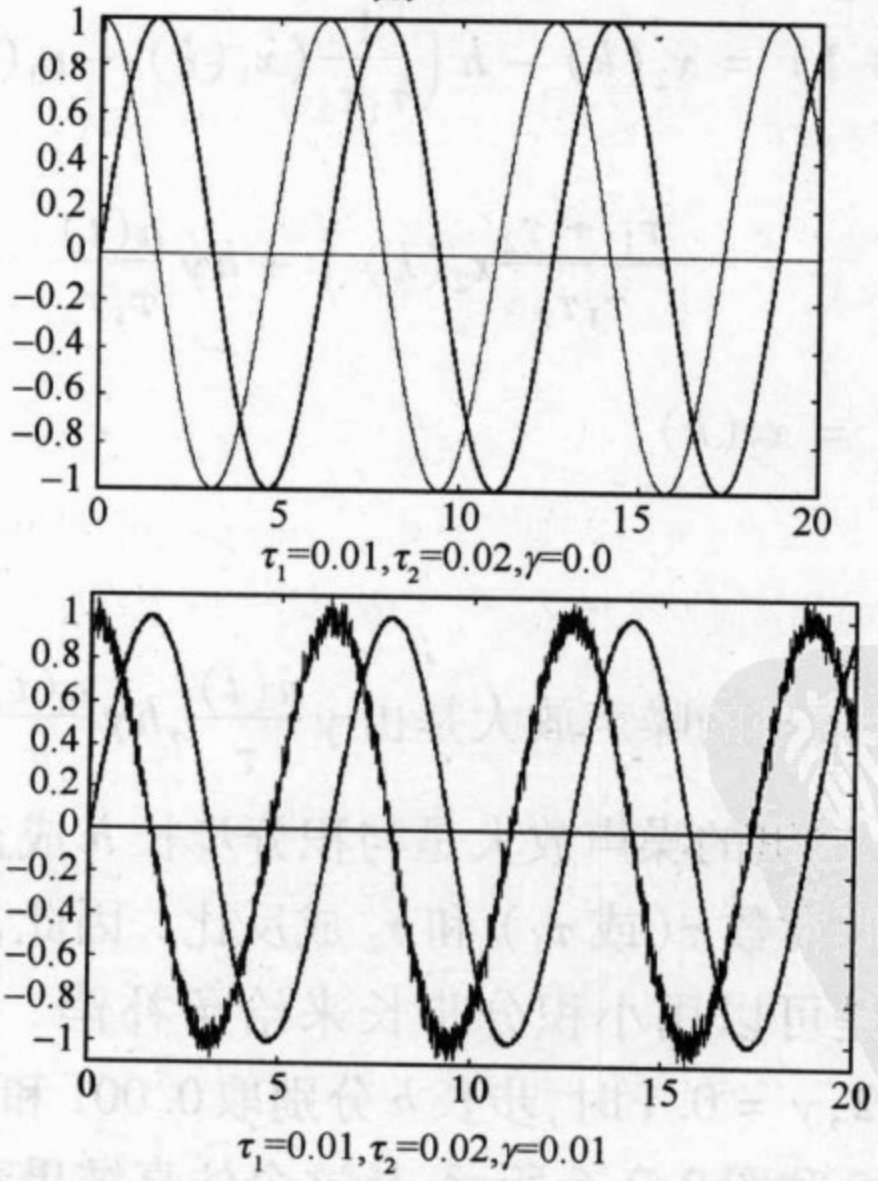

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
5
10
15
20
τ1=0.01,τ2=0.02,γ=0.0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
5
10
15
20
τ1=0.01,τ2=0.02,γ=0.01

图 2. 2. 4

显然,当信号被噪声污染时,按式(2.2.9)求得的微分信号,比起按式(2.2.2)求得的更好,即传递关系(2.2.9)有更好的噪声抑制能力. 数值仿真结果表明,只要噪声强度 γ 不超过时间常数 τ_1,传递关系(2.2.9)有很好的噪声抑制能力.

另外,把被噪声污染的输入 $v_0(t) + \gamma n(t)$ 代入数值计算公式(2.2.11)和公式(2.2.12)中,得

$$\begin{cases} \bar{v}(k+1) = \bar{v}(k) - \dfrac{h}{\tau}(\bar{v}(k) - v_0(k)) + h\gamma \dfrac{n(t)}{\tau} \\ y_1(k) = \dfrac{1}{\tau}(v_0(k) + \gamma n(k) - \bar{v}(k)) \end{cases} \tag{2.2.14}$$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - h\left(\dfrac{1}{\tau_1\tau_2}(x_1(k) - v_0(k)) - \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1\tau_2}x_2(k)\right) + h\gamma \dfrac{n(t)}{\tau_1\tau_2} \\ y_2(k) = x_2(k) \end{cases} \tag{2.2.15}$$

这里,近似微分信号的噪声放大是由 $\gamma\dfrac{n(t)}{\tau}$,$h\gamma\dfrac{n(t)}{\tau}$ 或 $h\gamma\dfrac{n(t)}{\tau_1\tau_2}$ 项决定的. 显然,这里的噪声放大是与积分步长 h 成正比,且与两个惯性环节的时间常数 τ(或 τ_1)和 τ_2 成反比. 因此,小时间常数的噪声放大作用是可以用小积分步长来给予补偿. 如,当取 $\tau_1 = 0.01$,$\tau_2 = 0.02$,$\gamma = 0.1$ 时,步长 h 分别取0.001和0.0001的仿真结果如图2.2.5和图2.2.6所示. 从这个仿真结果看,小积分步长计算的噪声抑制作用是很明显的.

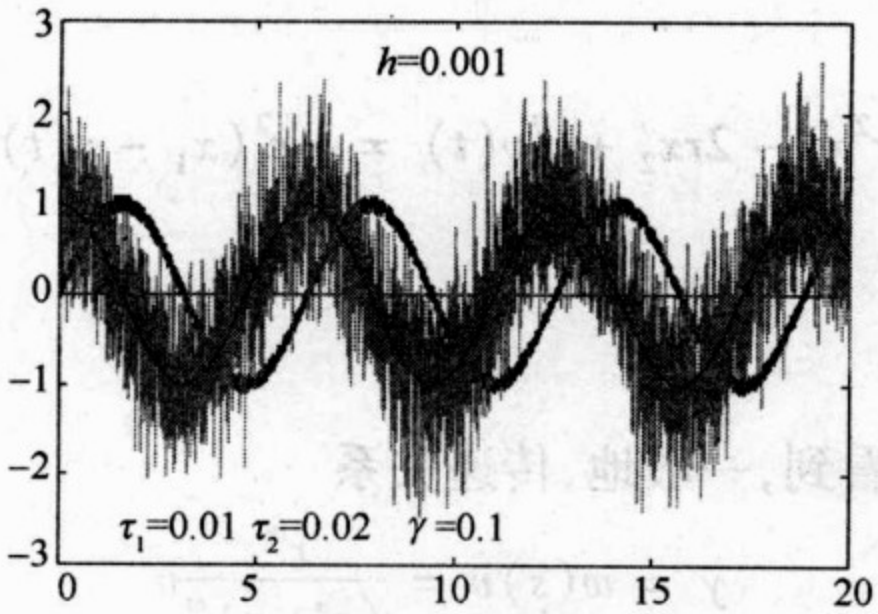


图 2.2.5

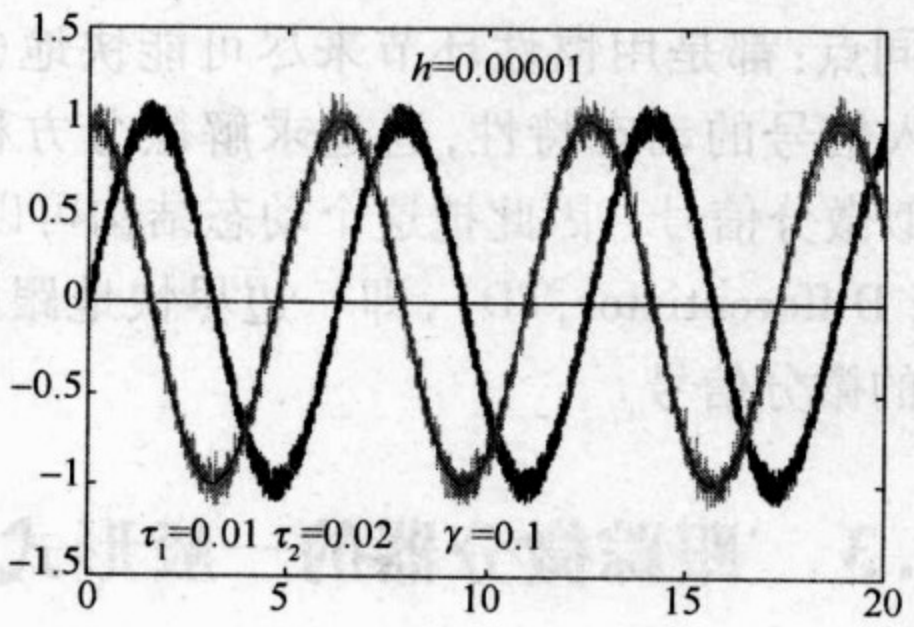


图 2.2.6

如果在传递函数(2.2.9) 中的时间常数 τ_1, τ_2 很接近常数 τ，那么传递函数(2.2.9) 可近似成

$$w(s) = \frac{s}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} \tag{2.2.16}$$

进一步记 $r = \frac{1}{\tau}$ 那么上式变成

$$w(s) = \frac{r^2 s}{s^2 + 2rs + r^2} = s\frac{r^2}{(s+r)^2} \tag{2.2.17}$$

其状态变量实现为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r^2 x_1 - 2r x_2 + r^2 v(t) = -r^2(x_1 - v(t)) - 2r x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \tag{2.2.18}$$

下一节我们将看到,一般地,传递关系

$$y = w(s)v = \frac{r^m}{(s+r)^m} v \tag{2.2.19}$$

当参数 r 适当大时具有很好的高阶微分功能.

传递函数(2.2.2),(2.2.9),(2.2.17) 及(2.2.19) 的微分作用都有一个共同点:都是用惯性环节来尽可能快地(取小的时间常数) 跟踪输入信号的动态特性,通过求解微分方程(即通过积分) 来获取近似微分信号. 因此把这个动态结构可以称做跟踪微分器(Tracking Differentiator,TD),即一边尽快地跟踪输入信号,同时给出近似的微分信号.

2.3 跟踪微分器的一般形式

经典微分环节是利用惯性环节有延迟地跟踪输入信号的性质,按近似微分公式

$$\dot{v}(t) \approx \frac{v(t) - v(t-\tau)}{\tau}$$

来构造的. 根据这个理解,我们给出了按近似微分公式

$$\dot{v}(t) \approx \frac{v(t-\tau_1) - v(t-\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2}$$

来实现的用两个惯性环节并联构成的微分器方案 —— 公式(2.2.12),公式(2.2.15).

已指出二阶传递函数

$$W(s) = \frac{r^2 s}{s^2 + 2r\xi s + r^2} \tag{2.3.1}$$

具有较好的微分功能. 这里有两个参数r,ξ. 这个传递函数代表的二阶线性系统的离散形式为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h(-r^2(x_1(k) - v_0(k)) - 2\xi r x_2(k)) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

取$\xi = 0.5, 1.0, 1.5, r = 1$时的阶跃响应如图 2.3.1 所示.

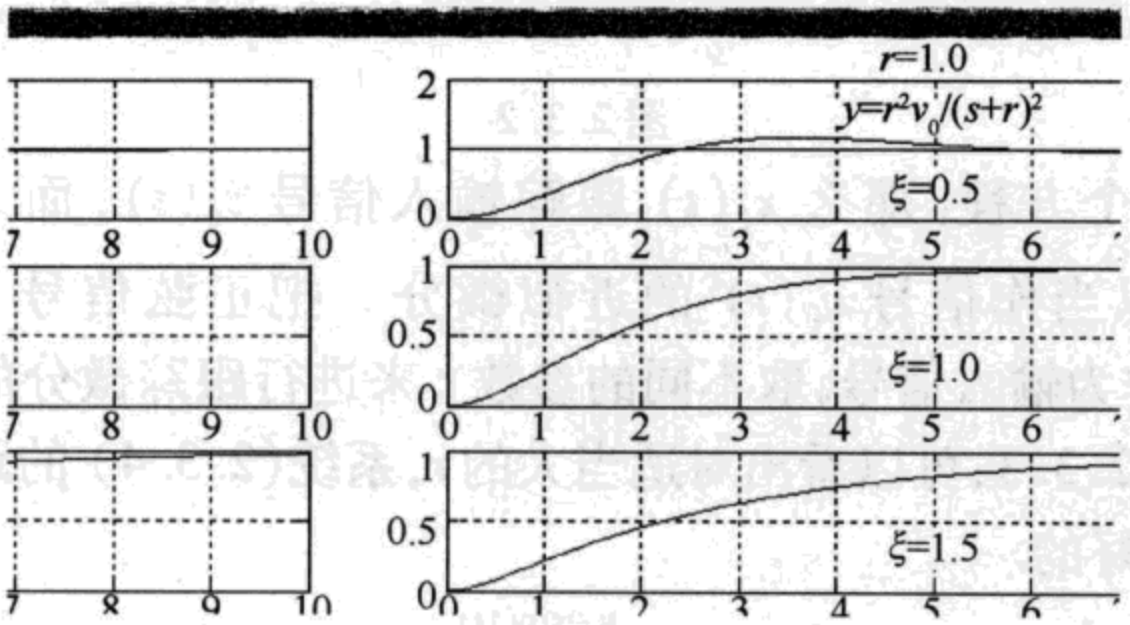


图 2.3.1

ξ作为阻尼因子,$\xi = 0.5$是缺阻尼,阶跃响应上升快,超调大,振荡多,$\xi = 1.5$是过阻尼,虽然无超调,但达到稳态值的时间过长,但是当$\xi = 1.0$时是几乎无超调地一次进入稳态值(图 2.3.1). 取别的r值也有同样的现象,因此传递函数

$$W(s) = \frac{r^2}{s^2 + 2rs + r^2} \tag{2.3.3}$$

的阶跃响应是二阶线性系统中无超调地一次达到设定值的系统,其中参数r越大,越快地达到设定值,因此参数r可以当作决定跟踪速度的速度因子. 系统(2.3.3)对不同参数$r = 1.0, 5.0, 20.0$时的仿真结果显示于图 2.3.2. 这里达到稳态值的时间几乎与参数r成反比. 可以利用这个性质来建立如下线性跟踪微分器

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h(-r^2(x_1(k) - v_0(k)) - 2r x_2(k)) \end{cases} \tag{2.3.4}$$

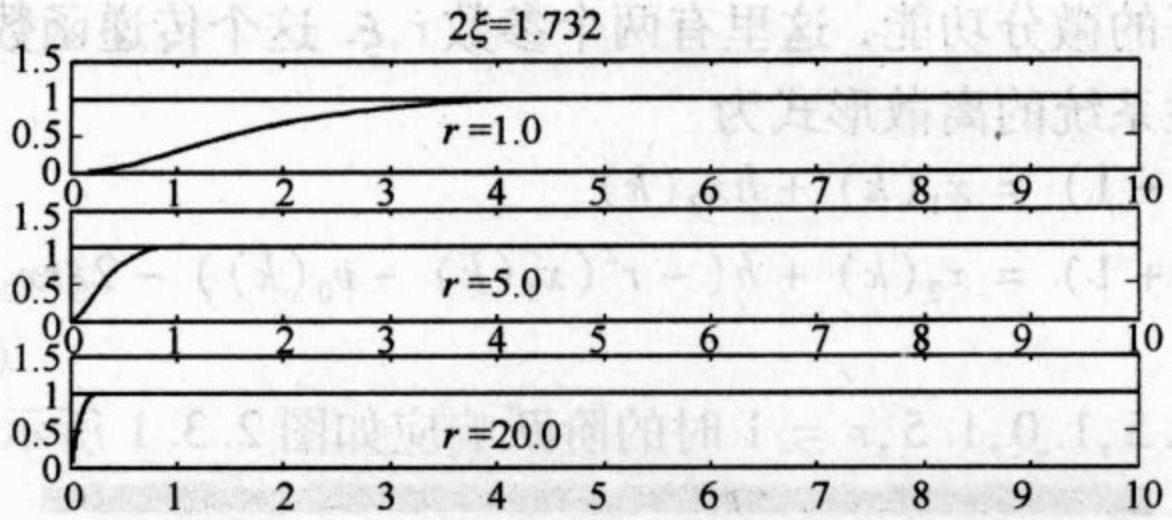


图 2.3.2

即解出这个方程，那么 $x_1(t)$ 跟踪输入信号 $v_0(t)$，而 $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ 可以当作信号 $v_0(t)$ 的近似微分．把正弦信号 $v_0(t) = \sin(4t)$ 作为输入信号，取不同的参数 r 来进行跟踪微分的仿真结果视于图 2.3.3，可以看出对适当大的 r，系统(2.3.4) 的跟踪微分效果是很好的.

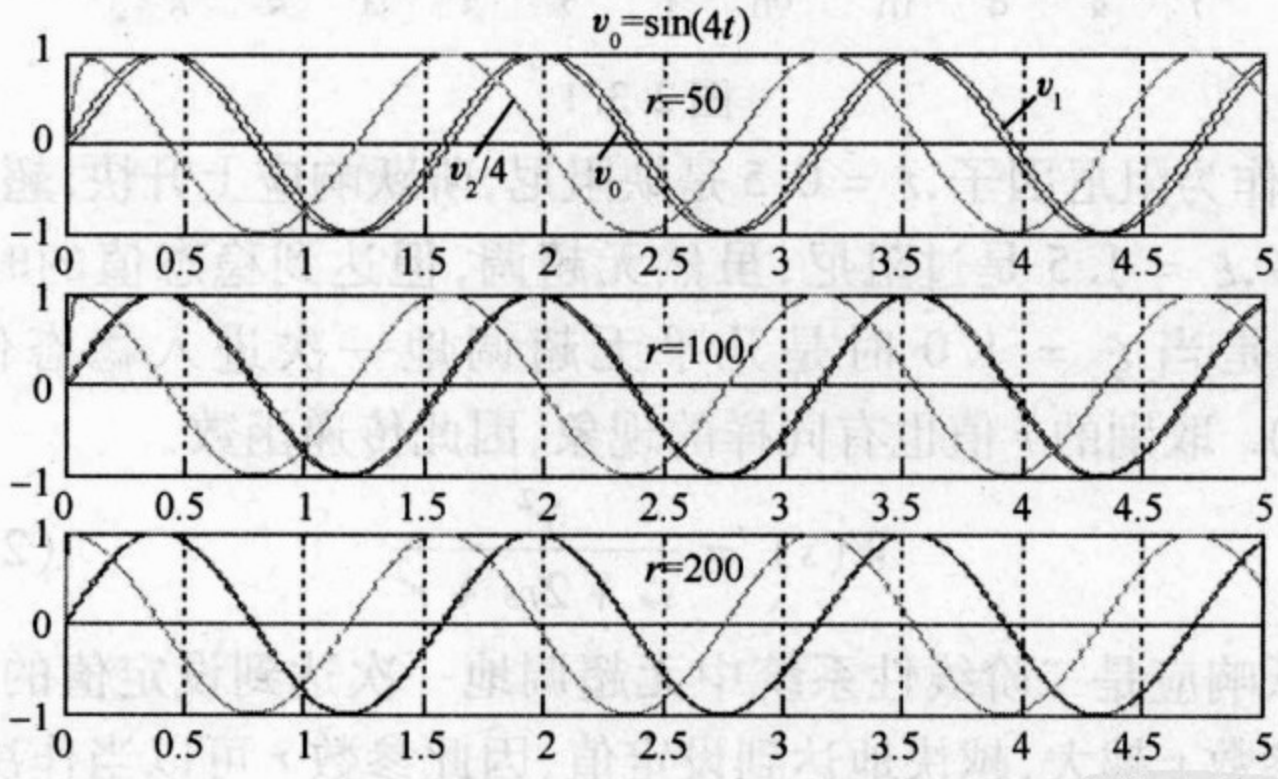


图 2.3.3

能否用最快地跟踪输入信号的动态环节来获取微分信号呢？我们知道，二阶积分器串联型系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \mid u \mid \leqslant r \end{cases} \tag{2.3.5}$$

以原点为终点的快速最优控制综合函数为

$$u(x_1,x_2) = -r\text{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \tag{2.3.6}$$

把这式代到式(2.3.5),得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \end{cases} \tag{2.3.7}$$

现在把第二式中的 x_1 改为 $x_1 - v_0(t)$,得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\text{sign}\left(x_1 - v_0(t) + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

这个系统的解的分量 $x_1(t)$,在加速度限制 $\mid \ddot{x}_1 \mid \leqslant r$ 之下,将最快地跟踪输入信号 $v_0(t)$,而且 r 越大,跟踪得越快. 显然,当 $x_1(t)$ 充分地接近 $v_0(t)$ 时,可以把解的另一分量 $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ 当做输入信号 $v_0(t)$ 的近似微分. 图2.3.4给出了以被噪声污染的正弦信号(2.2.13)为输入的仿真结果.

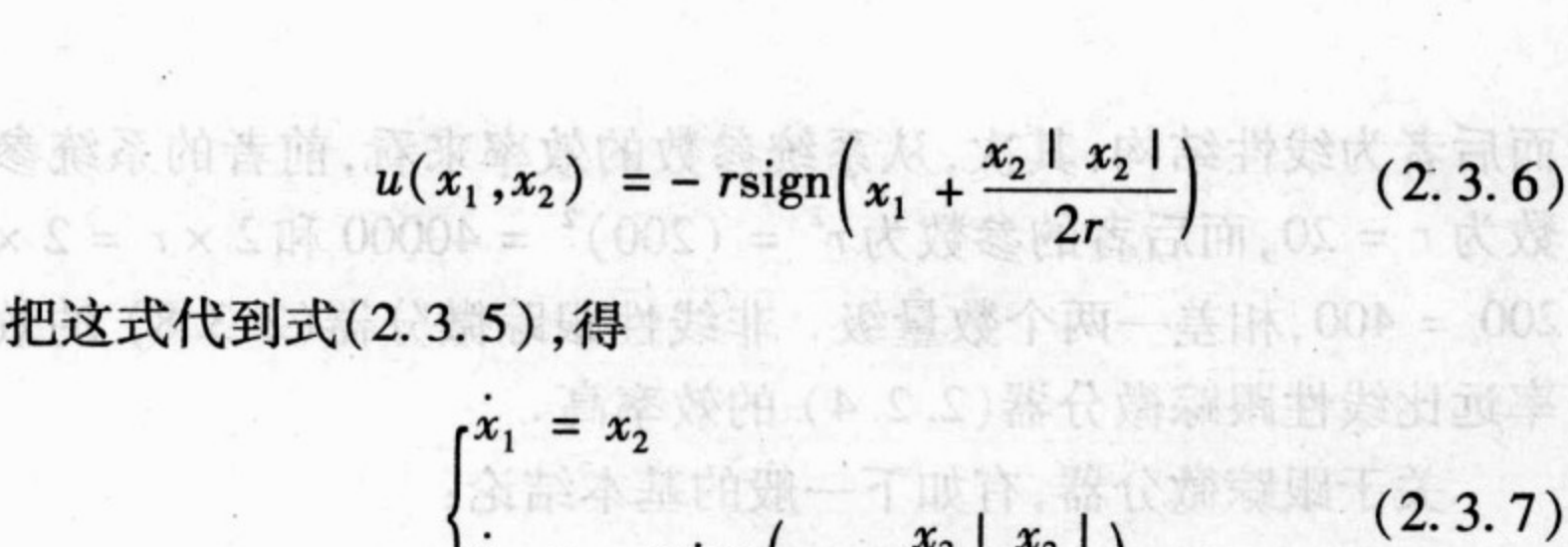


图 2.3.4

这个仿真结果与图2.2.2显示的仿真结果比较,无论是微分效果还是噪声抑制效应都是比较好的. 因此我们把系统(2.3.8)称为非线性跟踪微分器.

这个非线性跟踪微分器(2.3.8)与线性跟踪微分器(2.3.4)相比较,有很大的区别. 首先,它们在结构上,前者为非线性结构,

而后者为线性结构;其次,从系统参数的效率来看,前者的系统参数为 $r = 20$,而后者的参数为 $r^2 = (200)^2 = 40000$ 和 $2 \times r = 2 \times 200 = 400$,相差一两个数量级. 非线性跟踪微分器(2.3.8) 的效率远比线性跟踪微分器(2.2.4) 的效率高.

关于跟踪微分器,有如下一般的基本结论:

定理 1　设二阶微分方程

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = f(z_1, z_2) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

的所有解(按菲利波夫意义) 都有界且满足

$$\lim_{t\to\infty} z_1(t) = 0, \lim_{t\to\infty} z_2(t) = 0 \tag{2.3.10}$$

那么对任意有界可测信号 $v(t), t \in [0, \infty]$ 和任意 $T > 0$,微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = r^2 f\left(x_1 - v(t), \dfrac{x_2}{r}\right) \end{cases} \tag{2.3.11}$$

的解的第一个分量 $x_1(r,t)$,将满足

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^T | x_1(r,t) - v(t) | \, \mathrm{d}t = 0 \tag{2.3.12}$$

我们把系统(2.3.11) 称做系统(2.3.9) 派生的跟踪微分器.

在这个基本定理中并没有假定函数 $f(z_1, z_2)$ 的连续性,因此其解只能是菲利波夫意义下的.

这个定理的结论是说,随着参数 r 的增大,系统(2.3.12) 的解 $x_1(r,t)$,在任意有限时间内,都能充分地逼近输入信号 $v(t)$. 从而,直观上,可以把 $x_1(r,t)$ 的微分 $\dot{x}_1(r,t) = x_2(r,t)$ 当做输入信号 $v(t)$ 的微分信号.

实际上,如果我们把 $v(t)$ 和 $x_1(r,t), x_2(r,t)$ 都看成广义函数,那么从等式(2.3.12) 就能推出:$x_1(r,t)$ 的导数 $x_2(r,t)$ 弱收敛

于广义函数 $v(t)$ 的广义导数.

广义函数是普通函数概念的推广. 广义函数按广义导数的意义都是可微的. 在经典意义下的可微函数,其广义导数就是经典意义下的导数. 但是许多在经典意义下不可微的函数却有其广义导数. 对广义函数来说,其导数(微分) 运算是比较自由的. 阶跃函数,在初始时刻,按经典意义是不可微的,但其广义导数却是广义函数 —— 单位脉冲函数. 阶跃函数作为广义函数是可微的.

下面将给出跟踪微分器的其他基本定理和证明这些基本定理所需要的几个引理,它们的详细说明如下.

把定理 1 推广到高阶情形,有:

定理 2　设 n 系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = f(z_1, z_2, \cdots, z_n) \end{cases} \tag{2.3.13}$$

按菲利波夫意义有解,而且其所有解都满足

$$\lim_{t\to\infty} z_i(t) = 0, i = 1, \cdots, n$$

那么对任意局部可积信号 $v(t), t \in [0, \infty)$,和任意 $T > 0$,微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = r^n f\left(x_1 - v(t), \dfrac{x_2}{r}, \cdots, \dfrac{x_n}{r^{n-1}}\right) \end{cases} \tag{2.3.14}$$

的解的第一个分量 $x_1(r,t)$,将满足

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^T | x_1(r,t) - v(t) | \, dt = 0$$

这些基本定理的证明需要用到如下几个引理：

引理1　设 $x(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上定义的连续函数，满足

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \tag{2.3.15}$$

若令

$$z(r,\tau) = x(r\tau), r > 0$$

则对任意给定的 $T > 0$，都有

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^T | z(r,\tau) | \, d\tau = 0 \tag{2.3.16}$$

这个引理是说，如果 $x(t)$ 趋于零，那么足够压缩其时间尺度 $\tau = \frac{t}{r}, r > 1$，可以使它在有限时间区间上的积分值足够小.

例如，$x(t) = e^{-t}$ 是趋于零的函数. 现在把现时的时间 t 的尺度压缩 r 倍，即 $t = r\tau$，那么 $z(r,\tau) = x(r\tau) = e^{-r\tau}$. 显然 $z(r,\tau) = e^{-r\tau}$ 的收敛速度加快了很多，从而使它在有限区间上的积分值变的很小. 对 $\gamma = 1/2, 1, 2$ 的情形如图 2.3.5 所示.

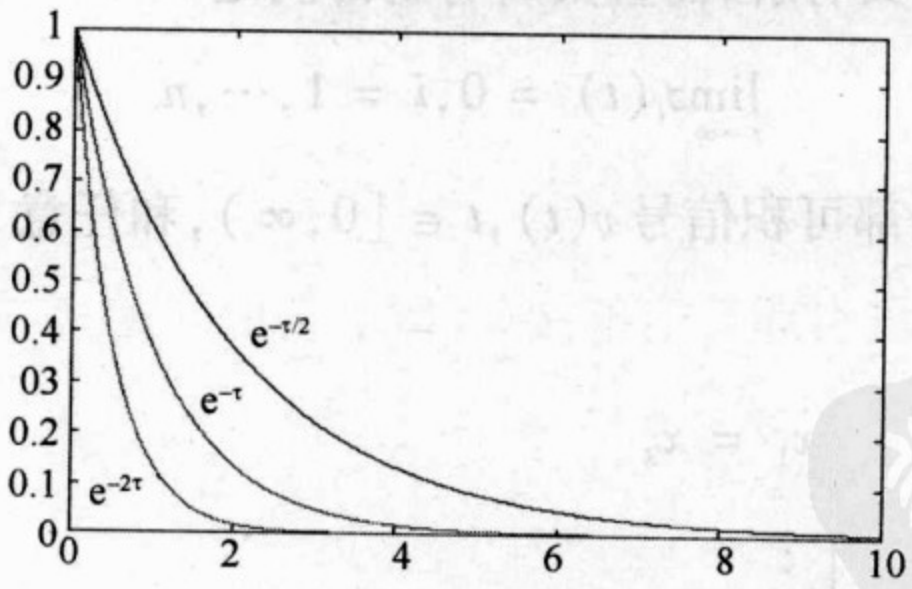


图 2.3.5

引理2　若系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.3.17}$$

的任意解都满足:$x_1(t)\to 0, x_2(t)\to 0(t\to 0)$,则对任意给定的常数 c,系统

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = z_2\\ \dot{z}_2 = r^2 f\left(z_1 - c, \dfrac{z_2}{r}\right)\end{cases} \tag{2.3.18}$$

的解 $z_1(r,t)$,对任意 $T>0$,都满足

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^T |\, z_1(r,\tau) - c\,|\, \mathrm{d}\tau = 0 \tag{2.3.19}$$

引理3　如果两个有界可积函数 $v(t)$ 和 $v'(t)$ 在任意有限区间上,按某种测度充分接近,如满足

$$\int_0^T |\, v(t) - v'(t)\,|\, \mathrm{d}t < \mathrm{e}^{L(1+T)T}\varepsilon/T, \forall\, T>0 \tag{2.3.20}$$

那么两个初值问题

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = f(x_1 - v(t), x_2)\end{cases},$$

$$\begin{cases}\dot{x}'_1 = x'_2, & x'_1(0) = x_1(0)\\ \dot{x}'_2 = f(x'_1 - v'(t), x'_2), & x'_2(0) = x_2(0)\end{cases} \tag{2.3.21}$$

的解 $x_1(t)$ 和 $x'_1(t)$ 将在这个区间上满足

$$\int_0^T |\, x_1(t) - x'_1(t)\,|\, \mathrm{d}t < \varepsilon$$

引理4　在引理3的条件下,两个初值问题

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = z_2, & z_1(0) = x_1^0\\ \dot{z}_2 = r^2 f\left(z_1 - v(t), \dfrac{z_2}{r}\right), & z_2(0) = rx_2^0\end{cases} \tag{2.3.22}$$

$$\begin{cases}\dot{z}'_1 = z'_2, & z'_1(0) = z_1(0)\\ \dot{z}'_2 = r^2 f\left(z'_1 - v'(t), \dfrac{z'_2}{r}\right), & z'_2(0) = z_2(0)\end{cases}$$

的解 $z_1(r,t)$ 和 $z_1'(r,t)$,对任意 $T>0$,将满足

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^T |\, z_1(r,t)-z_1'(r,t)\,|\,\mathrm{d}t=0$$

下面看看几个例子.

例 1 最速系统(2.3.8)和形如

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-\operatorname{sign}(x_1)\,|\,x_1\,|^{\alpha}-x_2\end{cases},0<\alpha<1 \quad (2.3.23)$$

的系统,都满足定理2的条件. 在前面已看到,最速系统(2.3.7)派生的系统(2.3.8)是一个很好的跟踪微分器. 同样,我们将看到,由系统(2.3.23)派生的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-r^2\operatorname{sign}(x_1-v(t))\,|\,x_1-v(t)\,|^{\alpha}-rx_2\end{cases} \quad (2.3.24)$$

也是一个不错的跟踪微分器. 把这个系统离散化成

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)+hx_2(k)\\ x_2(k+1)=x_2(k)-h(r^2\operatorname{sign}(x_1(k)-v(k))\,|\,x_1(k)-v(k)\,|^{\alpha}+rx_2(k))\end{cases} \quad (2.3.26)$$

输入被噪声污染的正弦信号:$v(t)=\sin(t)+\gamma n(t)$,并取步长为 $h=0.001$,噪声强度 γ 分别取 $\gamma=0.0$,$\gamma=0.1$ 时的仿真结果示于图 2.3.6. 从仿真结果看,无论是跟踪性能还是微分的滤波性能都是不错的.

积分步长的不同取法对滤波效果会有很大差异. h 分别取 $h=0.001$,$h=0.0001$ 时的仿真结果分别示于图 2.3.7. 实际上,在这里滤波效果是与采样步长 h 的开放成正比的.

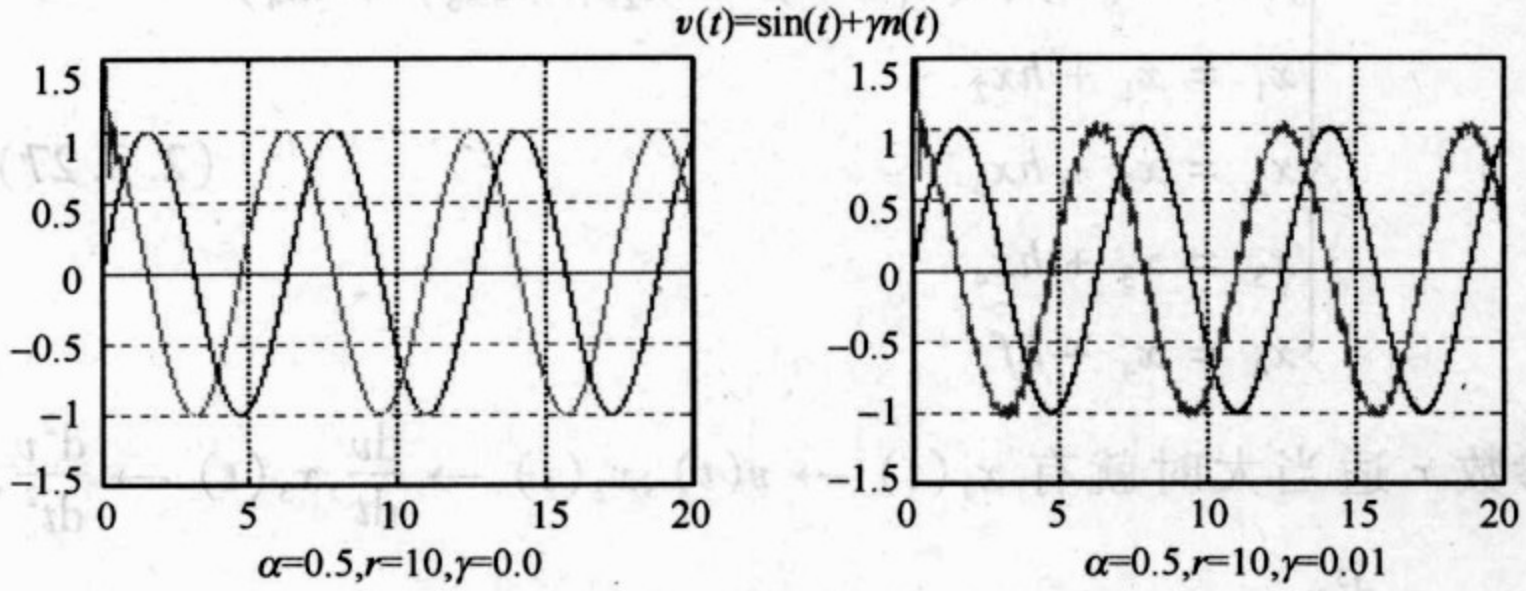


图 2.3.6

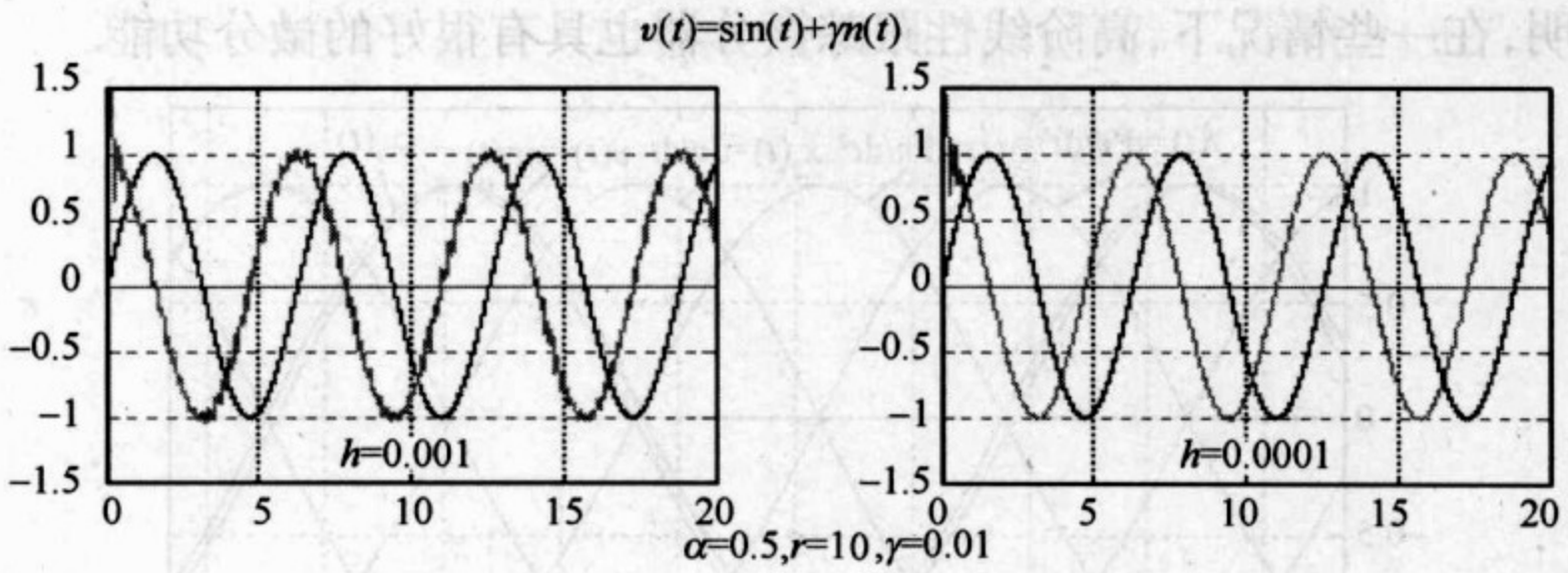


图 2.3.7

例 2　线性系统 $y = w(s) = \dfrac{r^4}{(s+r)^4} v$ 的状态变量实现为

$$\begin{cases} f = -r(r(r(r(x_1 - v) + 4x_2) + 6x_3) + 4x_4) \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f \end{cases} \tag{2.3.26}$$

离散化成

$$\begin{cases} f = -r(r(r(r(x_1 - v) + 4x_2) + 6x_3) + 4x_4) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + hx_3 \\ x_3 = x_3 + hx_4 \\ x_4 = x_4 + hf \end{cases} \tag{2.3.27}$$

参数 r 适当大时就有 $x_1(t) \to v(t), x_2(t) \to \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, x_3(t) \to \dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$, $f(t) \to \dfrac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}t^3}$. 采样步长取 $h = 0.01$,输入函数取 $v(t) = \sin(t)$,参数取 $r = 30$ 时的仿真结果如图 2.3.8 所示,各阶导数逼近的很好. 这说明,在一些情况下,高阶线性跟踪微分器也具有很好的微分功能.

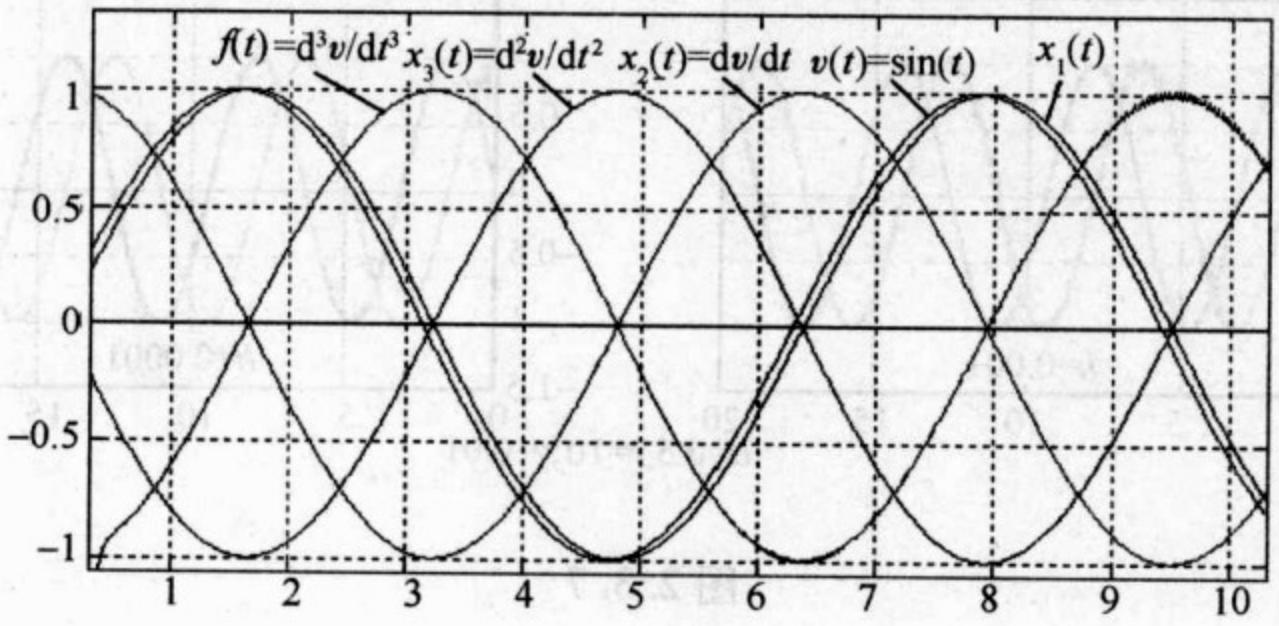


图 2.3.8

2.4 快速跟踪微分器的离散形式

大量的数值仿真研究表明,最速跟踪微分器(2.3.8),除微分功能外,还有许多很好的性能. 然而直接把它离散化成

$$\begin{cases} f = -r\mathrm{sign}\left(x_1(k) - v(k) + \dfrac{x_2(k) \mid x_2(k) \mid}{2r}\right) \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + hf \end{cases} \tag{2.4.1}$$

来进行数值计算,那么系统进入稳态后就会产生不能令人满意的高频颤振. 即使把符号函数 $\mathrm{sign}(x)$ 改成线性饱和函数 $\mathrm{sat}(x,d)$ (当 $|x| \leqslant d$ 时取 x/d),也不能避免高频颤振.

跟踪微分器(TD) 的微分效果是可以用阶跃响应来进行验证. 实际上,对 TD 输入常值 v_0,经过一段过渡过程以后,TD 将进入稳态. 这时,TD 的位置输出将跟上常值输入而不动,而速度输出作为位置输出的微分应该恒等于零. 但在许多情况下,进入稳态之后,速度输出很难精确地保持零.

在输入信号为常值情况下,如果一个 TD 能够较快地进入稳态,而且其速度输出又较快而精确地达到零,那么这种 TD 将给出品质较好的微分信号.

下面看看,对系统(2.4.1) 和其中的符号函数 $\mathrm{sign}(x)$ 改成线性饱和函数 $\mathrm{sat}(x,d)$ 的系统

$$\begin{cases} a = x_1(k) - v(k) + \dfrac{x_2(k)\,|\,x_2(k)\,|}{2r} \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) - hr\mathrm{sat}(a,d) \end{cases} \tag{2.4.2}$$

输入常值信号 $v(k) = v_0$ 时其数值积分所呈现的一些现象.

首先,在系统(2.4.1) 中的参数取 $r = 0.1$,对它输入阶跃信号 $v_0 = 1$,而积分步长分别取 $h = 0.01$ 和 $h = 0.001$ 时的数值积分结果. 在图 2.4.1 中显示的是阶跃响应和这个响应过程的微分(速度) 曲线. 从宏观上看,两种情形的阶跃响应都是 6s 进入稳态,而且过渡过程的速度曲线都是三角波. 但是进入稳态的时刻,两者是有一些差别的:前者有明显的振荡(图 2.4.1 左图),而后者几乎看不出振荡(图 2.4.1 右图). 然而,若把进入稳态后的速度曲线放大起来看,就能看出明显的高频振荡,如图 2.4.2 所示. 步长大,振荡幅度大,步长小,只是减小了振荡幅度. 由于符号函数 $\mathrm{sign}(a)$ 的作用,高频振荡不能完全消除.

能否把符号函数 $\mathrm{sign}(a)$ 改成线性饱和函数 $\mathrm{sat}(a,d)$ 的办法

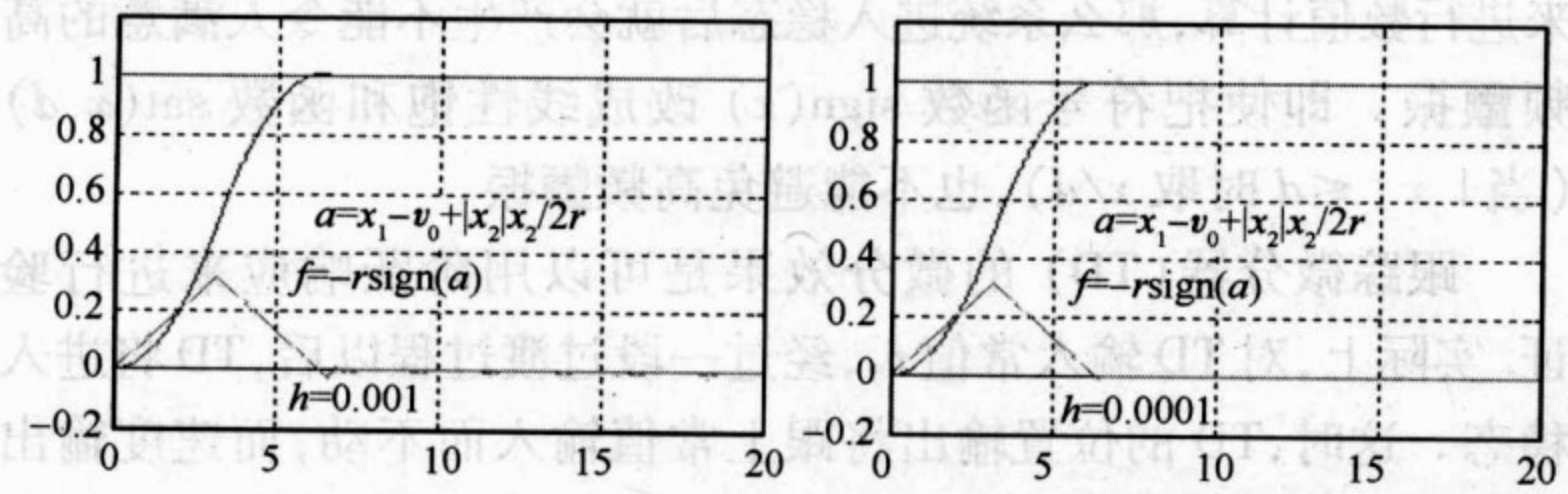


图 2.4.1

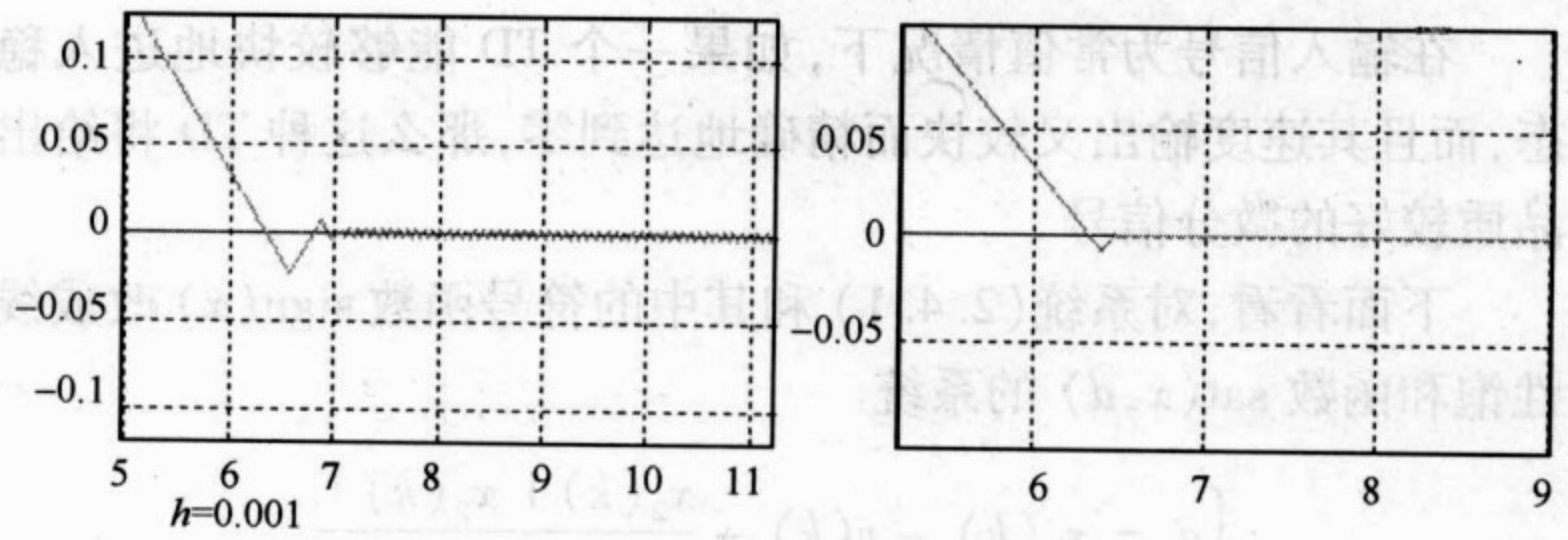


图 2.4.2

来消除这种高频振荡呢?图2.4.3显示的是把sign(a)改成sat(a,d)的系统(2.4.2)的阶跃响应和放大了的阶跃响应速度信号. 线性饱和函数sat(a,d)中线性区间d的加入也不能消除稳态时的速度信号振荡. 把符号函数简单地换成线性饱和函数并不能消除速度信号稳态时的高频振荡.

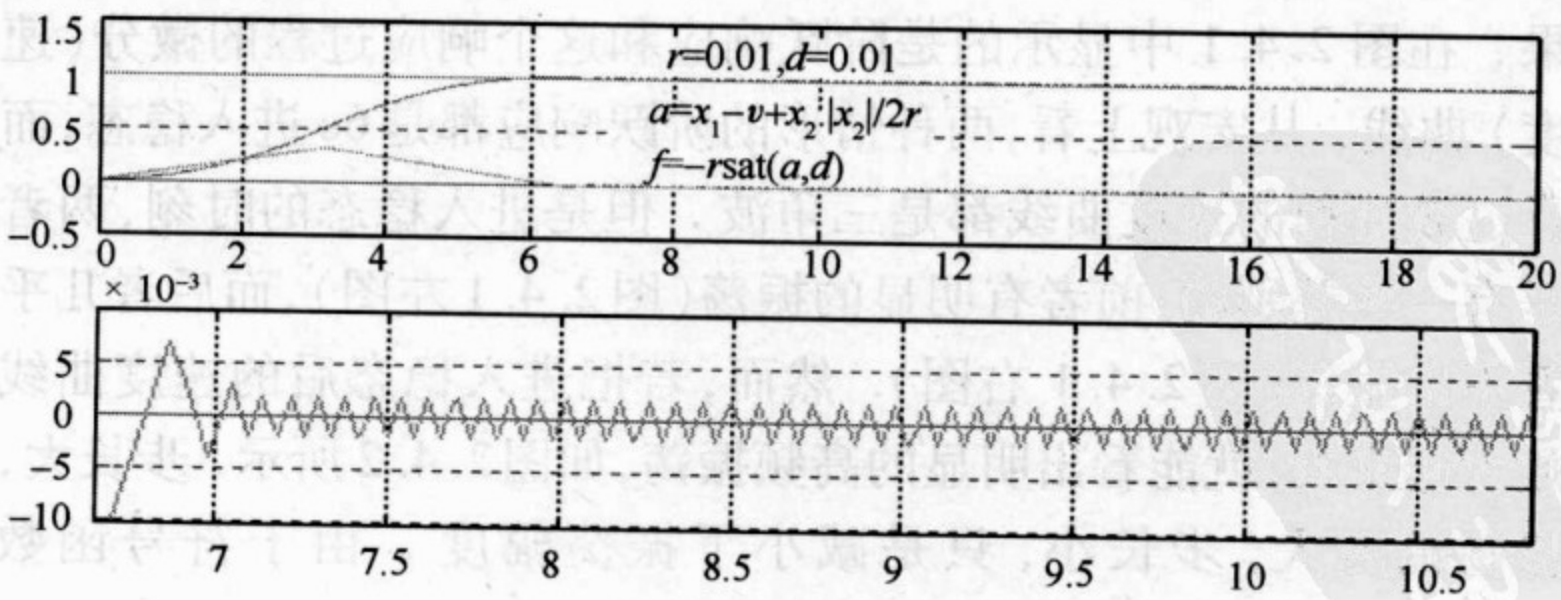


图 2.4.3

产生这些高频振荡的根本原因，无论是系统(2.4.1)还是系统(2.4.2)，都是不能以有限步到达设定值并停在那里．因为，尽管 $-r\mathrm{sign}\left(x_1+\dfrac{x_2\mid x_2\mid}{2r}\right)$ 是连续系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=u,\mid u\mid\leqslant r\end{cases}\tag{2.4.3}$$

从非零初值到达原点的最速控制综合函数，但是它和线性饱和函数 $-r\mathrm{sat}\left(x_1+\dfrac{x_2\mid x_2\mid}{2r},d\right)$ 都不是离散系统

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)+hx_2(k)\\ x_2(k+1)=x_2(k)+hu,\quad \mid u\mid\leqslant r\end{cases}\tag{2.4.4}$$

的最速控制综合函数．方程(2.4.3)的数值计算是用这种离散递推公式来进行的．

我们把离散系统(2.4.4)的最速控制综合函数记做 $\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h)$，其算法公式如下：

$$u=\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h):$$

$$\begin{cases}d=rh\\ d_0=hd\\ y=x_1+hx_2\\ a_0=\sqrt{d^2+8r\mid y\mid}\\ a=\begin{cases}x_2+\dfrac{(a_0-d)}{2}\mathrm{sign}(y), & \mid y\mid>d_0\\ x_2+\dfrac{y}{h}, & \mid y\mid\leqslant d_0\end{cases}\\ \mathrm{fhan}=-\begin{cases}r\,\mathrm{sign}(a), & \mid a\mid>d\\ r\dfrac{a}{d}, & \mid a\mid\leqslant d\end{cases}\end{cases}\tag{2.4.5}$$

这里有两个条件语句：$|y|<d_0$，$|y|\geqslant d_0$ 和 $|a|\leqslant d$，$|a|>d$. 利用符号函数的特性去掉这两个条件语句和适当的参数归化可推出如下等价的公式：

记

$$\mathrm{fsg}(x,d)=(\mathrm{sign}(x+d)-\mathrm{sign}(x-d))/2$$

那么 $u=\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h)$ 表示成

$$\begin{cases} d=rh^2 \\ a_0=hx_2 \\ y=x_1+a_0 \\ a_1=\sqrt{d(d+8|y|)} \\ a_2=a_0+\mathrm{sign}(y)(a_1-d)/2 \\ a=(a_0+y)\mathrm{fsg}(y,d)+a_2(1-\mathrm{fsg}(y,d)) \\ \mathrm{fhan}=-r\left(\dfrac{a}{d}\right)\mathrm{fsg}(a,d)-r\mathrm{sign}(a)(1-\mathrm{fsg}(a,d)) \end{cases} \tag{2.4.6}$$

这个计算公式的具体推导放在本书 2.7 小节中.

图 2.4.4 为函数 $x_3=\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h_1)$，当 $r=1$，$h_1=0.3$ 时的曲面图(a) 和等高线图(b).

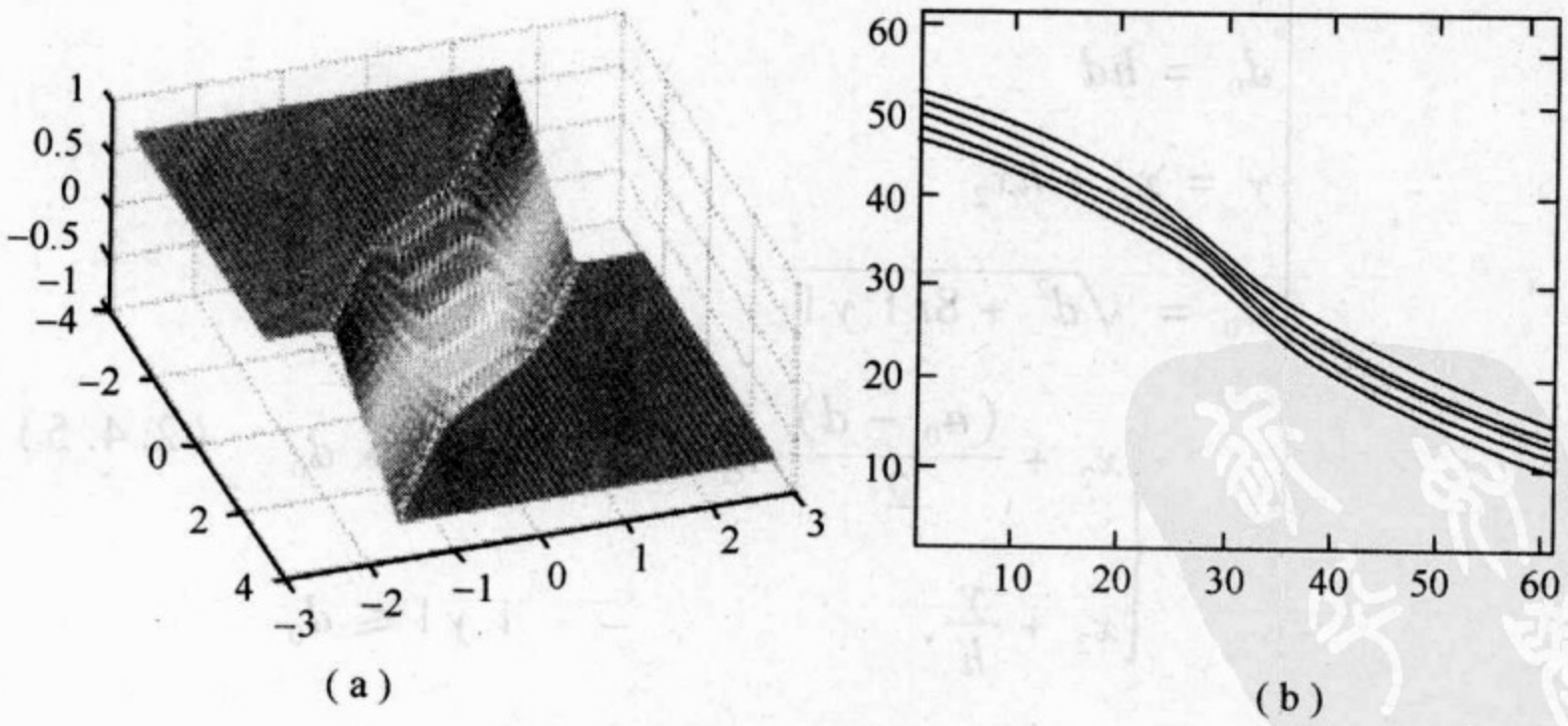


图 2.4.4

把函数 $u = \text{fhan}(x_1, x_2, r, h)$ 代到系统(2.4.4)中,得

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(x_1(k), x_2(k), r, h) \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h\text{fh} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

从非零初值出发,按这个差分方程递推,就能以有限步到达原点并停止不动.

现在用 $x_1(k) - v(k)$ 代替方程中的 $x_1(k)$,就得离散化的跟踪微分器

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(x_1(k) - v(k), x_2(k), r, h) \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h\text{fh} \end{cases} \tag{2.4.8}$$

我们把这个跟踪微分器称做快速离散系统(2.4.7)派生的最速离散跟踪微分器.

图 2.4.5(a)和图 2.4.5(b)分别是 $v = 1, r = 0.1$,而步长分别取 $h = 0.1, h = 0.001$ 时的系统(2.4.8)的阶跃响应曲线和放大了的速度曲线.

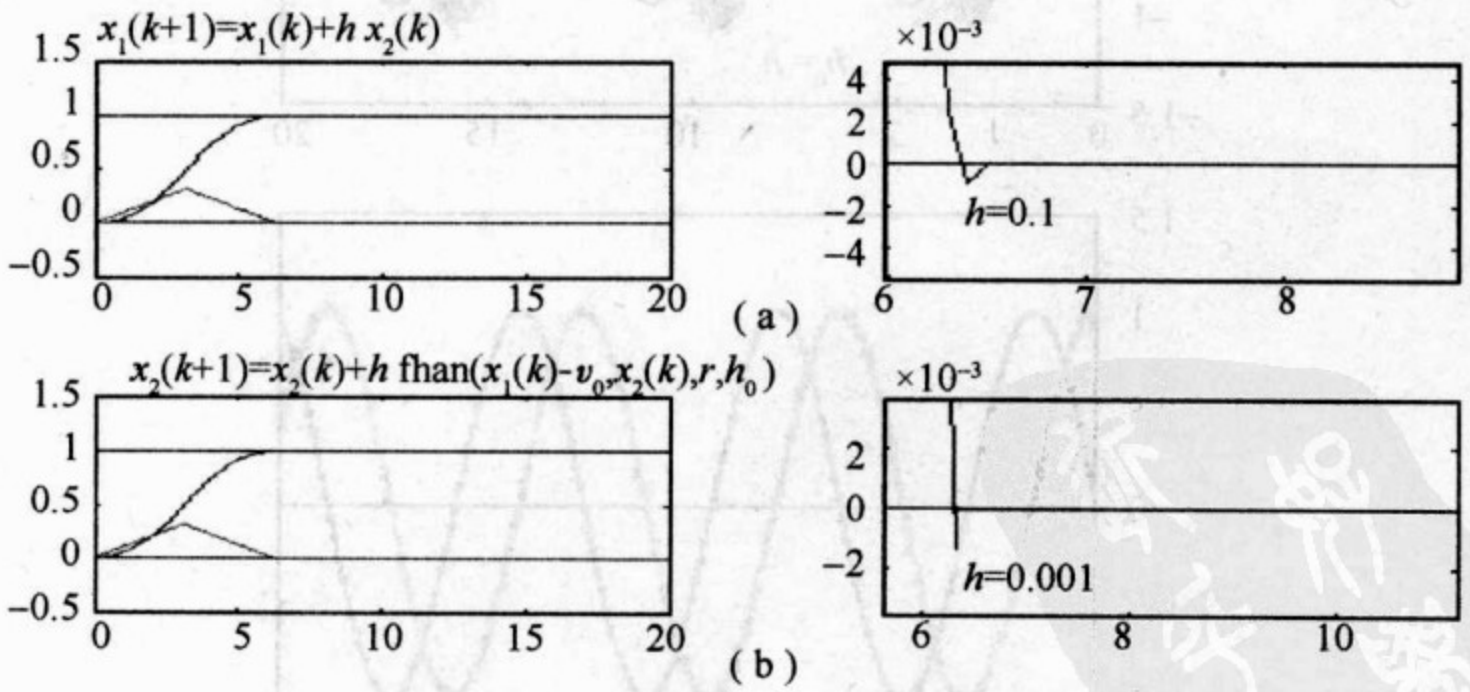


图 2.4.5

在放大了的速度曲线中再也没有出现高频振荡. 不过,进入稳态的时刻,速度曲线有一点超调现象. 当输入信号被噪声污染

时,这种超调现象就会加剧对微分信号的噪声放大效应. 但是,如果把函数 $\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h)$ 中的变量 h 改为与步长 h 独立的新变量 h_0,而取 h_0 为适当大于步长 h 的参数,那么就能消除速度曲线中的这种超调现象,从而能很好地抑制微分信号中的噪声放大. 把 fhan 中的 h 换成 h_0 得新的离散形式跟踪微分器

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(x_1(k) - v(t), x_2(k), r, h_0) \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{2.4.9}$$

现在对这个系统输入被噪声污染的正弦信号:$v(t) = \sin(t) + \gamma n(t)$,取 $r = 30, h = 0.001, \gamma = 0.01$,而 h_0 分别取 $h_0 = h, h_0 = 20h$ 时的仿真结果分别示于图 2.4.6.

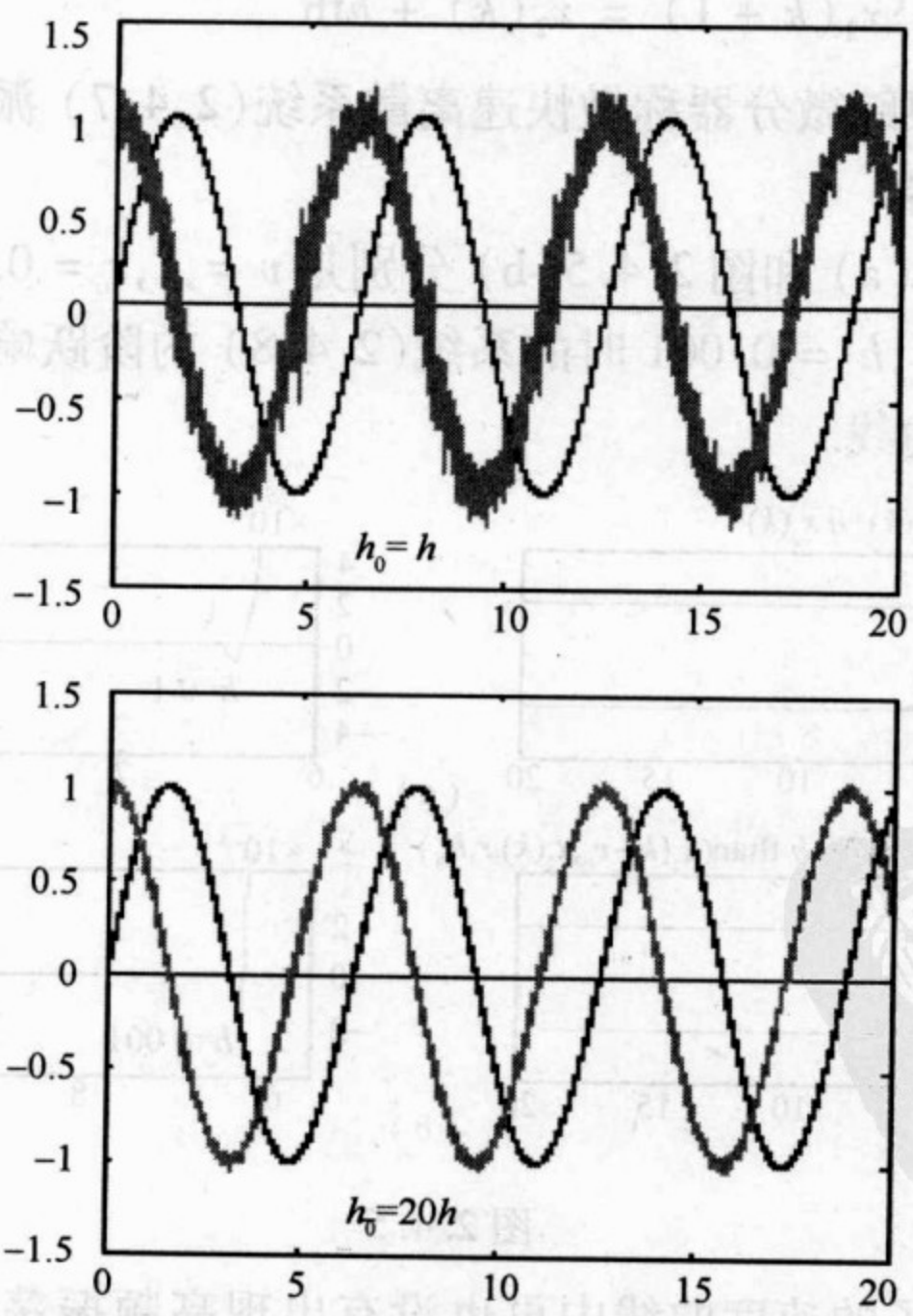


图 2.4.6

从这两个仿真结果明显看出,参数 h_0 的扩大起着很好的滤波作用,因此我们将把参数 h_0 称做跟踪微分器(2.4.9)的滤波因子.当然,在前面已指出,积分步长的缩小也对抑制噪声放大起很大作用,但是当积分步长确定时,扩大滤波因子是增强滤波效果的有效手段.

2.5 最速跟踪微分器的频率特性(带通滤波器)

2.5.1 TD 的频率特性

我们来考察 TD 对正弦信号 $v(t) = A\sin(\omega t)$ 的频率特性.

在 TD 中选定快速因子 r 之后,输入 $v(t) = A\sin(\omega t)$,有

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(x_1 - v, x_2, r, 2h) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + h\mathrm{fh} \\ y = x_1 \end{cases}$$

当此系统进入稳态时,其响应几乎稳定在 $y = A'\sin(\omega t + \varphi)$ 上.此系统的"幅频特性"是,输入 - 输出幅值的比值 A'/A 的对数值 $20\lg(A'/A)$ 随频率的对数值 $\lg(\omega)$ 逐步增大时的曲线,即曲线 $(x = \lg(\omega), y = 20\lg(A'/A))$. 而"相频特性"是输入 - 输出相移 φ 随 $\lg(\omega)$ 增大时的曲线,即曲线 $(x = \lg(\omega), y = \varphi)$. 这个系统的幅频、相频特性图如图 2.5.1 所示. 显然,"幅频特性"是两条直线所成的折线,而"相频特性"在转折频率(折线的连接点的频率)以下相移很小,但在转折频率附近,相移很快降到 $-180°$,这是一个很理想的相频特性. 为了得到跟踪微分器的对应于不同快速因子的频率特性,只需把某一频率特性图左右平移一下就可以(图 2.5.1).

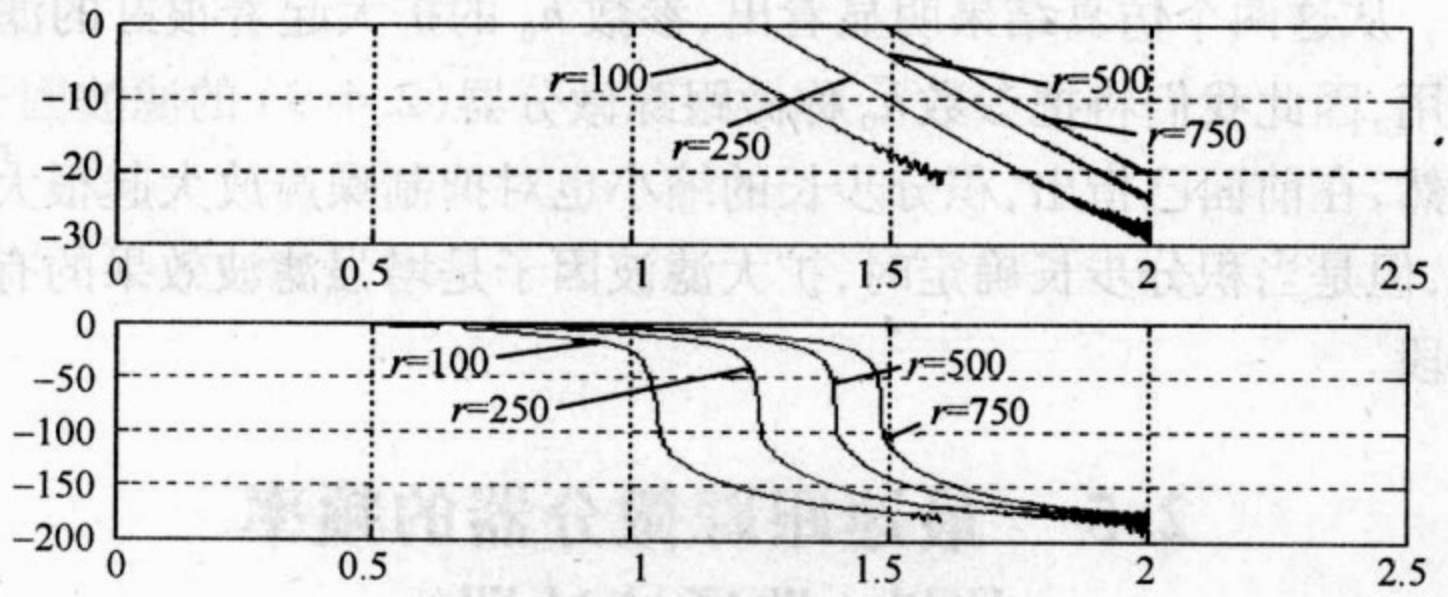


图 2.5.1

转折频率ω_0(也可以称作TD系统的带宽)与跟踪微分器的速度因子r之间关系基本上是

$$\omega_0 = 1.14\sqrt{r}$$

如果输入信号的幅值A取不同值,则对应的"幅频特性"将沿折线的下降段方向平移,其高度是输入幅值A的$20\lg(A)$,而"相频特性"则向左右平移就可以了(图 2.5.2).

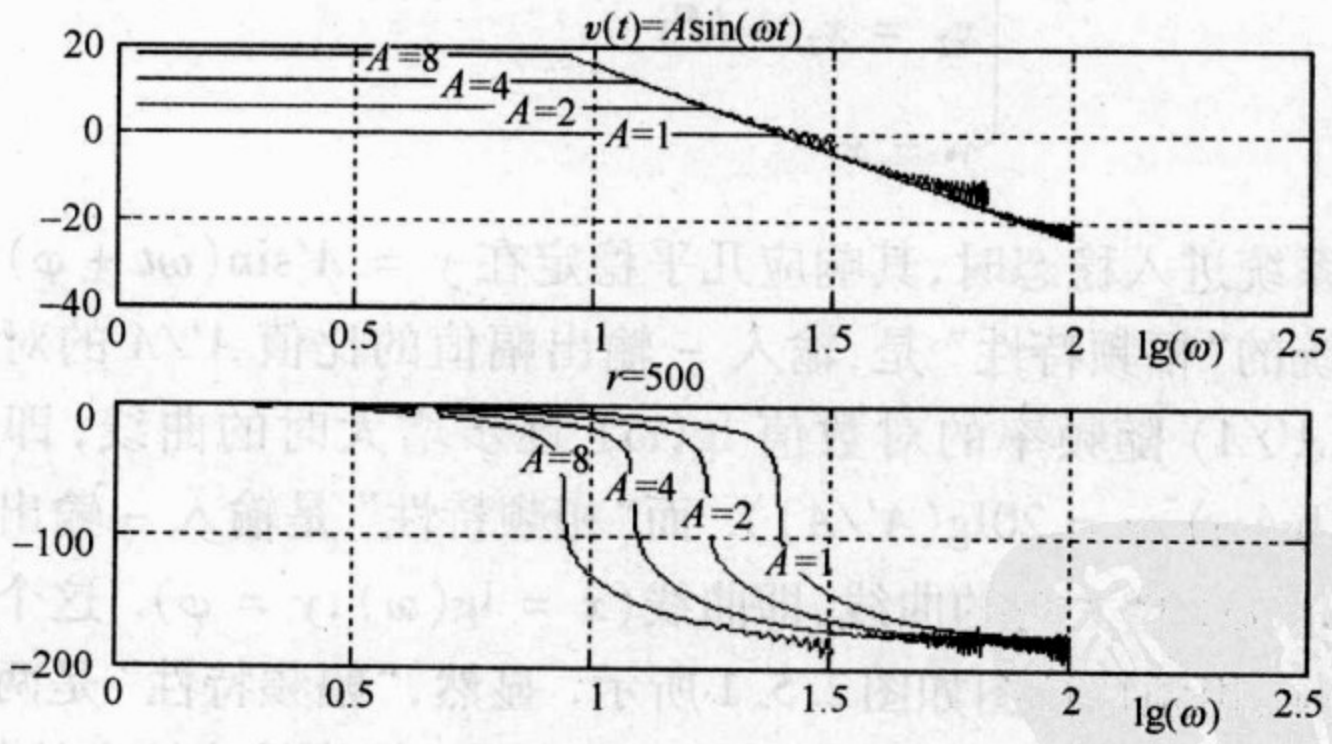


图 2.5.2

图 2.5.3 显示跟踪微分器对正弦信号输入的微分信号的频率特性. 在截止频率之前几乎保持超前90°相角,但在截止频率附近相移很快下降到 -90°,是品质很好的微分环节的频率特性.

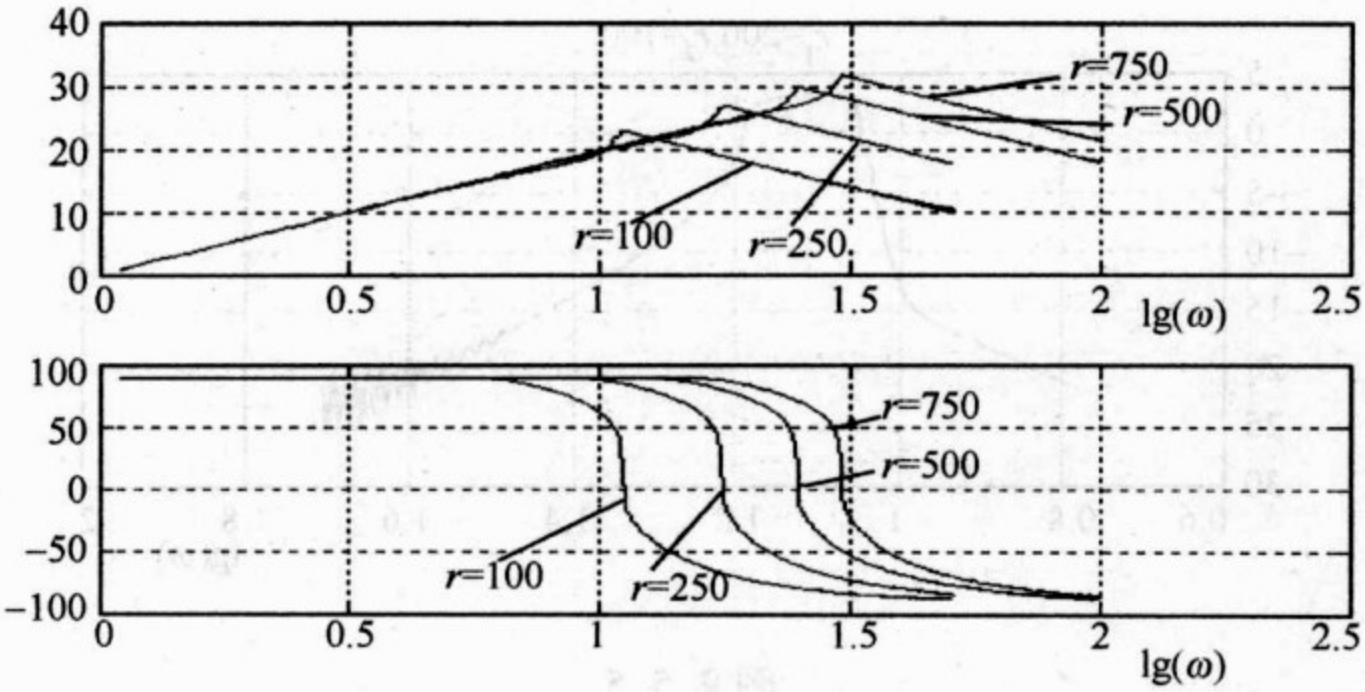


图 2.5.3

2.5.2 带通滤波器

利用 TD 的上述特性,我们很容易构造出数字带通滤波器. 一定频率范围的信号是能通过的,而这个范围之外的高频和低频信号都不能通过的滤波器叫做带通滤波器. 利用 TD 可按图 2.5.4 方式构造出带通滤波器:把两个 TD 并联,而其两个输出相减.

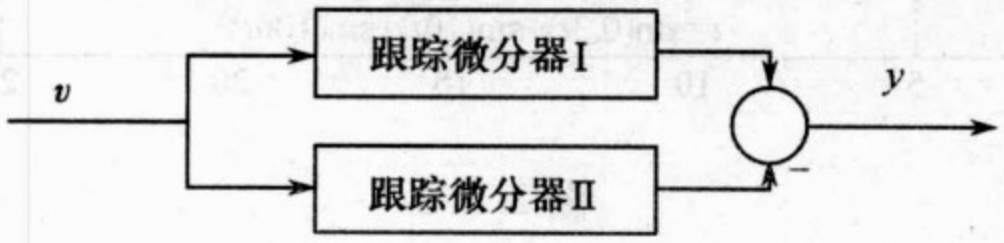


图 2.5.4

这里,跟踪微分器 Ⅰ 中用的速度因子 r_1 和跟踪微分器 Ⅱ 中用的速度因子 r_2 将满足不等式 $r_2 < r_1$. 这个系统的幅频特性如图 2.5.5 所示.

例 几种频率合成的信号中,要把低频部分和高频部分去掉. 现有信号

$$v(t) = a_1\sin(\omega_1 t) + a_2\sin(\omega_2 t) + a_3\sin(\omega_3 t)$$

取 $a_1 = a_2 = a_3 = 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 分别取 0.3,10,100. 要设计出只能通过信号 $v_2(t) = a_2\sin(\omega_2 t)$ 的带通滤波器. 当两个 TD 的快速因子和滤波因子分别取成 $r_1 = 5, r_2 = 0.01, h = 0.1$ 而输入上述信号

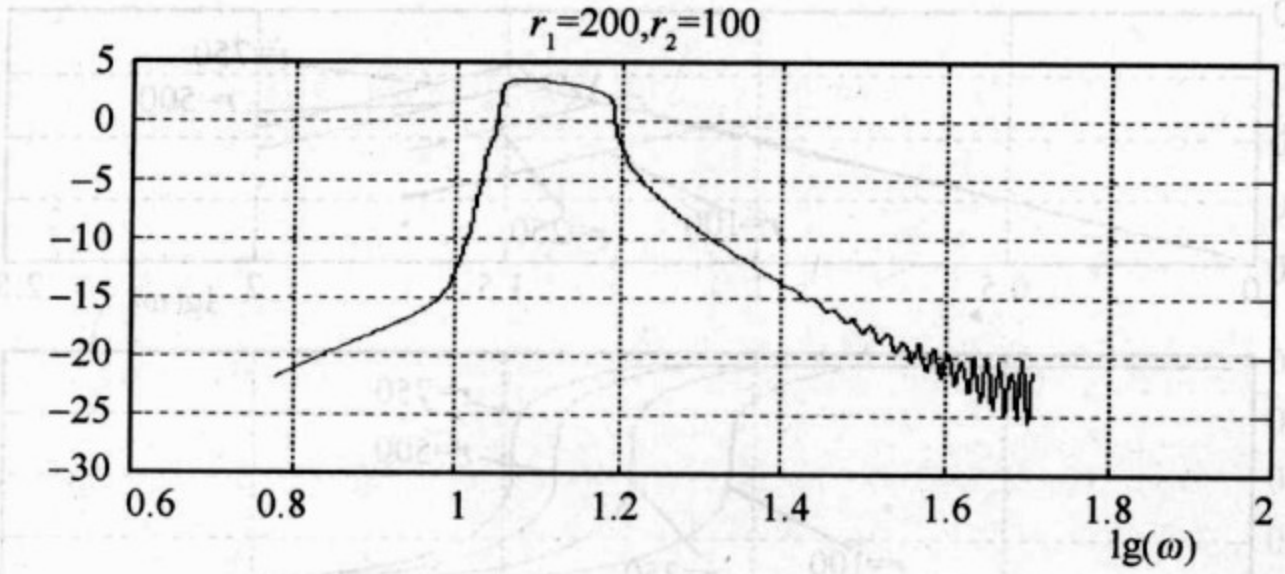


图 2.5.5

$v(t)$ 时，中频 $\sin(\omega_2 t)$ 和高频部分 $\sin(\omega_3 t)$ 将被全部滤掉，只剩下低频部分 $\sin(\omega_1 t)$ 了（图 2.5.6）. 而当取 $r_1 = 200, r_2 = 130, h = 0.02$ 时只剩中频部分的 $\sin(\omega_2 t)$ 了（图 2.5.7）.

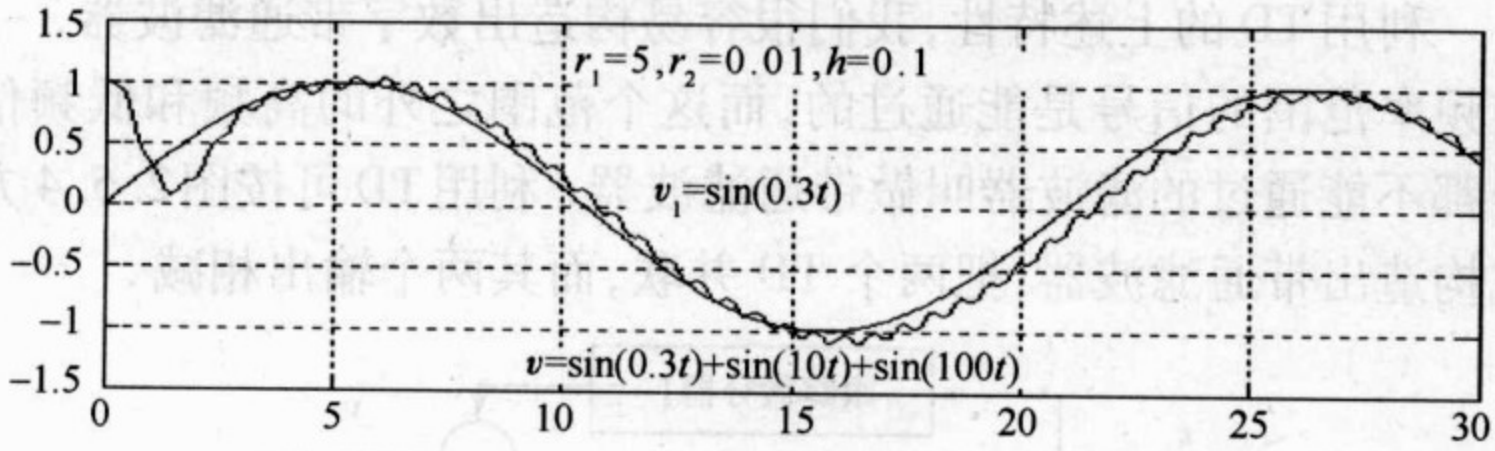


图 2.5.6

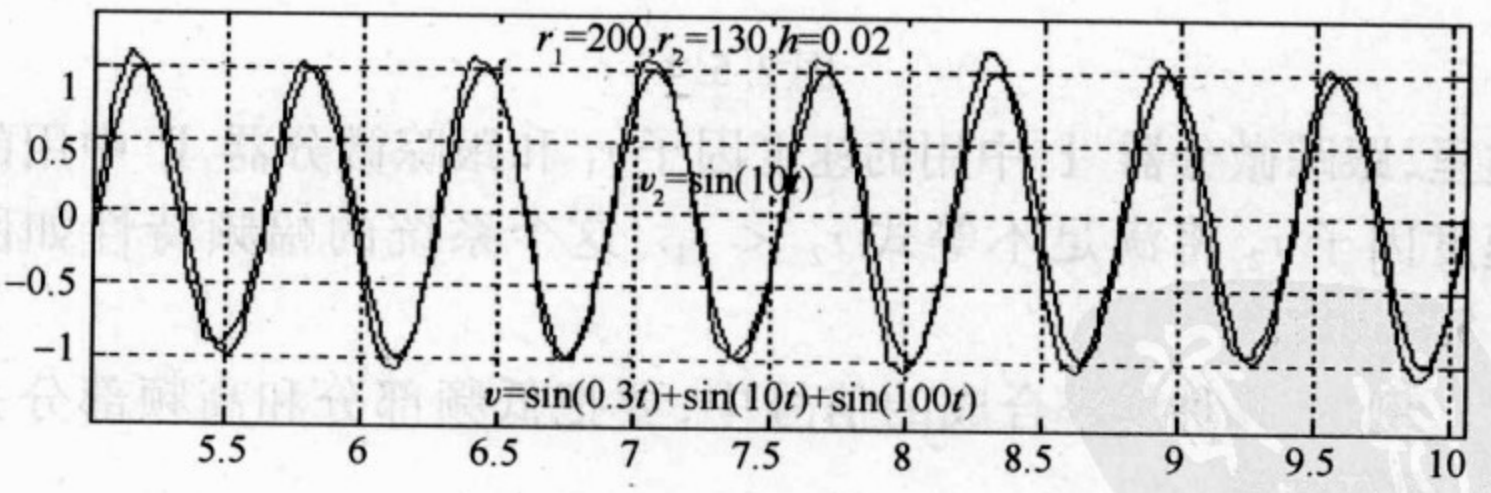


图 2.5.7

如果快速因子分别取成 $r_1 = 10000, r_2 = 6000, h_1 = 0.001, h_2 = 0.003$ 时，其中 h_1, h_2 分别表示跟踪微分器 Ⅰ、Ⅱ 的步长. 低频中频全被滤掉，只剩高频部分 $\sin(\omega_3 t)$ 了（图 2.5.8）.

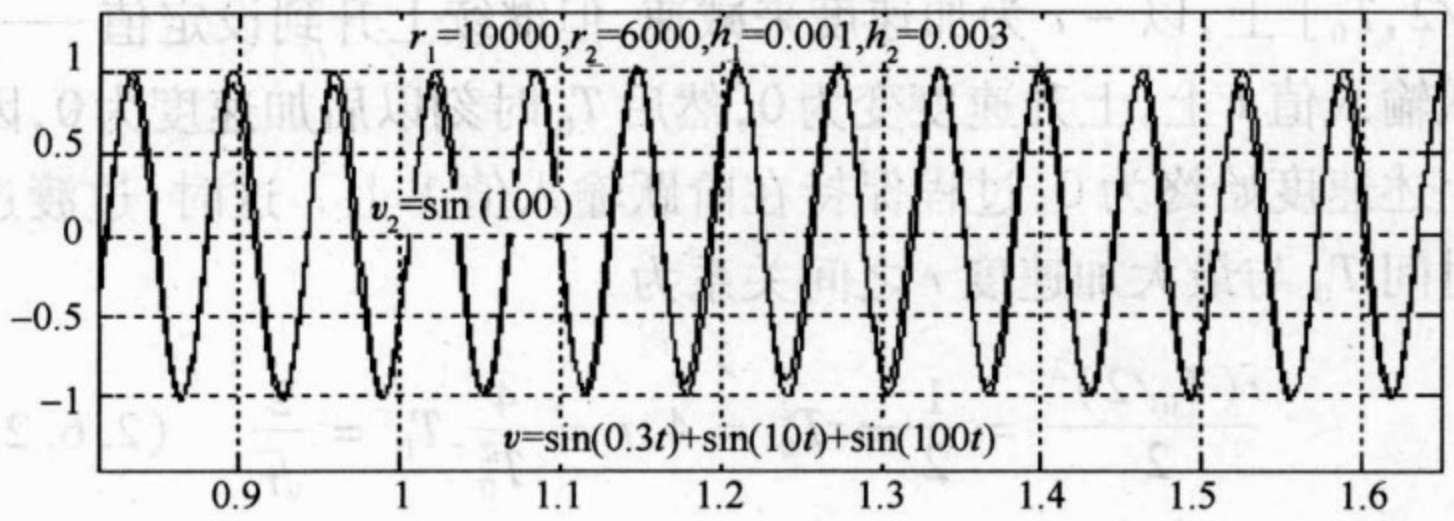


图 2.5.8

2.6 跟踪微分器的其他应用

这一节我们介绍跟踪微分器(见式(2.4.8))

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(x_1 - v(t), x_2, r, h_0) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + h\text{fh} \end{cases} \tag{2.6.1}$$

的一些其他的具体应用.

2.6.1 安排过渡过程

我们在第一章已经讨论过安排过渡过程带给反馈控制的益处,并且讨论了安排过渡过程的具体办法. 在 2.3 节已看到了 TD(2.6.1) 对常值输入的响应特征:有限时间单调地跟上输入信号,同时也给出此过程的微分信号,即阶跃响应将以有限时间无超调地进入稳态. 因此 TD(2.6.1) 可以用于安排过渡过程,而且过渡过程的快慢是用参数 r 的大小来进行调整.

实际上,如果用 T_0 表示阶跃响应结束的时间,那么 TD(2.6.1) 确定的阶跃响应曲线有如下特征:前半段时间,即时间区间 $\left[0, \frac{T_0}{2}\right]$ 上,以 r 为加速度沿抛物线上升到 $\frac{1}{2}$,即 $\frac{r(T_0/2)^2}{2} = \frac{1}{2}$,而上升速度达到最大值 $r(T_0/2)$;后半段时间,即时间区间

$[T_0/2, T_0]$ 上，以 $-r$ 为加速度来减速，但继续上升到设定值——阶跃输入值1上，上升速度变为0，然后 T_0 时刻以后加速度为0，因此上述速度始终为0，过程保持在阶跃输入值1上. 这时，过渡过程时间 T_0 与最大加速度 r 之间关系为

$$\frac{r(T_0/2)^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow rT_0^2 = 4, r = \frac{4}{T_0^2}, T_0 = \frac{2}{\sqrt{r}} \tag{2.6.2}$$

而且，当 T_0 或 r 给定时，过渡过程的最大速度为

$$v_m = r(T_0/2) = \frac{4}{T_0^2}\frac{T_0}{2} = \frac{2}{T_0}; r(T_0/2) = r\frac{2}{\sqrt{r}}/2 = \sqrt{r} \tag{2.6.3}$$

式(2.6.2) 和式(2.6.3) 完全确定了过渡过程时间 T_0，最大上升速度 v_m 及最大加速度 r 之间的相互关系.

这里应该指出，对系统(2.6.1) 的阶跃响应来说，根本不存在快速性和超调之间的矛盾现象.

对更复杂的参考输入也能用 TD 来安排合适的过渡过程. 根据参考输入来安排过渡过程，并不需要噪声滤波，因此在 TD 方程(2.6.1) 中的滤波因子 h_0 就可以取成步长 h，于是安排过渡过程的方程为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h\text{fhan}(x_1(k) - v(t), x_2(k), r, h) \end{cases} \tag{2.6.4}$$

现在假定某一热处理过程的温度曲线如图 2.6.1 所示，用公式表示为

$$\begin{cases} y_1 = |t+4| - |t-4| + |t-8| - |t-10| \\ y_2 = -2(|t-15| - |t-17|) - |t-18| + |t-20| - 4 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases}$$

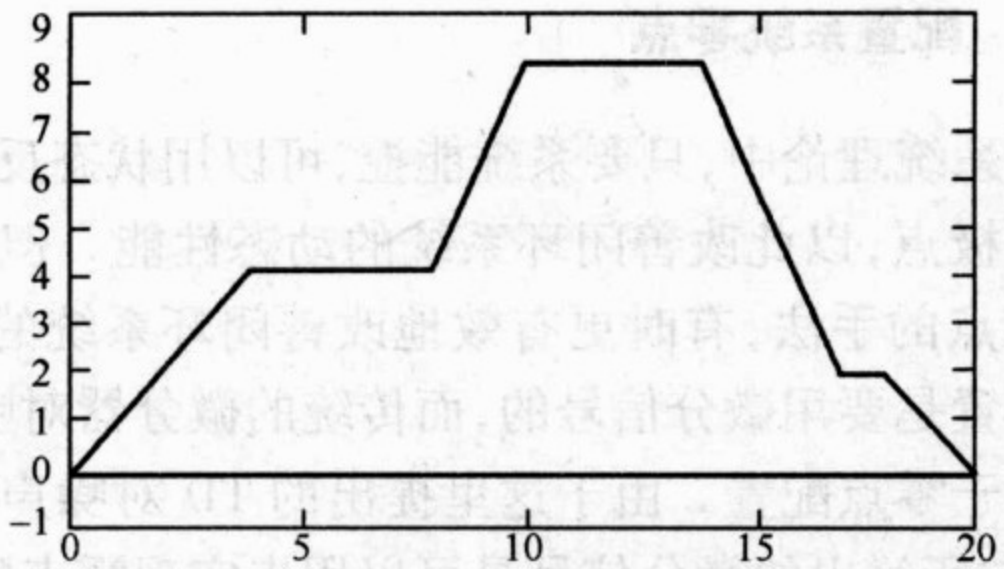


图 2.6.1

把这个温度曲线输入到 TD 方程(2.6.4) 中,并取不同的速度因子来进行积分,得如图 2.6.2 所示结果. 这里,TD 输出了两个量:① 跟踪参考输入的信号;② 跟踪速度(过渡过程的微分). 若速度因子 r 小,则 TD 的输出比较光滑地跟踪参考输入,若 r 大,更接近原始输入,有棱有角. 究竟选择多大的速度因子 r,将取决于受控对象的承受能力和可提供的控制能力. 对象的承受能力和可提供的控制能力大,速度因子 r 可取大,使安排的过程更接近给定的参考输入,否则速度因子 r 适当取小,使在对象能承受的范围和可提供的控制能力范围内尽可能快地跟踪原参考输入.

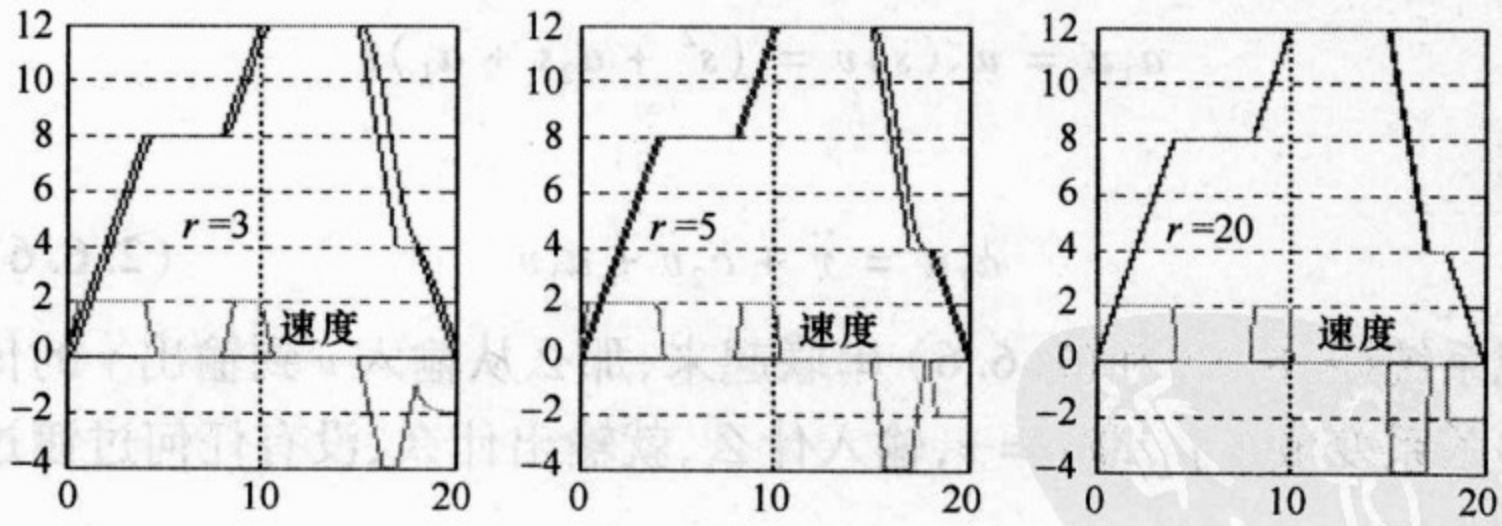


图 2.6.2

用 TD 来安排过渡过程,是否预先得知目标 $v(t)$ 的变化规律,这并不重要,重要的是能否实时得到信号 $v(t)$ 的值. 因此调节问题和随动(追踪) 问题中都可以用 TD 来安排过渡过程.

2.6.2 配置系统零点

在线性系统理论中,只要系统能控,可以用状态反馈对系统任意配置所需极点,以此改善闭环系统的动态性能. 但是若能实现配置系统零点的手法,有时更有效地改善闭环系统的动态性能. 然而零点配置是要用微分信号的,而传统的微分器对噪声很敏感,很难直接用于零点配置. 由于这里提出的 TD 对噪声具有很好的滤波作用,它所给出的微分信号是可以用来实现零点配置的.

设有放大系数为 1 的线性被控对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 + a_1 u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{2.6.5}$$

稳定,即 $a_1 > 0, a_2 > 0$,其传递关系为

$$y = w_1(s)u = \frac{a_1}{s^2 + a_2 s + a_1} u$$

如果参数 a_1, a_2 已知,且微分器能实现,那么可以构造由纯微分环节所成的传递关系

$$a_1 u = w_2(s)v = (s^2 + a_2 s + a_1)v$$

或

$$a_1 u = \ddot{v} + a_2 \dot{v} + a_1 v \tag{2.6.6}$$

把系统(2.6.5) 和(2.6.6) 串联起来,那么从输入 v 到输出 y 的传递关系变成1 了,即 $y = v$,输入什么,就输出什么,没有任何过渡过程.

一般地,对以 u 为输入,y 为输出的二阶稳定系统

$$\ddot{y} - f(y, \dot{y}) = u \tag{2.6.7}$$

如果函数 $f(y, \dot{y})$ 已知,那么可以用微分器构造出以 v 为输入,u 为输出的新系统

$$u = \ddot{v} - f(v,\dot{v}) \tag{2.6.8}$$

把这两个系统串联起来,得

$$\ddot{y} - f(y,\dot{y}) = \ddot{v} - f(v,\dot{v})$$

在这里,只要有$y(0) = v(0)$,$\dot{y}(0) = \dot{v}(0)$,那么输入v和输出y完全相同. 因此把系统(2.6.7)和(2.6.8)串联起来,能使复合系统从输入v到输出y的传递关系变成1.

系统(2.6.6)和(2.6.8)是以系统(2.6.5)和(2.6.7)的极点特性做为其零点特性的系统,一般称系统(2.6.5)为(2.6.7)的逆系统. 因此,所谓构造逆系统的问题,实质上,就是零点结构的配置问题.

过程控制中的许多设计所追求的就是这种输出尽可能模仿输入的传递特性. 然而传统微分器给出的微分信号对噪声的放大效应太严重,无法实现像(2.6.6)和(2.6.8)那样的,由纯零点结构所成的系统,即无法配置纯零点结构. 但是跟踪微分器(2.6.1)有很好的噪声滤波能力,是可以用来近似地构造由微分环节所形成的零点系统.

信号v送入TD(2.6.1)得到x_1, x_2,其中x_1跟踪输入信号v,x_2是输入信号v的微分$\dot{v}$的近似,而$\text{fhan}(x_1 - v, x_2, r, h_0)$可以当作加速度$\ddot{v}$的近似,因此,根据式(2.6.8)构造系统(2.6.7)的逆系统应为

$$u = \ddot{v} - f(v,\dot{v}) = \text{fhan}(x_1 - v, x_2, r, h_0) - f(x_1, x_2) \tag{2.6.9}$$

在下面两个例子中,积分步长取$h = 0.001$,而TD的速度因子取$r = 500$. TD是按式(2.6.1)计算,而系统方程是用欧拉法积分的.

例1 设有线性系统

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 u, \zeta = 1/\sqrt{2}, \omega = 1$$

其逆系统直接取成$u = \text{fhan}(x_1 - v, x_2, r, h) + 2\zeta\omega x_2 + \omega^2 v$,那么其

状态空间实现为

$$u = \text{fhan}(x_1 - v, x_2, r, h) + 2\zeta\omega x_2 + \omega^2 v$$

把这两个系统串联起来考察由 v 到 $y = x$ 的阶跃响应. 分别取 $u = 0.5, u = 50$ 时原系统的阶跃响应和取 $v = 0.5, v = 50$ 时的串联系统的阶跃响应曲线仿真结果分别示于图 2.6.3 和图 2.6.4. 图中 y 是原系统的阶跃响应,而 y_0 是对原系统配置了零点系统(逆系统)之后的阶跃响应,其传递特性几乎变成 1:1 了.

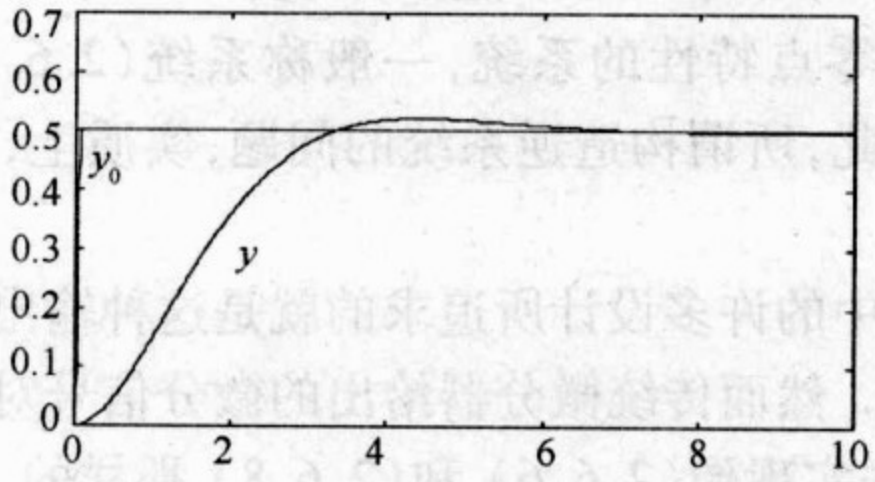


图 2.6.3

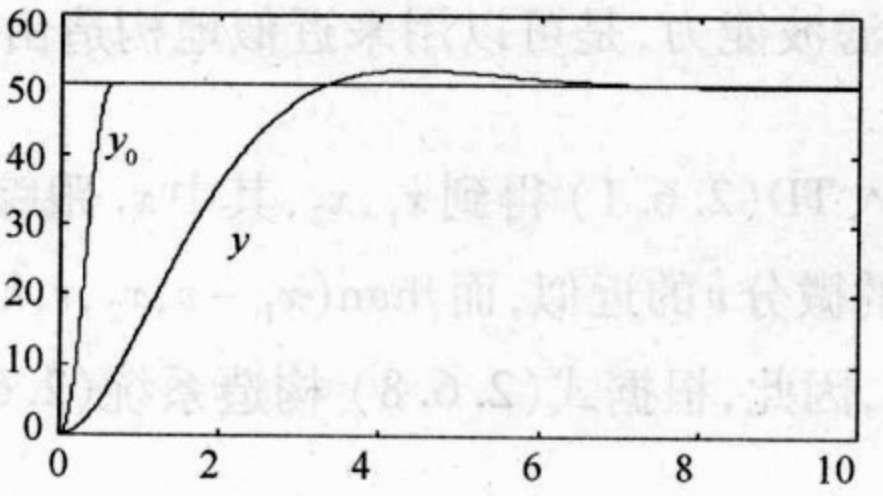


图 2.6.4

例 2 对非线性系统

$$\ddot{x} + x + 2\dot{x}(1 - x^2) = u$$

建立的逆系统为

$$u = \text{fhan}(x_1 - v, x_2, r, h) + 2x_2(1 - x_1^2) + x_1$$

阶跃信号分别取 $u = 0.1, u = 0.9$ 时原系统的阶跃响应和 $v = 0.1, v = 0.9$ 时的串联系统的阶跃响应的比较结果分别示于图 2.6.5 和图 2.6.6.

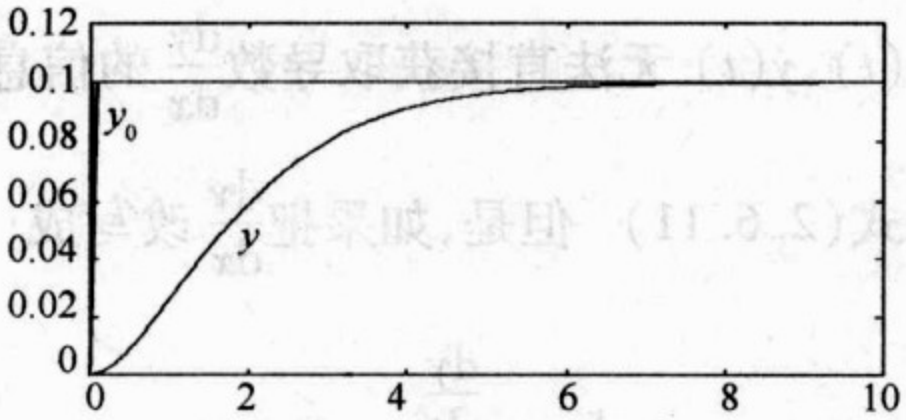


图 2.6.5

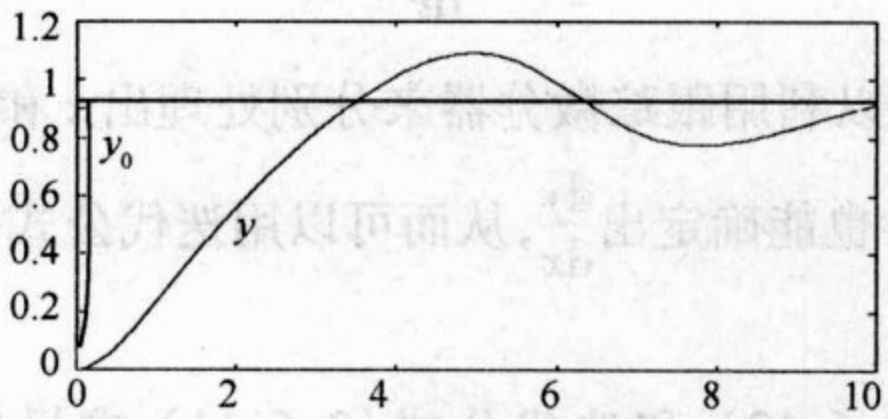


图 2.6.6

从这些仿真结果看，无论是线性对象，还是非线性对象，只要其数学模型已知，就能用跟踪微分器构造出很好的逆系统，或对原系统配置零点系统，使复合系统的传递特性几乎接近于 1∶1.

2.6.3 求函数极值

一个输入 - 输出关系是由如下函数关系描述.

$$y = f(x) \tag{2.6.10}$$

式中：x 为输入量；y 为输出量. 而且函数 $f(x)$ 的形式是未知的.

求极值点的典型的递推算法为

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_k}, \lambda > 0 \tag{2.6.11}$$

如果点 x_k 上函数 $f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} > 0$，那么下一步 x 值 x_{k+1} 大于现在的 x 值 x_k，反之，下一步 x 值 x_{k+1} 小于现在的 x 值 x_k，这样 x 逐渐接近使函数 $f(x)$ 取极小值的 x^*.

在这里，我们不知道函数 $y = f(x)$ 的表达式，只能实时获取输

入 - 输出量 $x(t)$,$y(t)$ 无法直接获取导数$\frac{dy}{dx}$的信息,从而不能直接利用迭代公式(2.6.11). 但是,如果把$\frac{dy}{dx}$改写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{2.6.12}$$

那么我们就可以利用跟踪微分器来分别处理出 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$,不用函数表达式 $y = f(x)$ 也能确定出$\frac{dy}{dx}$,从而可以用迭代公式(2.6.11)来求极值点了.

用公式(2.6.12)和迭代公式(2.6.11)求极值的具体算法如下:

记 h 为采样步长,$x(k) = x(kh)$,$y(k) = y(kh)$

输入数据

$$x(t), t = h, 2h, 3h, \cdots$$

来获取输出数据

$$y(t), t = h, 2h, 3h, \cdots$$

把 $x(k)$ 送入跟踪微分器 TD1

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + h\text{fhan}(x_1(k) - x(k), x_2(k), r, h) \end{cases}$$

跟踪 $x(k)$ 的信号 $x_1(k)$ 及其微分信号 $x_2(k)$.

把 $y(k)$ 送入跟踪微分器 TD2

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_1(k) + hy_2(k) \\ y_2(k+1) = y_2(k) + h\text{fhan}(y_1(k) - y(k), y_2(k), r, h) \end{cases}$$

跟踪 $y(k)$ 的信号 $y_1(k)$ 及其微分信号 $y_2(k)$.

当 $x_2(k) \neq 0$ 时,有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \approx \frac{y_2(k)}{x_2(k)}$$

于是式(2.6.12)变成

$$x(k+1) = x(k) - \lambda \frac{y_2(k)}{x_2(k)} \tag{2.6.13}$$

例 设 $y = 1 + |x|^{\alpha}$,显然其极小点 $x^* = 0$,而极小值 $y^* = 1$. 上述算法中的各参数取如下:步长 $h = 0.01$;TD 的速度因子 $r = 1000$;迭代修正因子 $\lambda = 0.002$;初值 $x(0) = 1$. 图 2.6.7 显示的是函数 y 中的幂次 α 分别取 0.5,1.0,2.0,3.0 时的寻优结果. 这些结果表明,尽管函数性质差异较大(前两种情形,在极值点函数不可微),但用同一种算法,同一组参数,所给出的寻优结果是相当满意的.

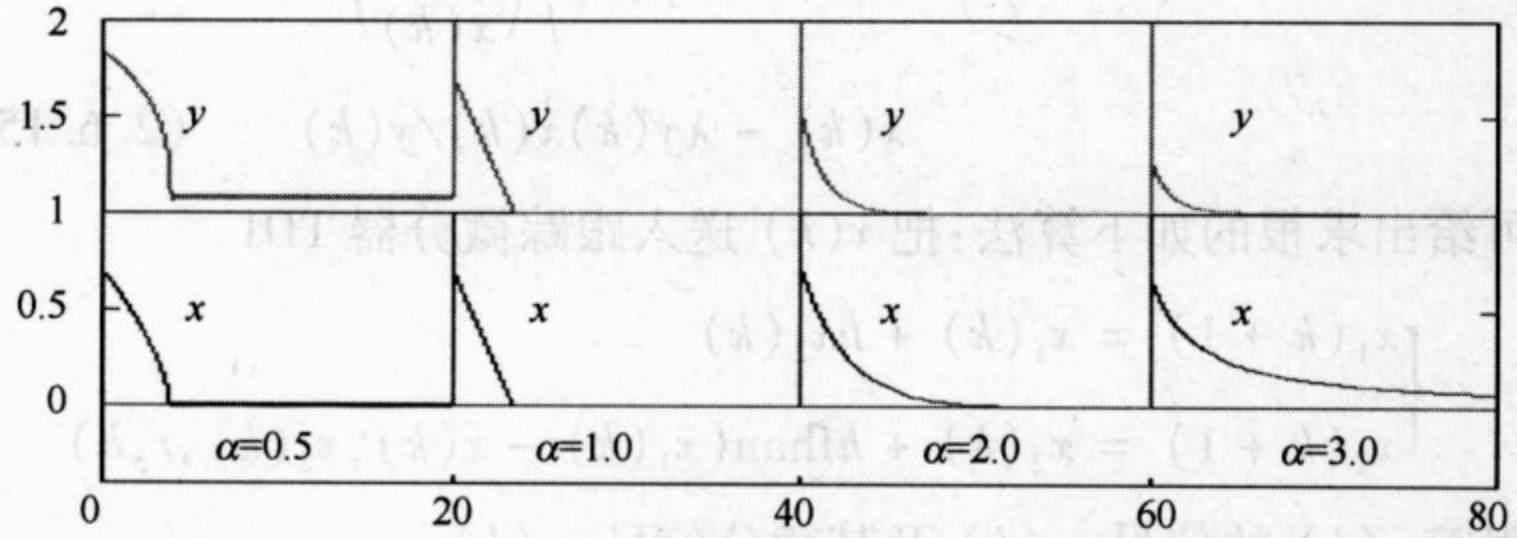


图 2.6.7

2.6.4 求函数的根

求函数的根是与求函数的极值密切相关的问题. 如当 x^* 为函数 $f(x)$ 的根时,$f(x^*) = 0$,x^* 又是函数 $(f(x))^2$ 的极小点. 因此可以用求 $(f(x))^2$ 极小点的办法来求 $f(x)$ 的根.

下面我们不用求极值的办法,而是用切线法来直接求函数的根. 先假定函数 $y = f(x)$ 连续可微,x^* 是它的一个根:$f(x^*) = 0$.

又假定 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x^*} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x^*} \neq 0$.

这时求$f(x)=0$的根的切线法迭代公式为

$$x(k+1)=x(k)-\lambda y(k)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x(k)}\right),\lambda>0 \tag{2.6.14}$$

是函数$f(x)$的表达式已知假定下的迭代公式. 现在的问题是:不知道$f(x)$的表达式,只能获取输入$x(t)$和输出$y(t)=f(x(t))$的实时值,如何确定给出输出量$y=0$的输入值x的问题.

这里的关键是,在迭代公式(2.6.14)中,如何确定导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x(k)}$的问题. 和求极值问题的讨论一样,把$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$改成$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,并用TD来确定$\dot{y}$和$\dot{x}$. 于是迭代公式(2.6.14)改造成

$$x(k+1)=x(k)-\lambda y(k)\Big/\left(\frac{\dot{y}(k)}{\dot{x}(k)}\right)=$$

$$x(k)-\lambda y(k)\dot{x}(k)/\dot{y}(k) \tag{2.6.15}$$

可给出求根的如下算法:把$x(k)$送入跟踪微分器TD1

$$\begin{cases}x_1(k+1)=x_1(k)+hx_2(k)\\ x_2(k+1)=x_2(k)+h\mathrm{fhan}(x_1(k)-x(k),x_2(k),r,h)\end{cases}$$

跟踪$x(k)$的信号$x_1(k)$及其微分信号$x_2(k)$.

把$y(k)$送入跟踪微分器TD2

$$\begin{cases}y_1(k+1)=y_1(k)+hy_2(k)\\ y_2(k+1)=y_2(k)+h\mathrm{fhan}(y_1(k)-y(k),y_2(k),r,h)\end{cases}$$

跟踪$y(k)$的信号$y_1(k)$及其微分信号$y_2(k)$.

然后,由迭代式(2.6.15)得

$$x(k+1)=x(k)-\lambda y(k)x_2(k)/y_2(k) \tag{2.6.16}$$

在这里,两个TD的初始条件应取$x_2(0)\neq 0,y_2(0)\neq 0$.

例 求函数$y=|x-1|^{\alpha}\mathrm{sign}(x-1)$的根. 显然此函数的根就在$x^*=1$. 迭代初值取$x(0)=0$;步长取$h=0.01$;TD的速度

因子 $r = 1000$;TD 的初始条件:$x_1(0) = 0, x_2(0) = 1, y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$;修正因子 $\lambda = 0.01$. α 分别取 0.5,1,1.5,2 所做的仿真结果示于图 2.6.8 中.

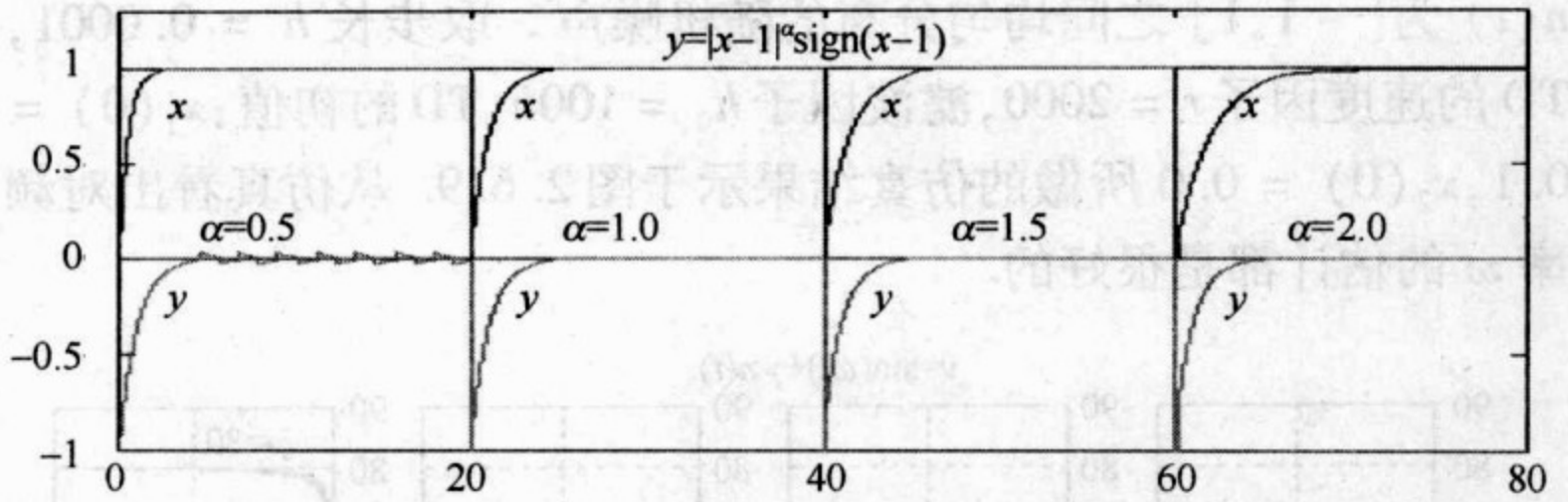


图 2.6.8

2.6.5 频率估计

我们测得了被噪声污染的正弦信号 $x(t) = a\sin(\omega t) + \gamma n(t)$,如何估计出此信号所含的频率 ω,是下面要讨论的问题.

先看无噪声的情形. 取 $x(t)$ 的微分,得

$$\dot{x}(t) = a\omega\cos(\omega t) \tag{2.6.17}$$

于是可得

$$\frac{\int_0^t (\dot{x}(\tau))^2 \mathrm{d}\tau}{\int_0^t (x(\tau))^2 \mathrm{d}\tau} = \frac{a^2\omega^2 \int_0^t \cos^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau}{a^2 \int_0^t \sin^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \omega^2 \frac{\int_0^t \cos^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\int_0^t \sin^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau} \tag{2.6.18}$$

但是由于

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \cos^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \Big/ \int_0^t \sin^2(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$$

因此就有

$$\omega^2 \approx \lim_{t\to\infty} \int_0^t (\dot{x}(\tau))^2 \mathrm{d}\tau \Big/ \int_0^t (x(\tau))^2 \mathrm{d}\tau \tag{2.6.19}$$

这个公式对被噪声污染的信号也是有效的. 这里的信号微分是用TD来获取.

例 设输入信号为$y = a\sin(\omega t) + \gamma n(t)$,取$a = 1, \gamma = 0.1$, $n(t)$为$[-1,1]$之间均匀分布的随机噪声. 取步长$h = 0.0001$, TD的速度因子$r = 2000$,滤波因子$h_0 = 100h$,TD的初值:$x_1(0) = 0.1, x_2(0) = 0.0$所做的仿真结果示于图2.6.9. 从仿真看出对频率ω的估计都是很好的.

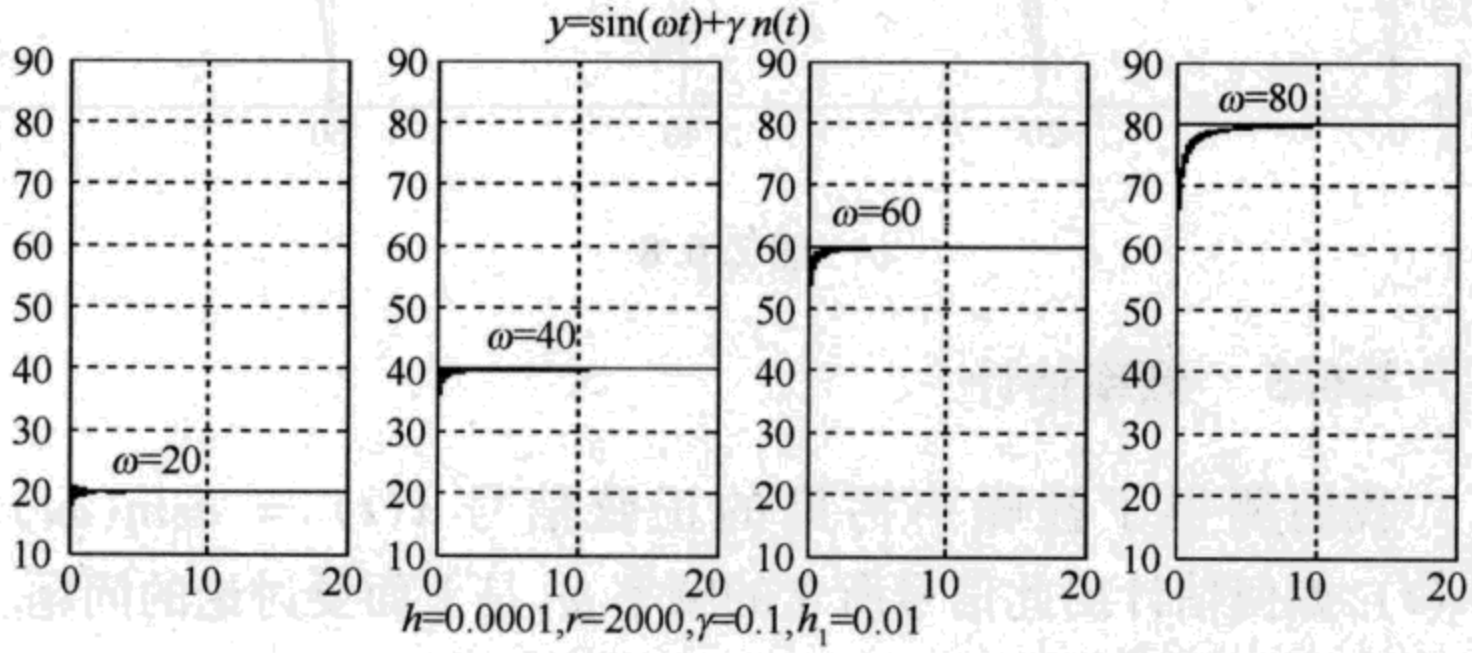


图2.6.9

2.6.6 相近频率的分离

如果两个频率ω_1, ω_2比较接近,如何分开它们?用前述的滤波方法是很难区分的,但是如果有一个频率是事前知道的,如ω_1已知,那么我们可以从信号$v(t) = a_1\sin(\omega_1 t) + a_2\sin(\omega_2 t)$中分离出频率$\omega_2$. 记$v_1(t) = a_1\sin(\omega_1 t), v_2(t) = a_2\sin(\omega_2 t), v(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

事实上,已知信号是满足微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, & x_{11}(0) = 0 \\ \dot{x}_{12} = -\omega_1^2 x_{11}, & x_{12}(0) = a_1\omega_1 \end{cases} \tag{2.6.20}$$

的解,因此把信号$v(t)$送入跟踪微分器

$$\begin{cases} \text{fs} = \text{fhan}(x_{21} - v, x_{22}, r, h) \\ \dot{x}_{21} = x_{22}, x_{21}(0) = 0 \\ \dot{x}_{22} = \text{fs}, x_{22}(0) = 0 \end{cases} \tag{2.6.21}$$

让 $x_{21}(t)$ 跟踪 $v(t)$,则有

$$x_{21}(t) \rightarrow v(t),$$

然后,适当调整 a_1 来求解微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, & x_{11}(0) = 0 \\ \dot{x}_{12} = -\omega_1^2 x_{11}, & x_{12}(0) = a_1\omega_1 \end{cases} \tag{2.6.22}$$

得信号 $v_1(t)$. 这两者相减可得 $v_2(t)$ 了

$$x_{21}(t) - x_{11}(t) \rightarrow v(t) - v_1(t) \rightarrow v_2(t)$$

我们把微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, & x_{11}(0) = 0 \\ \dot{x}_{12} = -\omega_1^2 x_{11}, & x_{12}(0) = a_1\omega_1 \end{cases} \tag{2.6.23}$$

作为信号发生器,那么上述过程可以按图 2.6.10 的方式实现.

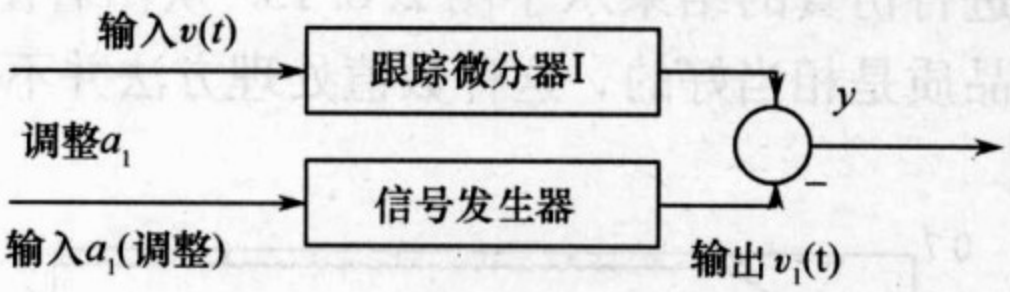


图 2.6.10

按上述方法仿真的结果示于图 2.6.11,图 2.6.11(a) 是两个频率符合的信号,图 2.6.11(b) 是已知频率信号,而图 2.6.11(c) 是未知频率信号.

2.6.7 数字整流

从交流电获取直流电是用硬件 - 整流器来实现的,其基本原理是从 50Hz 的交流信号 $y = a\sin(50 \times 2\pi t)$ 取其半边,或取其绝对值(用半导体器件实现),然后进行滤波而得到.

假如可以用数字方法进行整流的话,只要把绝对值信号 $u =$

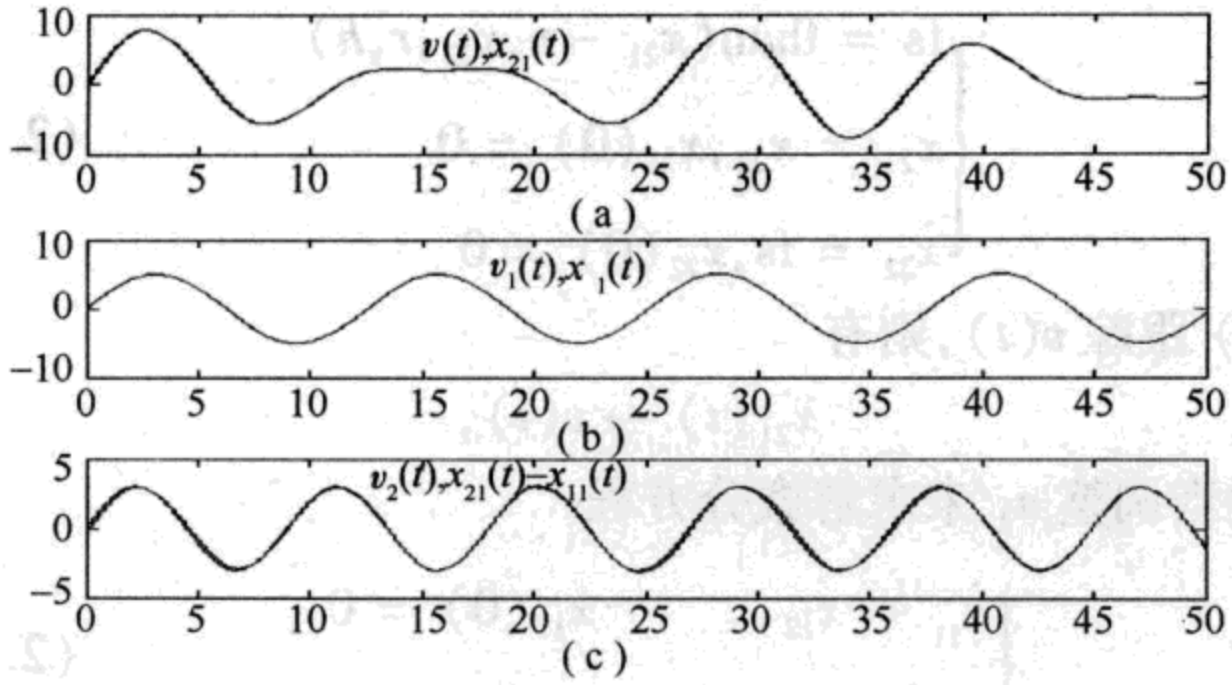


图 2.6.11

$|y| = a|\sin(50 \times 2\pi t)|$ 送入 TD,并适当调整 TD 的速度因子和滤波因子,就能得到很好的直流信号.

例 设交流信号为 $y = \sin(314t)$,取绝对值得 $u = |y| = |\sin(100\pi t)|$. 取 TD 的参数 $h = 0.0001, r = 1000, h_0 = 180h$ 所做的仿真结果示于图 2.6.12,有小幅高频振荡. 为了消除这些高频振荡,再把一个 TD(其参数取 $r_1 = 200, h_1 = 10h$)作为低通滤波器串接起来进行仿真的结果示于图 2.6.13. 从图看出,所得到的直流信号的品质是相当好的. 这种数值处理方法并不受输入信号幅值的影响.

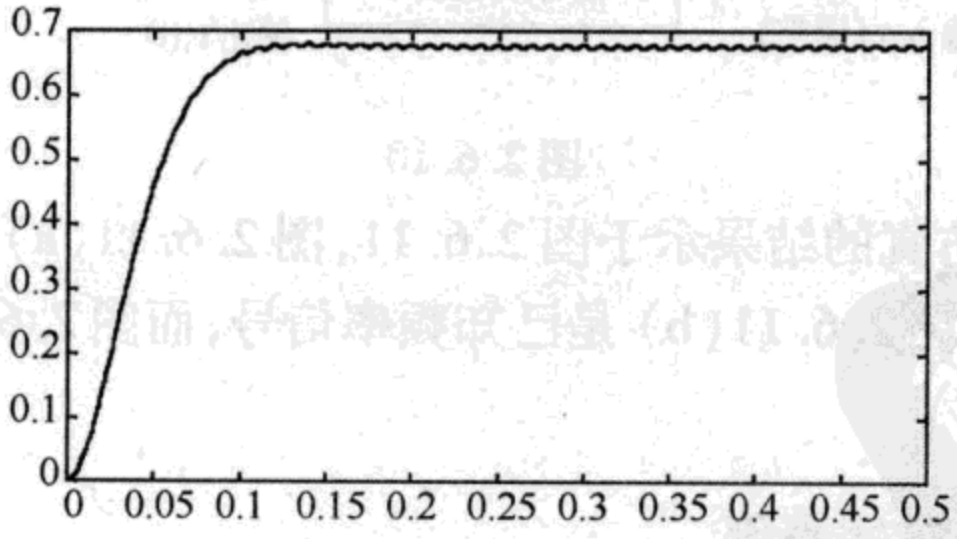


图 2.6.12

2.6.8 数字检波

无线电信号是把调制信号(有用信号)加载在高频载波上传

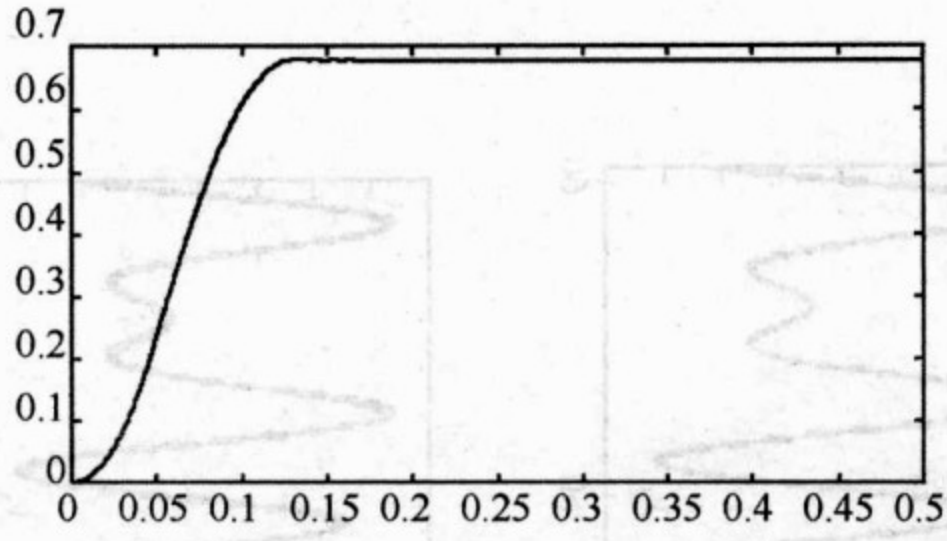


图 2.6.13

送的. 接受这些信号之后要检波出调制信号才能获得有用信息.

设高频载波为 $y_0(t) = \sin(\omega t)$(ω 大),有用信号 $y(t)$ 加载在 $y_0(t)$ 上,那么传送的信号是

$$u_0(t) = y_0(t)(a + y(t)), a = \text{const} > 0$$

所谓检波就是从信号 $u_0(t)$ 提取有用信号 $y(t)$.

把接受的信号 $u_0(t)$ 取绝对值后送入 TD,并适当调整速度因子 r 和滤波因子 h_0,就能调制出有用信号 $y(t)$.

例 载波信号取成 $u(t) = \sin(500t)$,调制信号分别取

$$y_1(t) = \cos(t) + \gamma n(t)$$

$$y_2(t) = \cos(t) + 1.5\sin(1.5t) + \gamma n(t)$$

$$y_3(t) = \cos(t) + 1.5\sin(1.5t) + 2\cos(2t) + \gamma n(t)$$

式中:$n(t)$ 为噪声;γ 为噪声强度.

TD 的参数取成:$h = 0.001, r = 400, h_0 = 40h$,把信号

$$u_0(t) = \sin(500t)(a + y_i(t)), i = 1,2,3$$

的绝对值 $|u_0(t)|$ 送入 TD 所做的仿真结果示于图 2.6.14 和图 2.6.15. 这是对 TD 的输出乘上了因子 $\gamma = \sqrt{2}$ 后与实际无噪声的输入 $y(t)$ 进行比较的结果. 图 2.6.14 显示的是噪声 $n(t) \equiv 0$ 的情形,而图 2.6.15 显示的是有噪声 $0.1n(t)$ 的仿真结果. 从这些仿真图看出,无论信号带噪声还是不带噪声,跟踪微分器的调制效果都是很好的.

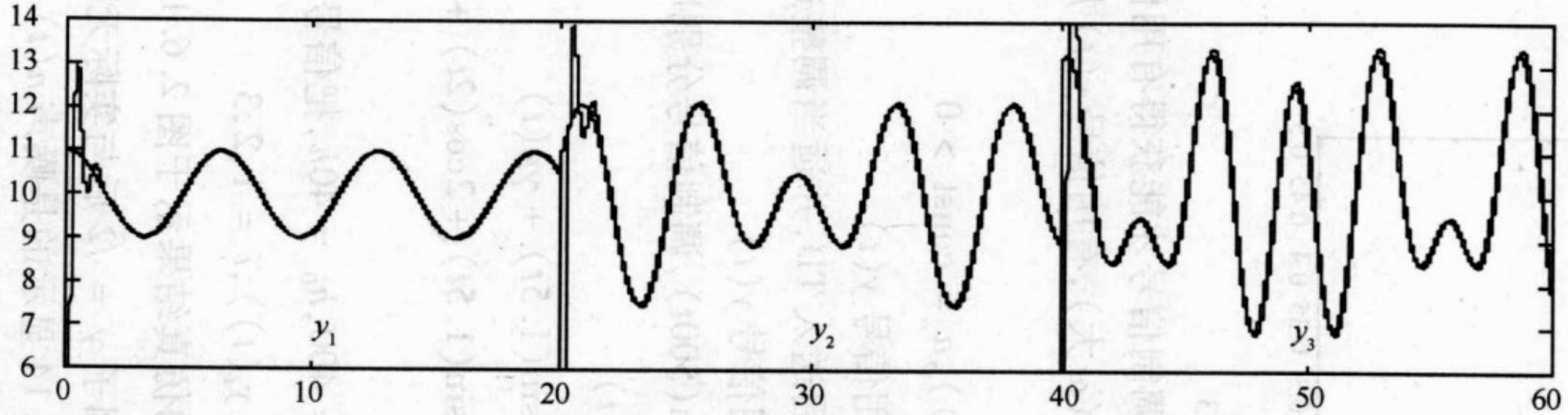

14
13
12
11
10
9
8
7
6
0
10
20
30
40
50
60
y_1
y_2
y_3

图 2.6.14

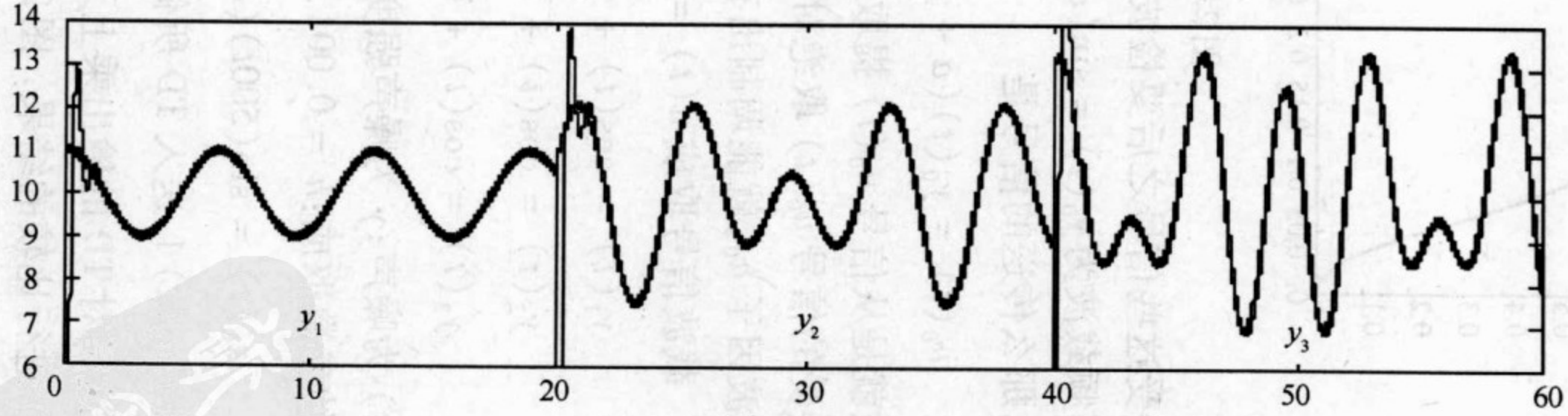

14
13
12
11
10
9
8
7
6
0
10
20
30
40
50
60
y_1
y_2
y_3

图 2.6.15

2.6.9 相位超前功能的实现

利用跟踪微分器，可以按图 2.6.16 方式来实现相位超前功能.

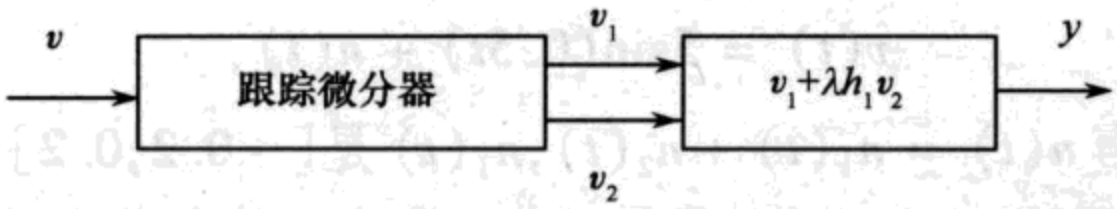


图 2.6.16

其具体算法为

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r, h_1) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{2.6.24}$$

$$y(t) = \frac{1}{\gamma}(v_1(t) + \lambda h_1 v_2(t)), \gamma > 1$$

参数取值和输入函数如下：

$$h = h_1 = 0.01, v_1(t) = \sin(t), \lambda = 110, \gamma = 1.5$$

所作仿真结果显示于图 2.6.17. 参数 λ 小，超前的相位会小.

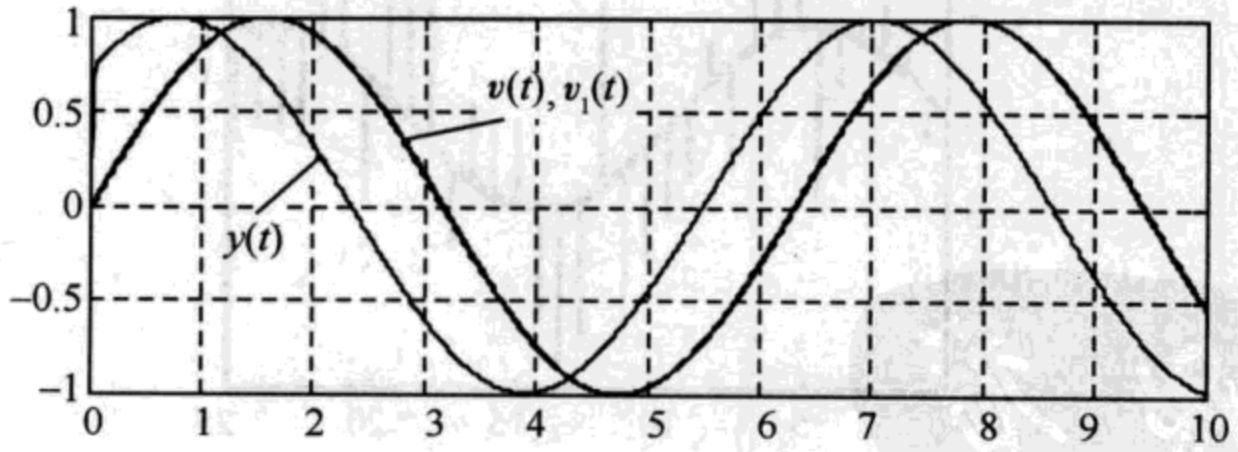


图 2.6.17

2.6.10 剔除野值及预报方法

实际测得的信号常常含有偏离真值很远的野值，如何踢除这些野值是信号处理中的重要研究课题. 实际上，应用 TD 是很容易

解决野值剔除问题,用TD剔除野值,相当于进行一次滤波,进行滤波总是带来相位损失,为了补偿这种相位损失,利用 TD 给出的微分信号来进行适当的预报修正,会取得很好的效果.

例 今有信号

$$v(t) = 5\sin(0.5t) + n(t),$$

式中,噪声 $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$,$n_1(t)$ 是$[-0.2,0.2]$之间均匀分布的白噪声,$n_2(t/300)$ 是$[-10,10]$之间均匀分布的白噪声充当野值.

我们把信号 $v(t)$ 送入 TD,得

$$\begin{cases} \mathrm{fh}(k) = \mathrm{fhan}(x_1(k) - v(k), x_2(k), r, h_0) \\ x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k) = x_2(k) + h\mathrm{fh}(k) \end{cases} \tag{2.6.25}$$

取参数 $h = 0.001, r = 50, h_0 = n_1 h, n_1 = 10$,得仿真结果如图 2.6.18 和图 2.6.19 所示.

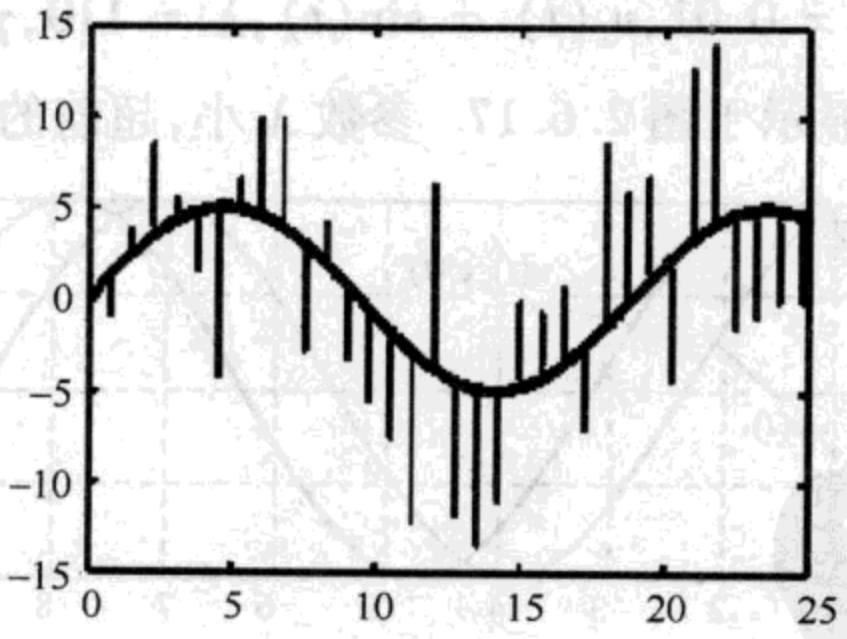


图 2.6.18

从放大了的图(图 2.6.19) 中看出滤波所得信号有明显地相位迟后. 为了补偿这个相位迟后,我们利用 TD 给出的微分信号进行适当步数的预报:

$$\widehat{x_1}(k) = x_1(k) + n_2 h x_2(k)$$

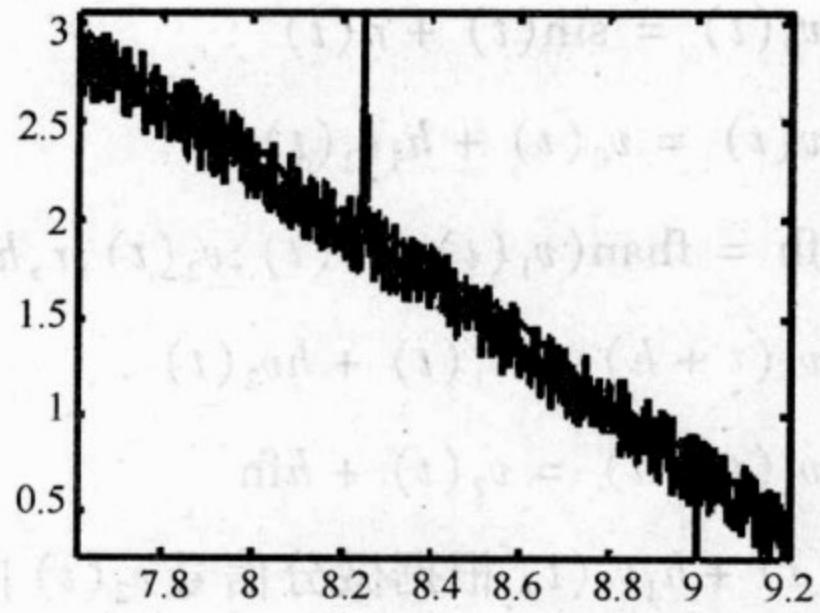


图 2.6.19

这是预报了 n_2 步的公式,一般取 $n_2 \approx 2n_1$. 下面是 $n_1 = 10, n_2 = 30$ 的仿真结果如图 2.6.20 所示. 从图中明显看出相位的补偿效果.

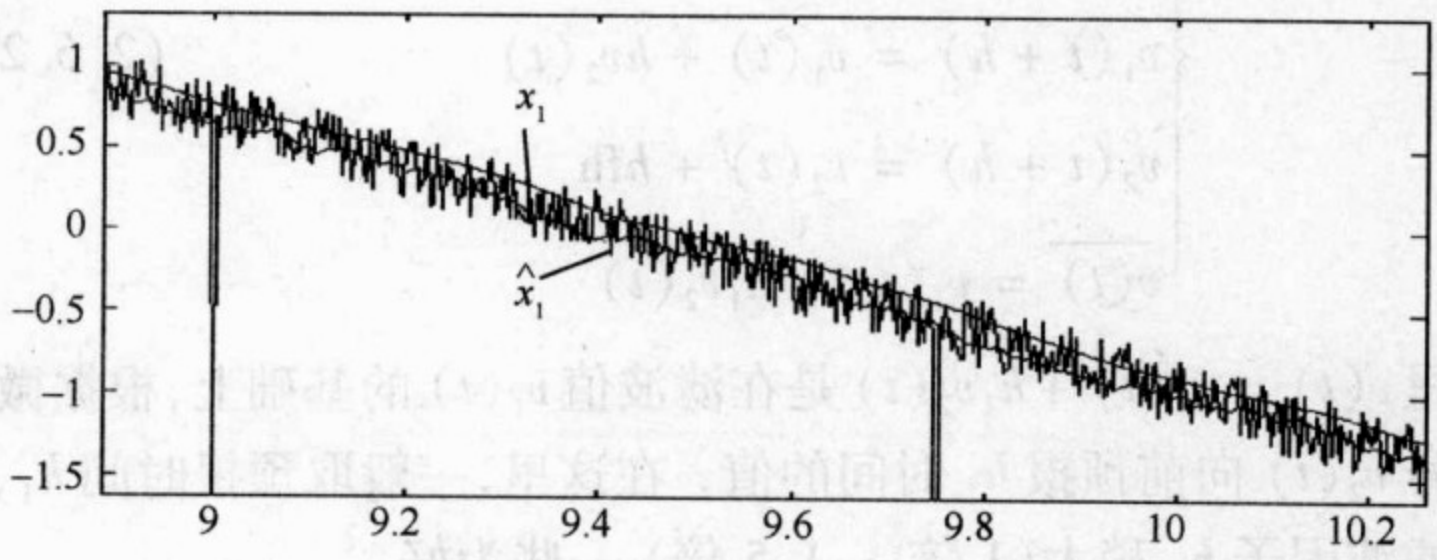


图 2.6.20

另外,在这个仿真计算中没有采取“剔去野值”的特殊措施,TD 本身具有“剔去野值”的特殊功能.

对被噪声污染的信号进行滤波时,滤波越好,信号的相位损失越严重. 减少相位损失的一种办法就是上面介绍的“预报方法”. 这个方法可以说是“先微分,后预报”的办法. 实际上我们也可以实施“先预报,后微分”的办法. 仿真研究表明“先预报,后微分”的办法比起“先微分,后预报”的办法,补偿相位损失相当,但滤波效果更好一些.

“先预报,后微分”的具体算法如下:

$$\begin{cases} v_0(t) = \sin(t) + n(t) \\ v(t) = v_0(t) + h_1 v_2(t) \\ \text{fh} = \text{fhan}(v_1(t) - v(t), v_2(t), r, h_0) \\ v_1(t+h) = v_1(t) + h v_2(t) \\ v_2(t+h) = v_2(t) + h\text{fh} \end{cases} \tag{2.6.26}$$

这里 $v(t) = v_0(t) + h_1 v_2(t)$ 根据微分信号 $v_2(t)$ 向前预报 h_1 时间的值,对它进行滤波的值为 $v_1(t)$.

“先微分,后预报”的具体算法如下:

$$\begin{cases} v_0(t) = \sin(t) + n(t) \\ \text{fh} = \text{fhan}(v_1(t) - v_0(t), v_2(t), r, h_0) \\ v_1(t+h) = v_1(t) + h v_2(t) \\ v_2(t+h) = v_2(t) + h\text{fh} \\ \overline{v(t)} = v_1(t) + h_1 v_2(t) \end{cases} \tag{2.6.27}$$

这里 $v(t) = v_1(t) + h_1 v_2(t)$ 是在滤波值 $v_1(t)$ 的基础上,根据微分信号 $v_2(t)$ 向前预报 h_1 时间的值. 在这里,一般取预报时间 h_1, h_2 比滤波因子 h_0 稍大(1 倍 ~ 1.5 倍) 一些为好.

对信号 $v_0(t) = \sin(t) + \gamma n(t)$, $n(t)$ 为 $[-1, +1]$ 之间均匀分布白噪声,$\gamma = 0.1$,跟踪微分器中的快速因子 $r = 50$;滤波因子 $h_0 = 0.1$;预报时间各取 $h_1 = 1.5, h_2 = 0.2$. 用这些参数所作的仿真结果如图 2.6.21 所示. 图 2.6.21(b) 是局部放大的图形. 从仿真图看出“先预报,后微分”的信号 $v_1(t)$ 和“先微分,后预报”的信号 $\overline{v(t)}$ 相位补偿效果相当,但 $\overline{v(t)}$ 的滤波效果不如 $v_1(t)$. 这是因为“先预报,后微分”的办法是微分信号 $v_2(t)$ 所含噪声再进行一次滤波的结果. 在“先预报,后微分”的办法中预报时间 h_1 不能比滤波因子 h_0 大很多(如 $h_1 > 2h_0$),但在“先微分,后预报”办法中预报时间 h_2 是取比 h_0 大很多也是可以的.

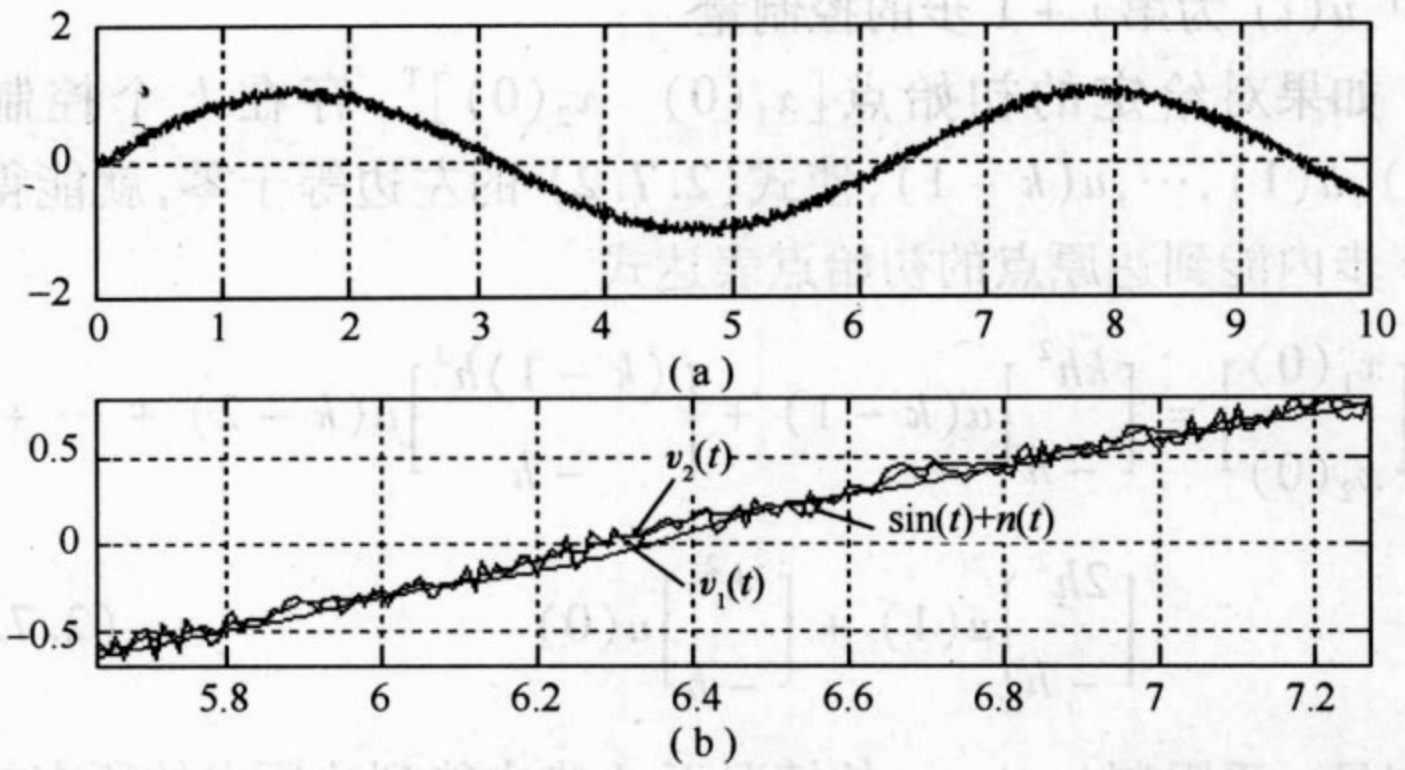


图 2.6.21

2.7 离散系统快速最优控制综合函数的推导

离散系统

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + hu, \qquad |u| \leqslant r \end{cases} \tag{2.7.1}$$

的快速最优控制综合函数的推导过程如下.

先确定能用控制序列 $u(0),u(1),\cdots,u(k)$ 来达到原点的初始点$[x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$ 的表达式,然后想法用$[x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$来表示出初始时刻的控制量 $u(0)$,那么这个控制量就是初始点$[x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$ 的最优控制量,从而这个表达式成为最优控制综合函数.

从初值$[x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$ 出发的系统(2.7.1) 解的表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & kh \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & (k-1)h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} u(0) + \cdots + \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} u(k-2) + \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} u(k-1) \tag{2.7.2}$$

式中,$u(i)$ 为第 $i+1$ 步的控制量.

如果对给定的初始点$[x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$,存在 k 个控制量 $u(0),u(1),\cdots,u(k-1)$,使式(2.7.2) 的左边等于零,就能得到在 k 步内能到达原点的初始点表达式

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kh^2 \\ -h \end{bmatrix} u(k-1) + \begin{bmatrix} (k-1)h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(k-2) + \cdots + \begin{bmatrix} 2h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(0) \tag{2.7.3}$$

控制量 u 受限制 $|u| \leqslant r$ 的情况下,k 步内能到达原点的所有初始点$[x_1 \quad x_2]$ 的全体称为 k - 等时区,记做 $G(k)$. 在式(2.7.3) 中,控制量 $u(i)$ 取满足 $|u(i)| \leqslant r$ 的所有可能的值,那么它就给出等时区 $G(k)$ 的表达式. 由于这个表达式是向量$\begin{bmatrix} ih^2 \\ -h \end{bmatrix}, i = 1,2,\cdots,$ k 的线性组合(加权和),而其权因子又满足 $|u(i)| \leqslant r$,因此 $G(k)$ 是凸的 $2k$ 边形($k=1$ 时为一线段). 图 2.7.1 画出的是 $k \leqslant 5$ 时的 $G(k)$. $G(1)$ 是以 a_{-1},a_{+1} 为顶点的线段;$G(2)$ 是以 a_{-2}, b_{-2},a_{+2},b_{+2} 为顶点的平行四边形;$G(3)$ 是一个六边形等.

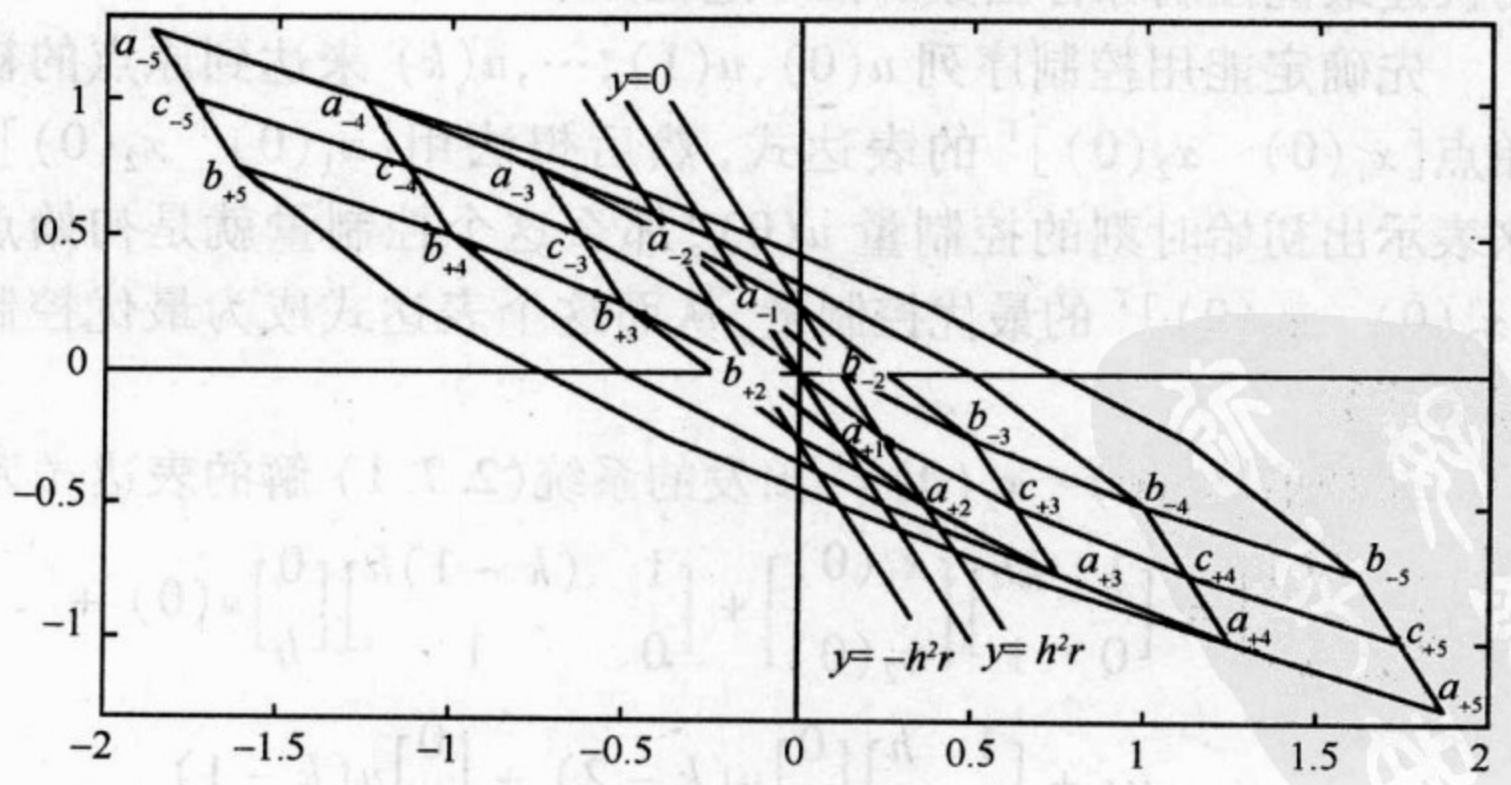


图 2.7.1

在图 2.7.1 中，点 a_{+k} 是控制量 u 全取 $+r$ 而沿折线 a_{+k}，$a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0$ 以 k 步到达原点的初始点，因此连接 a_{+k}，$a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0$ 的折线是一条到达原点的最速轨线；同样，点 a_{-k} 是控制量 u 全取 $-r$ 而沿折线 $a_{-k},a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0$，以 k 步到达原点的初始点，因此连接 $a_{-k},a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0$ 的折线是另一条到达原点的最速轨线；点 $b_{-k}(b_{+k})$，$k\geqslant 2$ 是第一步取 $u=-r(u=+r)$ 而到达点 $a_{+(k-1)}(a_{-(k-1)})$，然后全取 $u=+r(u=-r)$ 而沿折线 $a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0(a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0)$ 到达原点的初始点．线段 $b_{-k}a_{+k}$（线段 $b_{+k}a_{-k}$），$k\geqslant 2$，都是与线段 $a_{+1}a_{-1}$ 相平行，而其中点 $c_{+k}(c_{-k})$ 是第一步取 $u=0$ 而到达 $a_{+(k-1)}(a_{-(k-1)})$，然后全取 $u=+r(u=-r)$ 而沿折线 $a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0(a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0)$ 到达原点的初始点．连接点 $\cdots,a_{+k},a_{+(k-1)},\cdots,a_{+2},b_{+2},b_{+3},\cdots,b_{+(k-1)},b_{+k},\cdots$ 的折线，记做 Γ^{+}，其下方是控制量 u 取 $+r$ 的区域，而连接点 $\cdots,b_{-k},b_{-(k-1)},\cdots,b_{-2},a_{-2},a_{-3},\cdots,a_{-(k-1)},a_{-k},\cdots$ 的折线，记做 Γ^{-}，其上方是控制量 u 取 $-r$ 的区域．至于折线 Γ^{+} 和 Γ^{-} 所限定的区域内部，当 $k\geqslant 2$ 时，在线段 $b_{-k}a_{+k}$（线段 $a_{-k}b_{+k}$）上的点，$\alpha a_{+k}+(1-\alpha)b_{-k},0<\alpha<1,(\alpha a_{-k}+(1-\alpha)b_{+k})$ 上，只要控制量取 $u=\alpha r-(1-\alpha)r=(2\alpha-1)r(u=-(2\alpha-1)r)$，下一步就到达点 $a_{+(k-1)}(a_{-(k-1)})$，然后就沿折线 $a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0(a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0)$ 到达原点．由于折线段 $a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0$ 和 $a_{-(k-1)}\cdots,a_{-1},0$ 都是最速轨线段，根据动态规划最优性原理，点 $\alpha a_{+k}+(1-\alpha)b_{-k}(\alpha b_{+k}+(1-\alpha)a_{-k})$ 上的控制量 $u=(2\alpha-1)r(u=-(2\alpha-1)r)$ 是快速最优控制．特别，线段 $b_{-k}a_{+k}$（线段 $b_{+k}a_{-k}$）的中点 $c_{+k}=(a_{+k}+b_{-k})/2,(c_{-k}=(a_{-k}+b_{+k})/2)$ 上，控制量 u 取零而到达点 $a_{+(k-1)}(a_{-(k-1)})$，然后就沿折线 $a_{+(k-1)},\cdots,a_{+1},0(a_{-(k-1)},\cdots,a_{-1},0)$ 到达原点．连接点 $\cdots,c_{-k},c_{-(k-1)},\cdots,c_{-2},c_{+2},c_{+3},\cdots,c_{+(k-1)},c_{+k},\cdots$ 折线记做 Γ^{0}．

实际上，折线 Γ^{+} 和 Γ^{-} 所限定的带性区域是控制量 u 取 $-r$ 和 $+r$ 的之间值 $(2\alpha-1)r$，且 $0<\alpha<1$ 的区域．

现在来确定，等时区 $G(2)$ 之外，过折线 Γ^{+},Γ^{-} 和 Γ^{0} 上的折

点 $a_{\pm k}, b_{\pm k}, c_{\pm k}$ 的曲线方程.

由公式(2.7.3)知,点 a_{+k} 和 a_{-k} 的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kh^2r + (k-1)h^2r + \cdots + h^2r \\ -hr - hr - \cdots - hr \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{k^2h^2r}{2} + \frac{kh^2r}{2} \\ -khr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2^2 - hrx_2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kh^2r - (k-1)h^2r - \cdots - h^2r \\ hr + hr + \cdots + hr \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{k^2h^2r}{2} - \frac{kh^2r}{2} \\ khr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2^2 + hrx_2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

于是,点 $a_{\pm i}, i \geqslant 2$,位于两个半条抛物线上:

$$x_1 = -\frac{hrx_2 - x_2^2}{2r}, x_2 < 0 \quad (-a_{+k} \text{所在曲线});$$

$$x_1 = -\frac{hrx_2 + x_2^2}{2r}, x_2 > 0 \quad (-a_{-k} \text{所在曲线});$$

$$x_1 = \frac{-sx_2^2 - hrx_2}{2r}, s = \operatorname{sign}(x_2) \tag{2.7.4}$$

点 b_{+k} 和 b_{-k} 的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kh^2r + \cdots + 2h^2r - h^2r \\ -hr - \cdots - hr + hr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(k+1)kh^2r}{2} - 2h^2r \\ -(k-2)hr \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_2^2 - 5hrx_2 + 2h^2r^2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kh^2r - \cdots - 2h^2r + h^2r \\ hr + \cdots + hr - hr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{(k+1)kh^2r}{2} + 2h^2r \\ (k-2)hr \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{x_2^2 + 5hrx_2 + 2h^2r^2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

于是，点 $b_{\pm i}, i \geqslant 2$，分别位于两个半条抛物线上：

$$x_1 = \frac{2h^2r^2 - 5hrx_2 + x_2^2}{2r}, x_2 < 0 \quad (-b_{-k} \text{ 所在曲线})；$$

$$x_1 = -\frac{2h^2r^2 + 5hrx_2 + x_2^2}{2r}, x_2 > 0 \quad (-b_{+k} \text{ 所在曲线})；$$

即 $$x_1 = \frac{-s2h^2r^2 - 5hrx_2 - sx_2^2}{2r}, s = \operatorname{sign}(x_2) \tag{2.7.5}$$

点 c_{+k} 和 c_{-k} 的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kh^2r + \cdots + 2h^2r + 0 \\ -hr - \cdots - hr - 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(k+1)kh^2r}{2} - h^2r \\ -(k-1)hr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_2^2 - 3hrx_2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -kh^2r - \cdots - 2h^2r + 0 \\ hr + \cdots + hr - 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{(k+1)kh^2r}{2} + h^2r \\ (k-1)hr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_2^2 + 3hrx_2}{2r} \\ x_2 \end{bmatrix}$$

于是，点 $c_{\pm i}, i \geqslant 2$，分别位于两个半条抛物线上：

$$x_1 = -\frac{3hrx_2 - x_2^2}{2r}, x_2 < 0 \quad (-c_{+k} \text{ 所在曲线})；$$

$$x_1 = -\frac{3hrx_2 + x_2^2}{2r}, x_2 > 0 \quad (-c_{-k} \text{所在曲线});$$

$$x_1 = \frac{-3hrx_2 - sx_2^2}{2r}, s = \text{sign}(x_2) \tag{2.7.6}$$

整理表达式(2.7.4) ~ 式(2.7.6)得到

$$\begin{cases} 2r(x_1 + hx_2) = -sx_2^2 + hrx_2; \\ 2r(x_1 + hx_2) = -sx_2^2 - 3hrx_2 - s2h^2r^2; \\ 2r(x_1 + hx_2) = -sx_2^2 - hrx_2 \end{cases}$$

记$y = x_1 + hx_2, s = \text{sign}(x_2)$,那么这些半抛物线在等时区$G(2)$之外的部分都位于两条直线:

$$y = x_1 + hx_2 = hr; y = x_1 + hx_2 = -hr$$

所限定的区域之外,即这些半抛物线都位于满足

$$|y| \geqslant hr \tag{2.7.7}$$

的区域,从而上述表达式可改写为

$$\begin{cases} \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2} - shr\right)^2 = \dfrac{h^2r^2 - 8rys}{4}, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } a_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2} + shr\right)^2 = \dfrac{h^2r^2 - 8rys}{4}, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } b_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2}\right)^2 = \dfrac{h^2r^2 - 8rys}{4}, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } c_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \end{cases}$$

开平方这些等式两边,但右边开方应取与x_2相同的符号,于是得

$$\begin{cases} x_2 - s\dfrac{\sqrt{h^2r^2 - 8rys} - hr}{2} = shr, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } a_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ x_2 - s\dfrac{\sqrt{h^2r^2 - 8rys} - hr}{2} = -shr, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } b_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ x_2 - s\dfrac{\sqrt{h^2r^2 - 8rys} - hr}{2} = 0, & |y| \geqslant hr(\text{过点 } c_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \end{cases}$$

(2.7.8)

由于这些半抛物线所处的位置上有符号关系：

$$s = \operatorname{sign}(x_2) = -\operatorname{sign}(y) \tag{2.7.9}$$

因此上式又变成

$$\begin{cases} x_2 + \dfrac{\sqrt{h^2r^2 + 8r|y|} - hr}{2}\operatorname{sign}(y) = -hr\operatorname{sign}(y)(\text{过点 } a_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ x_2 + \dfrac{\sqrt{h^2r^2 + 8r|y|} - hr}{2}\operatorname{sign}(y) = hr\operatorname{sign}(y)(\text{过点 } b_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \\ x_2 + \dfrac{\sqrt{h^2r^2 + 8r|y|} - hr}{2}\operatorname{sign}(y) = 0(\text{过点 } c_{\pm i} \text{ 的对接抛物线}) \end{cases} \tag{2.7.10}$$

现在，在等时区 $G(2)$ 之外，即由不等式 $|x_1 + hx_2| = |y| \geqslant hr$ 限定的区域内，定义函数

$$a(x_1, x_2, r, h) = x_2 + \frac{\sqrt{h^2r^2 + 8r|y|} - hr}{2}\operatorname{sign}(y), |y| \geqslant hr \tag{2.7.11}$$

那么有

$$\begin{cases} a(x_1, x_2, r, h)|_{a_{+i}, b_{+i}, i \geqslant 2} = -hr \\ a(x_1, x_2, r, h)|_{a_{-i}, b_{-i}, i \geqslant 2} = hr \\ a(x_1, x_2, r, h)|_{c_{+i}, c_{-i}, i \geqslant 2} = 0 \end{cases} \tag{2.7.12}$$

用 $\widetilde{\Gamma}^+, \widetilde{\Gamma}^-, \widetilde{\Gamma}^0$ 分别记等式

$$\begin{aligned} &a(x_1, x_2, r, h) = -hr; \\ &a(x_1, x_2, r, h) = hr; \\ &a(x_1, x_2, r, h) = 0 \end{aligned} \tag{2.7.13}$$

所确定的曲线，那么，在等时区 $G(2)$ 之外，曲线 $\widetilde{\Gamma}^+, \widetilde{\Gamma}^-, \widetilde{\Gamma}^0$ 分别和折线 $\Gamma^+, \Gamma^-, \Gamma^0$，在折点上完全重合，而且有

$$\begin{cases} a(x_1, x_2, r, h) \leqslant -hr(\text{点}(x_1, x_2) \text{ 在曲线 } \widetilde{\Gamma}^+ \text{ 的下方}) \\ a(x_1, x_2, r, h) \geqslant hr(\text{点}(x_1, x_2) \text{ 在曲线 } \widetilde{\Gamma}^- \text{ 的上方}) \\ |a(x_1, x_2, r, h)| \leqslant hr(\text{点}(x_1, x_2) \text{ 在曲线 } \widetilde{\Gamma}^+ \text{ 和 } \widetilde{\Gamma}^- \text{ 限定的区域}) \end{cases} \tag{2.7.14}$$

于是定义函数

$$\mathrm{sat}(x,\delta) = \begin{cases} \mathrm{sign}(x), & |x| > \delta \\ \dfrac{x}{\delta}, & |x| \leqslant \delta \end{cases}$$

时,在等时区 $G(2)$ 之外,即当 $|y| \geqslant hr$ 时,快速最优控制函数可近似(由于折线 Γ^+,Γ^- 和曲线 $\widetilde{\Gamma}^+,\widetilde{\Gamma}^-$ 之间有一点微小差别)地定义为

$$u = -r\mathrm{sat}(a(x_1,x_2,r,h),hr), |y| \geqslant hr \quad (2.7.15)$$

下面考察等时区 $G(2)$ 内的快速最优控制综合函数. 等时区 $G(2)$ 的表达式为

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} h^2 \\ -h \end{bmatrix} u(0) =$$

$$\begin{bmatrix} 2h^2 & h^2 \\ -h & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (2.7.16)$$

因此 $G(2)$ 是以 $a_{+2} = \begin{bmatrix} 3h^2r \\ -2hr \end{bmatrix}, b_{-2} = \begin{bmatrix} h^2r \\ 0 \end{bmatrix}, a_{-2} = \begin{bmatrix} -3h^2r \\ 2hr \end{bmatrix}, b_{+2} = \begin{bmatrix} -h^2r \\ 0 \end{bmatrix}$ 为顶点的平行四边形. 在线段 $a_{-2}b_{-2}$ 上的点的坐标为 $\begin{bmatrix} (1-4\alpha)h^2r \\ 2\alpha hr \end{bmatrix}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\alpha = 1$ 时是点 a_{-2}, $\alpha = 0$ 时是点 b_{-2}. 从这个点出发,取 $u = -r$,走一步的结果为

$$\begin{bmatrix} (1-4\alpha)h^2r \\ 2\alpha hr \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 2\alpha hr \\ -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-2\alpha)h^2r \\ -(1-2\alpha)hr \end{bmatrix}$$

这里,α 从0变到1画出的就是线段 $a_{-1}a_{+1}$,而这个线段就是等时区 $G(1)$. 因此,线段 $a_{-2}b_{-2}$ 上的快速最优控制值应该是 $u = -r$. 同理可知,线段 $a_{+2}b_{+2}$ 上的快速最优控制值应该是 $u = +r$. 容易验证,在线段 $c_{-2}c_{+2}$ 上,取 $u = 0$ 就能到达线段 $a_{-1}a_{+1}$,即等时区 $G(1)$,因

此线段 $c_{-2}c_{+2}$ 上的快速最优控制值应该是 $u = 0$. 实际上,等时区 $G(2)$ 的边界是由四条直线

$$x_1 + 2hx_2 = y + hx_2 = + h^2 r \quad (\text{线段 } a_{-2}b_{-2} \text{ 所在直线}),$$

$$x_1 + 2hx_2 = y + hx_2 = - h^2 r (\text{线段 } a_{+2}b_{+2} \text{ 所在直线}),$$

$$y = x_1 + hx_2 = + h^2 r (\text{线段 } a_{+2}b_{-2} \text{ 所在直线}),$$

$$y = x_1 + hx_2 = - h^2 r (\text{线段 } a_{-2}b_{+2} \text{ 所在直线})$$

所围成(图 2.7.2). 对前两式除以 h 知,等时区 $G(2)$ 是由两个线性函数所限定的区域:

$$\left| \frac{x_1 + 2hx_2}{h} \right| = \left| x_2 + \frac{y}{h} \right| \leqslant hr; \mid x_1 + hx_2 \mid = \mid y \mid \leqslant h^2 r \tag{2.7.17}$$

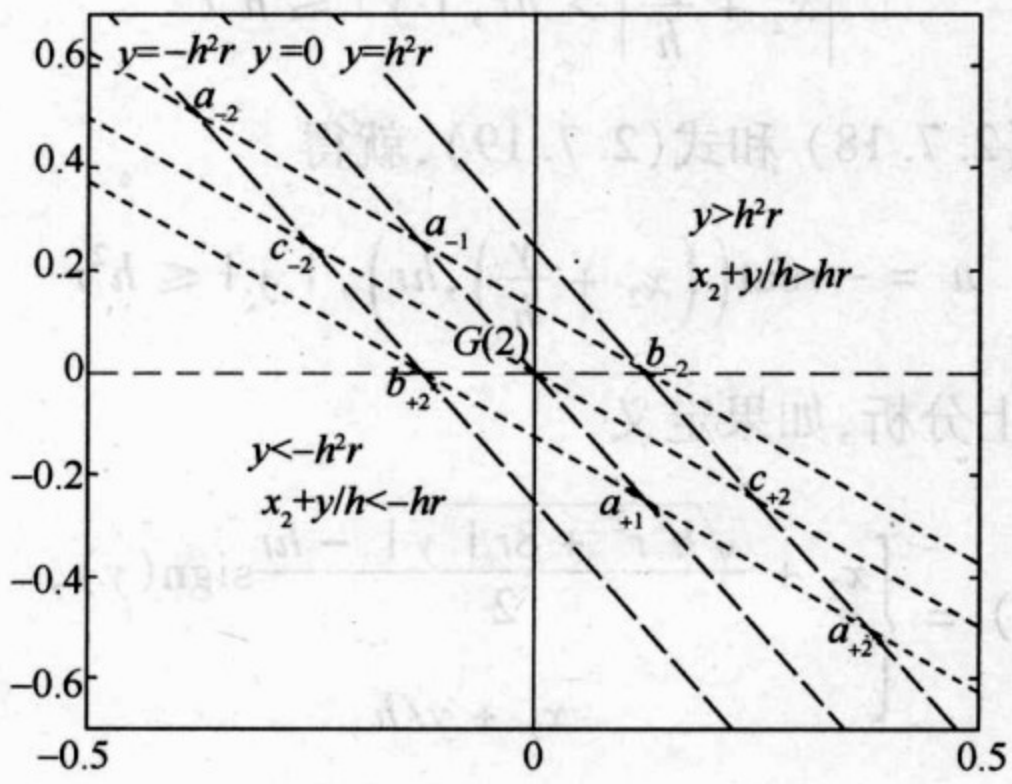


图 2.7.2

从表达式(2.7.16) 解出 $u(0)$,得

$$u(0) = \frac{x_1(0) + 2hx_2(0)}{h^2} = \frac{x_2(0) + y(0)/h}{h},$$

$$\left| x_2(0) + \frac{y(0)}{h} \right| \leqslant hr, \mid y(0) \mid \leqslant h^2 r$$

去掉初始时刻的标记“(0)”,又得

$$u = \frac{x_1 + 2hx_2}{h^2} = \frac{x_2 + y/h}{h}, \left| x_2 + \frac{y}{h} \right| \leqslant hr, |y| \leqslant h^2 r$$

(2.7.18)

这是等时区 $G(2)$ 之内的最优控制综合函数. 但是,如果一个点的坐标 (x_1, x_2) 满足 $|y| \leqslant h^2 r$,而 $|x_2 + y/h| > hr$,那么它位于两条平行线 $y = x_1 + hx_2 = \pm hr$ 之间,但处于 $G(2)$ 之外,即线段 $a_{-2}b_{-2}$ 的上方或线段 $a_{+2}b_{+2}$ 的下方. 当这种 x_1, x_2 处于线段 $a_{-2}b_{-2}$ 的上方,即 $x_2 + y/h > hr$ 时,最优控制应该是 $u = -r$,而处于线段 $a_{+2}b_{+2}$ 的下方,即 $x_2 + y/h < -hr$ 时,最优控制应该取 $u = r$,即

$$u = -r\text{sign}\left(x_2 + \frac{y}{h}\right) = -r\text{sign}\left(\frac{x_2 + hy}{h}\right),$$

$$\left| x_2 + \frac{y}{h} \right| > hr, |y| \leqslant h^2 r \qquad (2.7.19)$$

统一表达式(2.7.18) 和式(2.7.19),就得

$$u = -r\text{sat}\left(\left(x_2 + \frac{y}{h}\right), hr\right), |y| \leqslant h^2 r \qquad (2.7.20)$$

根据以上分析,如果定义

$$a(x_1, x_2, r, h) = \begin{cases} x_2 + \dfrac{\sqrt{h^2 r^2 + 8r|y|} - hr}{2}\text{sign}(y), & |y| > h^2 r \\ x_2 + y/h, & |y| \leqslant h^2 r \end{cases}$$

(2.7.21)

那么由表达式(2.7.15) 和式(2.7.20) 就得离散系统(2.7.1) 的快速最优控制综合函数表达式

$$u = -r\text{sat}(a(x_1, x_2, r, h), hr) \qquad (2.7.22)$$

这样,综合式(2.7.18) ~ 式(2.7.22),我们可以给出计算快速最优控制综合函数的如下具体算法:

$$u = \text{fhan}(x_1, x_2, r, h):$$

$$
\begin{cases}
d = rh \\
d_0 = hd \\
y = x_1 + hx_2 \\
a_0 = \sqrt{d^2 + 8r\,|\,y\,|} \\
a = \begin{cases} x_2 + \dfrac{(a_0 - d)}{2}\mathrm{sign}(y), & |\,y\,| > d_0 \\ x_2 + \dfrac{y}{h}, & |\,y\,| \leqslant d_0 \end{cases} \\
\mathrm{fhan} = -\begin{cases} r\,\mathrm{sign}(a), & |\,a\,| > d \\ r\dfrac{a}{d}, & |\,a\,| \leqslant d \end{cases}
\end{cases}
\tag{2.7.23}
$$

或去掉条件语句,利用符号函数可改写成

$$
\begin{cases}
d = rh^2, a_0 = hx_2, y = x_1 + a_0 \\
a_1 = \sqrt{d(d + 8\,|\,y\,|)} \\
a_2 = a_0 + \mathrm{sign}(y)(a_1 - d)/2 \\
s_y = (\mathrm{sign}(y + d) - \mathrm{sign}(y - d))/2 \\
a = (a_0 + y - a_2)s_y + a_2 \\
s_a = (\mathrm{sign}(a + d) - \mathrm{sign}(a - d))/2 \\
\mathrm{fhan} = -r\left(\dfrac{a}{d} - \mathrm{sign}(a)\right)s_a - r\,\mathrm{sign}(a)
\end{cases}
\tag{2.7.24}
$$

这就是我们常要用到的快速最优控制综合函数的离散形式.

下面考察这个快速最优控制综合函数的线性近似公式. 为此先考查等时区 $G(2)$ 内的快速最优控制综合函数,详细分析见本节相关内容.

在这里快速最优控制综合函数的计算基本上是线性的,因此

线性近似的关键在于等时区 $G(2)$ 之外区域的函数值的近似.

在等时区 $G(2)$ 之外,图2.7.3中上面曲线上方是最优控制量取 $-r$ 的区域,而下面曲线的下方是最优控制量取 $+r$ 的区域,中间曲线是最优控制量取0,而上下两条曲线夹着的区域是最优控制量取开区间 $(-r, +r)$ 内值的区域. 上、下、中间三条曲线的表达式分别为式(2.7.8)中的三个方程.

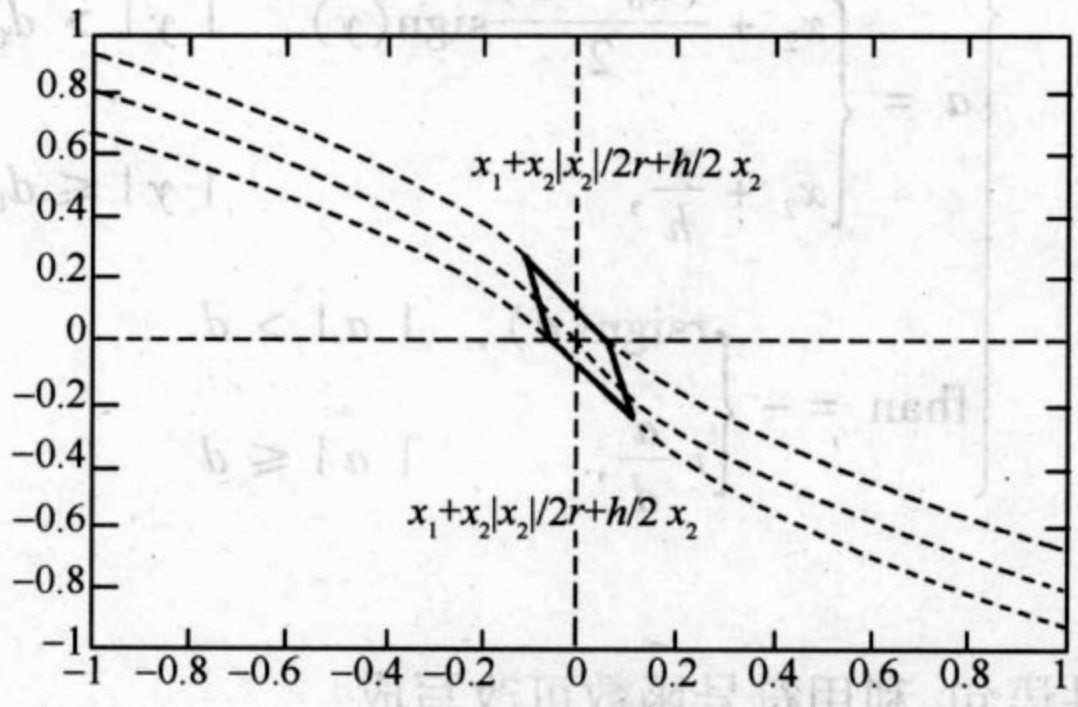


图 2.7.3

$$\frac{h^2r^2 - 8rys}{4} = \begin{cases} \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2} - shr\right)^2 = x_2^2 - shrx_2 + \dfrac{h^2r^2}{4} \\ \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2} + shr\right)^2 = x_2^2 + 3shrx_2 + \dfrac{9}{4}h^2r^2 \\ \left(x_2 + s\dfrac{hr}{2}\right)^2 = x_2^2 + shrx_2 + \dfrac{h^2r^2}{4} \end{cases} \tag{2.7.25}$$

$$\frac{h^2r^2 - 8rys}{4} = \begin{cases} x_2^2 - shrx_2 + \dfrac{h^2r^2}{4} \\ x_2^2 + 3shrx_2 + \dfrac{9}{4}h^2r^2 \\ x_2^2 + shrx_2 + \dfrac{h^2r^2}{4} \end{cases} \tag{2.7.26}$$

两边乘符号函数 s 得

$$\frac{sh^2r^2 - 8ry}{4} = \begin{cases} x_2 \mid x_2 \mid - hrx_2 + s\dfrac{h^2r^2}{4} \\ x_2 \mid x_2 \mid + 3hrx_2 + s\dfrac{9}{4}h^2r^2 \\ x_2 \mid x_2 \mid + hrx_2 + s\dfrac{h^2r^2}{4} \end{cases} \tag{2.7.27}$$

由于 $y = x_1 + hx_2$，两边除 $2r$，得

$$0 = \begin{cases} x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} + \dfrac{h}{2}x_2 \\ x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} + \dfrac{5}{2}hx_2 + sh^2r \\ x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} + \dfrac{3}{2}hx_2 \end{cases} \tag{2.7.28}$$

根据上述推理，可以给出快速最优控制综合函数的如下近似表达式

$$\begin{cases} y = x_1 + hx_2 \\ z = x_2 + \dfrac{y}{h} \\ a = x_1 + \dfrac{h}{2}x_2 + \dfrac{\mid x_2 \mid x_2}{2r} \\ \text{if}(\mid z \mid \leqslant hr \text{ and } \mid y \mid \leqslant h^2r) \\ \text{then} \\ \quad u = -r\ \text{sat}(z, hr) \\ \text{else} \\ \quad u = -r\text{sign}(a) \\ \text{endif} \end{cases} \tag{2.7.29}$$

或

$$
\begin{cases}
d = h^2 r, a_0 = hx_2 \\
y = x_1 + a_0, z = y + a_0 \\
a = y + a_0(|a_0|/d - 1)/2 \\
\text{if}(|z| \leqslant d \text{ and } |y| \leqslant d) \\
\text{then} \\
u = -r\text{sat}(z,d) \\
\text{elseif} \\
u = -r\text{sign}(a) \\
\text{endif}
\end{cases}
\tag{2.7.30}
$$

利用符号函数又可以改写成

$$
\begin{cases}
d = h^2 r, a_0 = hx_2 \\
y = x_1 + a_0, z = y + a_0 \\
a = y + a_0(|a_0|/d - 1)/2 \\
s_y = (\text{sign}(y - d) - \text{sign}(y + d))/2 \\
s_z = (\text{sign}(z - d) - \text{sign}(z + d))/2 \\
u = -r((z - \text{sign}(z) - \text{sign}(a))s_y s_z + \text{sign}(z) + \text{sign}(a))
\end{cases}
\tag{2.7.31}
$$

式(2.7.31)的运算只含线性运算和符号运算．可以作为公式(2.7.23)的线性近似公式．

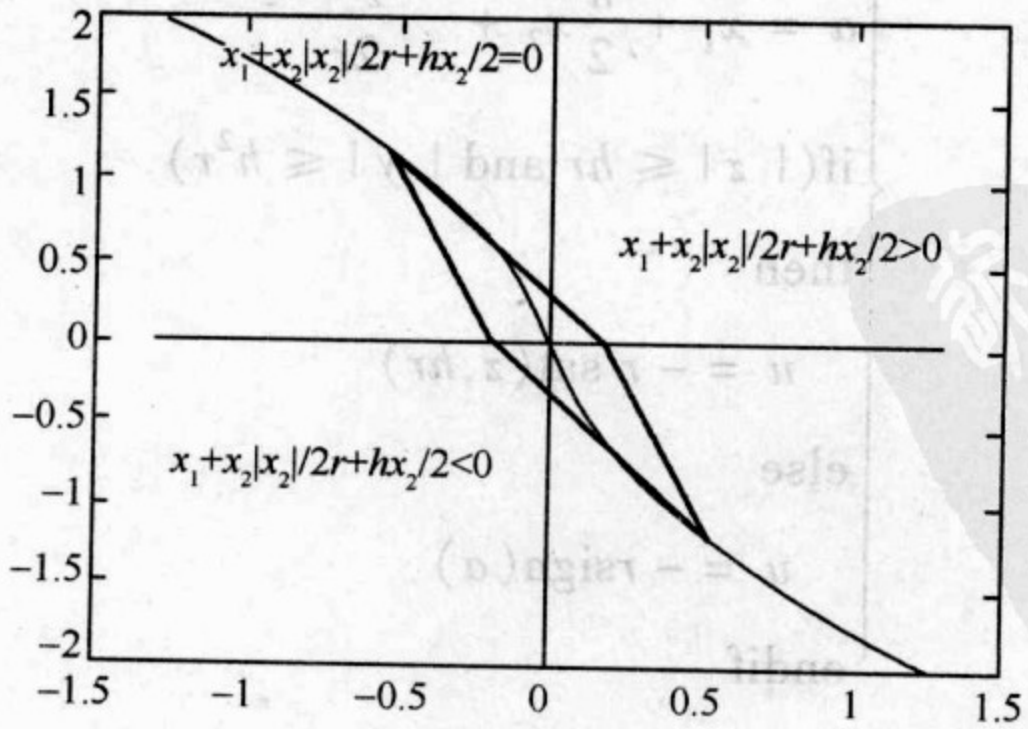


图 2.7.4

第三章　非光滑反馈的功能和效率

对动力学系统中引入控制力作用使其成为受控系统. 反馈机制是经典动力学系统中所没有而受控系统所固有的机制. 反馈机制的引入能使系统的性能在很大范围内按人们的意愿得到改善. 反馈机制可以使线性受控系统变成非线性受控系统,反之,在很多情况下也可以使非线性受控系统变成线性受控系统,从而反馈机制使受控系统中的“线性”与“非线性”之间的鸿沟变得模糊起来. 在受控系统中的反馈机制(特别是负反馈)还具有抑制微小不确定扰动作用的能力. 但是,不同的反馈形式在抑制扰动能力方面是有很大差异. 本章将说明不同的反馈形式在改造系统动态性能和抑制不确定扰动方面有很不同的效果,因此需要探讨比较合适的、对抑制不确定扰动更有效的反馈形式用来改善闭环控制系统的性能是很有意义的.

3.1　非线性状态反馈

考察二阶非线性控制系统

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x,\dot{x},u) \\ y = x \end{cases}$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$,则它变成多元一阶微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2,u) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

式中,变量 u 是控制量. 控制的目的是对系统施加合适的控制力 u 使系统的输出 y 跟踪某一事先给定的设定值 v_0 或设定轨线 $v(t)$(或实时可知的轨线,但不一定事先确知).

假定系统的状态变量 x_1, x_2 是随时能够获取的.

这里有完全不同的两种问题:

(1) 函数 $f(x_1, x_2, u)$ 已知且对任意 v,函数方程

$$f(x_1, x_2, u) = v \tag{3.1.2}$$

可解(如当 f 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial u} \neq 0$ 时);

(2) 函数 $f(x_1, x_2, u)$ 完全不知道,或其中含有不确定因素.

关于前一种情形,从方程(3.1.2) 解出 u,得

$$u = k(x_1, x_2, v) \tag{3.1.3}$$

(即 $f(x_1, x_2, k(x_1, x_2, v)) = v$),这时对系统(3.1.1) 实施状态反馈(3.1.3),就得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, k(x_1, x_2, v)) = v \end{cases} \tag{3.1.4}$$

这是一个纯积分器串联型的线性控制系统. 然后对它再实施误差反馈(假定 $v_1(t)$ 为设定轨线)

$$\begin{cases} e_1 = v_1(t) - x_1, e_2 = \dot{v}_1 - x_2 \\ v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases} \tag{3.1.5}$$

那么只要适当选取参数 β_1, β_2,就能达到系统输出 $y = x_1$ 跟踪目标值 $v_1(t)$ 的控制目的.

更为一般的,欲使闭环系统具有给定的动态特性,如让闭环具有与给定的动态系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = g(y_1, y_2) \end{cases} \tag{3.1.6}$$

一样的特性,那么先用非线性状态反馈(3.1.3) 把非线性控制系统(3.1.1) 变成纯积分器串联型线性控制系统(3.1.4),然后再实

施状态反馈

$$v = g(x_1, x_2) \tag{3.1.7}$$

那么系统最后变成所希望的与系统(3.1.6)一样的动态系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

用状态反馈把“非线性控制系统”转化成“线性控制系统”的这种能力是在一般的常微分方程理论中所没有,而只在控制系统中的状态反馈机制所特有的独特功能. 这是我们在1979年对一类非线性控制系统提出的,后来被称为“直接反馈线性化方法”的基本思想.

如果原控制系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u \end{cases} \tag{3.1.8}$$

而函数$f(x_1, x_2)$,$g(x_1, x_2) \neq 0$均已知,且系统的状态变量x_1, x_2都能获取,则取状态反馈

$$u = \frac{v - f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} \tag{3.1.9}$$

那么就有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u = \\ \qquad f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)\dfrac{v - f(x_1, x_2)}{g(x_1, x_2)} = v \end{cases} \tag{3.1.10}$$

闭环系统也变成了积分器串联型的线性控制系统(3.1.4).

进一步,对如下形式非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, g(u, \dot{u})) \end{cases} \tag{3.1.11}$$

只要对任意v, U从代数方程

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, U) = v \\ g(u, \dot{u}) = U \end{cases} \tag{3.1.12}$$

能解出

$$\begin{cases} U = h_0(x_1, x_2, v) \\ \dot{u} = h_1(u, U, v) \end{cases} \tag{3.1.13}$$

那么原系统变成如下两个系统

$$\sum_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = v \end{cases}$$

和

$$\sum_2 : \dot{u} = h_1(u, U(x_1, x_2, v)) \tag{3.1.14}$$

其中系统 $\sum_1$ 是线性控制系统,其控制量为 v. 如果确定了 $v(t)$,那么可以确定出对应的轨线 $x_1(t), x_2(t)$,从而函数 $U(x_1(t), x_2(t), v(t)) = U(t)$ 也被确定,因此只要有了 u 的初值 $u(0)$,就能从方程(3.1.14)确定出实际需要的控制量 $u(t)$. 在这里,为了能够确定出控制量 $u(t)$,需要微分方程(3.1.14)对任意 $U(t)$ 应该稳定才行. 但是微分方程(3.1.14)相当于原系统的零点系统,而其稳定性相当于原系统的最小相位系统.

在这里,我们把量 $U(t)$ 作为“虚拟控制量”. 先根据控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, U) \end{cases}$$

来确定出虚拟控制量 $U(t)$,然后根据关系式

$$g(\dot{u}, u) = U$$

确定出实际的控制量 $u(t)$.

例如,线性最小相位系统的传递函数

$$W(s) = \frac{s + c_1}{s^2 + a_1 s + a_2}, c_1 > 0 \tag{3.1.15}$$

的多项式表示为

$$\begin{cases} (s^2 + a_1 s + a_2)x = (s + c_1)u \\ y = x \end{cases} \tag{3.1.16}$$

于是其状态变量实现为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + c_1u + \dot{u} \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.1.17}$$

对这个系统相应于(3.1.12)的代数方程为

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, g(u, \dot{u})) = -a_2x_1 - a_1x_2 + U = v \\ g(u, \dot{u}) = c_1u + \dot{u} = U \end{cases} \tag{3.1.18}$$

而相当于式(3.1.13)的解为

$$\begin{cases} U = v + a_2x_1 + a_1x_2 \\ \dot{u} = -c_1u + U \end{cases} \tag{3.1.19}$$

现在假定 $a_1 = a_2 = c_1 = 1$,那么原系统(3.1.17)变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u + \dot{u} \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.1.20}$$

对应于式(3.1.18)的方程为

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + U = v \\ u + \dot{u} = U \end{cases} \tag{3.1.21}$$

现在取

$$v = -4x_1 - 3.5x_2 + 4 \tag{3.1.22}$$

那么

$$U = -3x_1 - 2.5x_2 + 4$$

而闭环系统变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3.5x_2 + 4 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.1.23}$$

式(3.1.21)的第二个方程变成

$$\dot{u} = -u - 3x_1 - 2.5x_2 + 4 \tag{3.1.24}$$

显然,把微分方程(3.1.24)的解代到方程(3.1.20)就能实现所

希望的闭环系统(3.1.23) 的动态行为,而式(3.1.21) 的第二个方程式或方程(3.1.24) 就是系统的零点方程$(s + c_1)u = U$,这个方程稳定意味着$c_1 = 3 > 0$,即原系统为最小相位系统.

对积分器串联型线性控制系统(3.1.4) 再实施状态反馈

$$v = k_1(x_1, x_2) + v_1 \tag{3.1.25}$$

使闭环系统变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = k_1(x_1, x_2) + v_1 \end{cases} \tag{3.1.26}$$

在这里,可以选取适当的状态反馈$v = k_1(x_1, x_2) + v_1$,使闭环系统(3.1.26) 具有我们所希望的动态特性. 如取线性状态反馈

$$v = -k_1x_1 - k_2x_2 \tag{3.1.27}$$

那么得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1x_1 - k_2x_2 \end{cases} \tag{3.1.28}$$

由于这个系统的特征方程为

$$s^2 + k_2s + k_1 = 0$$

其根是此闭环系统的极点,因此这种线性反馈问题称为极点配置问题. 对这个系统输入正弦信号$\sin(\omega t)$,$\omega = 1$,取$k_1 = 100$,$k_2 = 3$ 时的仿真结果示于图 3.1.1.

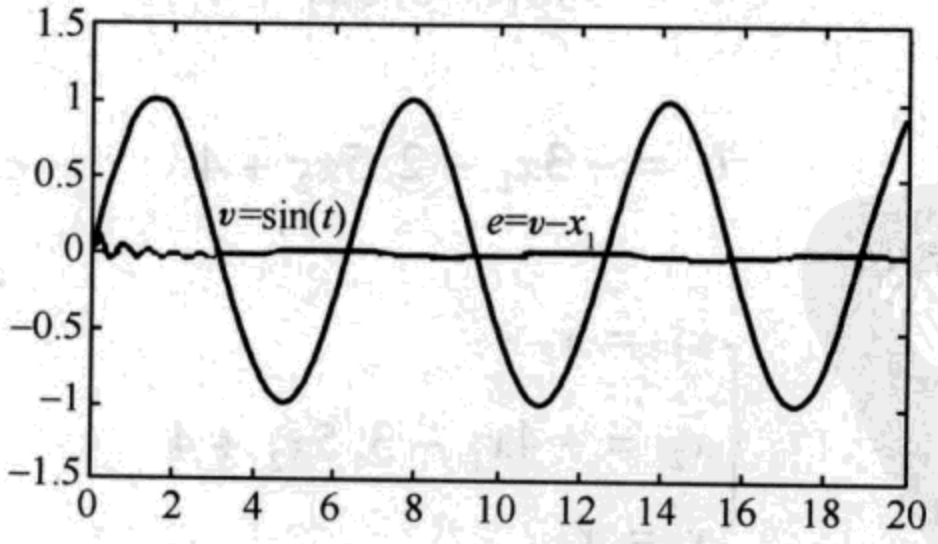


图 3.1.1

以后我们将会看到,线性状态反馈效率比起某些非线性状态反馈的效率要低,可以用适当的非线性状态反馈使闭环系统

(3.1.26) 具有更好的动态特性. 这就是用状态反馈对闭环配置非线性动态的思想. 如对积分器串联型系统(3.1.4),取非线性状态反馈

$$v = -r\mathrm{sign}\left(x_1 - v_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right)$$

那么所得的闭环系统变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\mathrm{sign}\left(x_1 - v_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \end{cases} \tag{3.1.29}$$

这个闭环系统的输出 $y(t)$ 将在加速度限制 $\pm r$ 的情况下以最快的方式跟踪输入信号 $v_1(t)$. 对这个系统输入余弦信号 $v_1(t) = \cos(t)$,并取参数 $r = 20$ 时的仿真结果示于图 3.1.2. 从这两个仿真例子可以看出,线性系统(3.1.27) 要跟踪输入信号,其参数 k_1 要取很大($r = 100$),但用非线性反馈(3.1.29) 来跟踪同样的输入信号,具有相当跟踪误差所需要的参数 r 才是 20,差一个数量级. 说明适当的非线性反馈比起线性反馈其效率高很多.

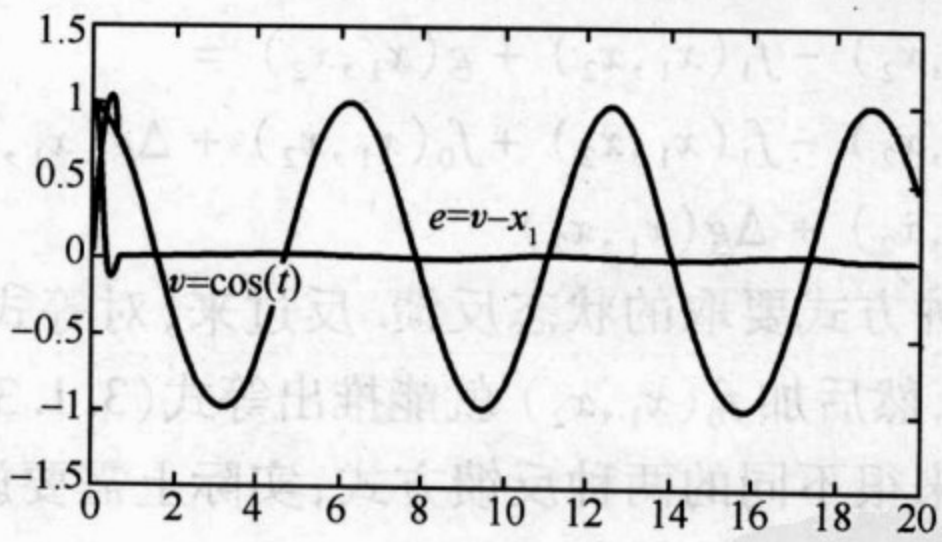


图 3.1.2

在用状态反馈消去原有的动态特性,再用状态反馈配置所需新的动态特性时,有两种不同的方式:① 先全部消去已有的全部动态特性,然后配置所需的新的动态特性;② 在已有的动态特性中保留对配置新的动态特性有利的部分,只消除对配置新的动态特性不利的部分,再用状态反馈来补充成新的动态特性. 在这两种方式中,似乎后一种方式所需的控制量会小一些,但实际上这两种

方式所需的控制量是完全等价的.

例如,对系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_0(x_1,x_2) + f_1(x_1,x_2) + u\end{cases} \tag{3.1.30}$$

用状态反馈要配置出新的动态特性

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1,x_2)\end{cases} \tag{3.1.31}$$

这里$f_0(x_1,x_2)$是对配置新动态时有利的部分. 假定对旧的动态特性$f_0(x_1,x_2)$只需补充$\Delta g(x_1,x_2)$就得所需的新的动态特性

$$g(x_1,x_2) = f_0(x_1,x_2) + \Delta g(x_1,x_2) \tag{3.1.32}$$

为了得到这个新的动态特性,在系统(3.1.30)中取状态反馈

$$u = -f_1(x_1,x_2) + \Delta g(x_1,x_2) \tag{3.1.33}$$

就可以了. 但按前一种方式应取状态反馈

$$u = -f_0(x_1,x_2) - f_1(x_1,x_2) + g(x_1,x_2) \tag{3.1.34}$$

但是由于有关系式

$$\begin{aligned}&-f_0(x_1,x_2) - f_1(x_1,x_2) + g(x_1,x_2) = \\ &-f_0(x_1,x_2) - f_1(x_1,x_2) + f_0(x_1,x_2) + \Delta g(x_1,x_2) = \\ &-f_1(x_1,x_2) + \Delta g(x_1,x_2)\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

这就是后一种方式要取的状态反馈. 反过来,对等式(3.1.33)先减$f_0(x_1,x_2)$,然后加$f_0(x_1,x_2)$就能推出等式(3.1.34),这说明在形式上看起来很不同的两种反馈方式,实际上需要施加的控制量是完全一致的.

例 设有被控系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + f(x_1,x_2) + u\end{cases}$$

希望用状态反馈把它改造成新的动态系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 3.5x_2\end{cases}$$

为此可以采用如下两种不同形式的状态反馈(① 先全部消除原有动态特性,然后配置所需动态特性;② 先消除不利的动态特性,再补充配置所需的动态特性)

$$u = -((-x_1 + 2x_2) + f(x_1, x_2)) + (-4x_1 - 3.5x_2)$$

$$u = -(2x_2 + f(x_1, x_2) + (-3x_1 - 3.5x_2)$$

很明显这两种形式上的不同反馈,在步骤的细节上是不同的,但实质上其效果是完全相同的,都是

$$u = -f((x_1, x_2) + (-3x_1 - 5.5x_2)$$

因此不存在后者比前者节省控制力的问题.

以上讨论是在系统的模型完全已知且所有状态变量完全能够直接获取的情况下展开的. 但是如何解决系统模型不确定并只能直接获取部分状态变量的情形呢?

为此我们先考察状态反馈抑制系统不确定扰动的能力. 在这里非线性反馈的优越性更为明显.

3.2 线性反馈与非光滑反馈

这里我们要考察状态变量的不同反馈形式对抑制系统不确定扰动作用能力上的差异.

先考察一个简单的例子. 设有一阶受控对象

$$\dot{x} = w(x,t) + u \tag{3.2.1}$$

对它实施状态的线性反馈

$$u = -kx, k > 0 \tag{3.2.2}$$

得闭环系统

$$\dot{x} = -kx + w(x,t) \tag{3.2.3}$$

今取状态反馈(3.2.2),使其状态变量 x,在扰动 $w(x,t)$ 的作用之下,尽可能快地收敛到零,这里的 k 称做反馈增益.

对闭环系统(3.2.3) 的两边乘 x,得

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + kx^2 = xw(x,t) \tag{3.2.4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} = -kx^2 + xw = -k\left(x - \frac{w}{2k}\right)^2 + \frac{w^2}{4k}$$

欲使$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} < 0$,必须

$$\left|x - \frac{w}{2k}\right| > \frac{|w|}{2k} \tag{3.2.5}$$

由于$\left|x - \frac{w}{2k}\right| > |x| - \frac{|w|}{2k}$,因此只要$|x| - \frac{|w|}{2k} > \frac{|w|}{2k}$,即

$$|x| > \frac{|w|}{k} \tag{3.2.6}$$

就满足不等式(3.2.5),从而有$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} < 0$. 这说明,只要$|x| > \frac{|w|}{k}$,在闭环系统的状态变量$x$总是要变小.

进一步假定:存在两常数m, w_0,满足

$$|w(x,t)| < \left|\frac{x}{m}\right| + w_0, \forall x,t > 0 \tag{3.2.7}$$

那么,当x满足不等式

$$|x| > \frac{\left|\frac{x}{m}\right| + w_0}{k}, \text{即} |x| > \frac{m}{m - \frac{1}{k}}\frac{w_0}{k} \tag{3.2.8}$$

时,就有$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} < 0$. 从这个不等式知:

(1) 若$w_0 = 0$,而取反馈增益$k > \frac{1}{m}$,那么对所有x都有$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} < 0$,闭环系统(3.2.3) 渐近稳定,所有解都趋近于0.

(2) 若$w_0 \neq 0$,而取$k > \frac{1}{m}$,那么,当$|x| > \frac{m}{m - 1/k}\frac{w_0}{k}$时,才有$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t} < 0$,因此闭环系统的解$x(t)$最终都要进入区间$\left[-\frac{m}{m - 1/k}\frac{w_0}{k}, \frac{m}{m - 1/k}\frac{w_0}{k}\right]$之内,即状态变量$x(t)$最终都要进入

小于$\frac{m}{m-1/k}\frac{w_0}{k}$的范围. 这个范围叫做闭环系统在反馈增益$k$之下的稳态误差或静差范围而其大小基本上是与量$\frac{w_0}{k}$成正比. 因此可以说: 在线性反馈(3.2.2)之下,闭环系统的稳态误差是与反馈增益k成反比.

尽可能减小闭环系统的稳态误差是控制系统设计的很重要的目的. 减小稳态误差的办法通常有两种:① 增大反馈增益k. 但是反馈增益的增大常常引起别的不良后果,如当误差较大时反馈量过大,执行机构提供不了那么大的能量来实现;被控对象的线性特性是在工作点附近的局部特性,大的反馈增益引起变量的大幅变化,这就超出线性特性范围,容易引起复杂的非线性现象等. ② 引入积分反馈来消除稳态误差. 但积分反馈的引入也会带来其它不良后果,如易产生控制量饱和、使系统变迟钝、容易产生不良振荡等.

现在我们把线性反馈(3.2.2)改造成非线性反馈

$$u = -k|x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x), 0 < \alpha < 1 \tag{3.2.9}$$

代入原对象(3.2.1)得闭环系统

$$\dot{x} = -k|x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x) + w(x,t) \tag{3.2.10}$$

利用微分公式

$$\frac{1}{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}|x|^{1+\alpha}}{\mathrm{d}t} = |x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

对(3.2.10)式两边乘$|x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x)$,得

$$\frac{1}{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}|x|^{1+\alpha}}{\mathrm{d}t} = -k|x|^{2\alpha} + |x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x)w(x,t) =$$

$$-k\left(|x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x) - \frac{w}{2k}\right)^2 + \frac{w^2}{4k}$$

欲使$\frac{\mathrm{d}|x|^{1+\alpha}}{\mathrm{d}t} < 0$,必须

$$\left||x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x) - \frac{w(x,t)}{2k}\right| > \frac{|w(x,t)|}{2k} \tag{3.2.11}$$

但由于$\left|\,|x|^{\alpha}\operatorname{sign}(x)-\frac{w}{2k}\right|>|x|^{\alpha}-\frac{|w|}{2k}$,因此只要

$$|x|^{\alpha}>\frac{|w(x,t)|}{k},\text{即}|x|>\left(\frac{|w(x,t)|}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\tag{3.2.12}$$

就满足不等式(3.2.11),从而有$\frac{\mathrm{d}|x|^{1+\alpha}}{\mathrm{d}t}<0$.

现在进一步假定:存在两常数m,w_0,使函数$w(x,t)$满足

$$|w(x,t)|<w_0+\left|\frac{x}{m}\right|^{\alpha}$$

那么,当$|x|^{\alpha}>\frac{m^{\alpha}}{m^{\alpha}-1/k}\frac{w_0}{k}$时,即

$$|x|>\left(\frac{m^{\alpha}}{m^{\alpha}-1/k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{w_0}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\tag{3.2.13}$$

时,满足不等式(3.2.12),从而就有$\frac{\mathrm{d}|x|^{1+\alpha}}{\mathrm{d}t}<0$,因此闭环系统(3.2.10)的解$x(t)$最终都要进入区间$\left[-\left(\frac{m^{\alpha}}{m^{\alpha}-1/k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{w_0}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\left(\frac{m^{\alpha}}{m^{\alpha}-1/k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{w_0}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$之内,即$x(t)$最终都要进入误差小于$\left(\frac{m^{\alpha}}{m^{\alpha}-1/k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{w_0}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$的范围.

显然,在非线性反馈(3.2.9)之下,闭环系统的稳态误差是与量$\left(\frac{w_0}{k}\right)$的$\frac{1}{\alpha}$次方成正比. 在通常情形都有$k>|w_0|$,因此只要$0\leqslant\alpha<1,\left(\frac{1}{\alpha}>1\right)$,就有

$$\left(\frac{w_0}{k}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ll\frac{w_0}{k}$$

当反馈增益k超过扰动w_0的作用范围,非线性反馈(3.2.9)所留

下的稳态误差远小于线性反馈(3.2.2)留下的稳态误差.

如果假定 $w(x,t) \equiv w_0 = \text{const} > 0$,闭环系统(3.2.8)变成

$$\dot{x} = -k|x|^{\alpha}\text{sign}(x) + w_0 \tag{3.2.14}$$

让右段函数等于零,得系统平衡点方程

$$-k|x|^{\alpha}\text{sign}(x) + w_0 = 0 \tag{3.2.15}$$

这个方程有唯一的根 —— 系统的平衡点 $x_0 = (w_0/k)^{1/\alpha}$. 系统(3.2.13)的所有解最终都要稳定在这个平衡点上. 因此这个平衡点就代表闭环系统的稳态误差. 显然,对固定的 w_0 和反馈增益 k 来说,反馈幂次 α 的不同所确定的稳态误差 $(w_0/k)^{1/\alpha}$ 差别很大.

如取 $w_0 = 1, k = 10$,而 α 分别取 2, 1, 0.5, 0.25 时,稳态误差 $(w_0/k)^{1/\alpha}$ 分别是 $0.1^{1/2} = 0.316, 0.1^{1/1} = 0.1, 0.1^{1/0.5} = 0.01, 0.1^{1/0.25} = 0.0001$. 随着 α 趋近于 0,稳态误差 $(w_0/k)^{1/\alpha}$ 也趋近于 0. 特别,当 $\alpha = 0$ 时,$(w_0/k)^{1/\alpha} = 0$.

平衡点方程(3.2.15)的根是曲线 $y = k|x|^{\alpha}\text{sign}(x)$ 和直线 $y = w_0$ 的交叉点在 x 轴上的坐标. 图 3.2.1 显示的是 $w_0 = 1, k = 1.5$,而 α 分别取 2, 1, 1/2, 1/3, 1/5 时的稳态误差(x 轴上的坐标),幂次 α 越小,稳态误差就越小,而且随着 α 趋于 0,稳态误差也趋于 0.

若把 w_0 看作对系统(3.2.14)的外部扰动,则稳态误差 $(w_0/k)^{1/\alpha}$ 代表反馈 $u = -k|x|^{\alpha}\text{sign}(x)$ 抑制扰动 w_0 的效果. 上述现象说明:从抑制扰动的能力来看,大幂次的反馈不如小幂次的反馈,而从抑制扰动的效率来看,增大反馈增益 k 的效率不如减小幂次 α 的效力. 反馈增益 k 的增大只能以反比例的方式减小稳态误差,但幂次 α 的减小就以数量级的方式减小稳态误差.

当 $\alpha \neq 1$ 时,反馈(3.2.9)是非线性的. 但是这个非线性,在 $\alpha > 1$ 时和 $\alpha < 1$ 时,具有完全不同的性质. $\alpha > 1$ 时,函数 $k|x|^{\alpha}\text{sign}(x)$ 处处可微,是光滑的,但是 $\alpha < 1$ 时,在 $x = 0$ 处不可微,导数趋近无穷大,是非光滑的. 从上面简单例子看,在非线性反馈中,光滑反馈抑制外扰的效率远比非光滑反馈差. 在光滑反馈

的范围来看“线性反馈”抑制扰动的效率最好,但是在非光滑反馈的范围来看“线性反馈”却是抑制扰动能力最差的一个. 在反馈控制系统分析中,如果得到了误差衰减速度的“指数衰减率”的结果,一般认为是很满意的结果. 但是这只是在光滑反馈范围里面的“满意”结果,但在非光滑反馈领域,出现有限时间衰减是很平常的现象,而“指数衰减”却是“最不满意”的结果.

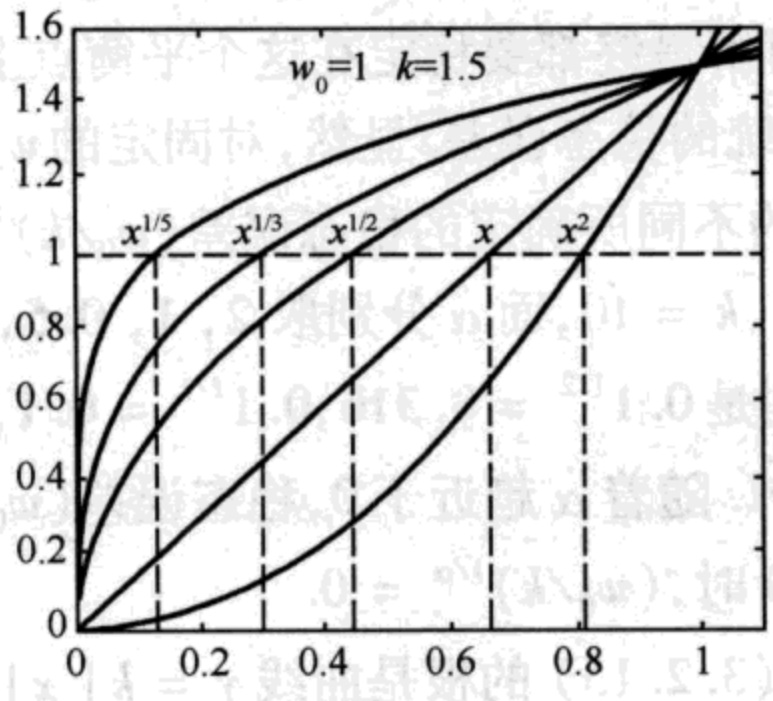


图 3.2.1

在反馈(3.2.9)中的幂次 α 减小到0,那么状态反馈变成

$$u = -k\text{sign}(x) \tag{3.2.16}$$

这时,不管扰动 $w(t)$ 在 $|w(t)| < w_0$ 范围内怎么变化,只要反馈增益 k 超过 w_0,闭环的稳态误差都变成0. 这种状态反馈完全抑制住了外扰作用. 这种闭环系统的稳态特性是与外扰 $w(t)$ 完全无关,是独立于外扰作用的. 这就是变结构控制对外扰具有独立性(或不变性)的基本机理.

上面讨论的是,在反馈(3.2.9)的作用之下,闭环的稳态特性.

下面,我们看看无外扰作用(即 $w_0 = 0$)时的误差衰减的动态特性. 在系统(3.2.14)中令 $w_0 = 0$,得

$$\dot{x} = -k|x|^{\alpha}\text{sign}(x) \tag{3.2.17}$$

这个系统有一般解的表达式:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign}(x_0)}{\left(\dfrac{1}{|x_0|^{\alpha-1}}+(\alpha-1)kt\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}},\alpha>1\\ x_0\mathrm{e}^{-kt},\alpha=1\\ \operatorname{sign}(x_0)(|x_0|^{1-\alpha}-(1-\alpha)kt)^{\frac{1}{1-\alpha}},\alpha<1\\ t\leqslant|x_0|^{1-\alpha}/k(1-\alpha)\end{cases}\tag{3.2.18}$$

式中，$x_0=x(0)$ 是初始误差. 从这个解的表达式知：

(1) 当 $\alpha>1$ 时(光滑反馈)，误差是以 $1/(kt)^{1/(\alpha-1)}$ 的速度衰减到 0.

(2) 当 $\alpha=1$ 时(线性反馈)，误差是以 e^{-kt} 的速度指数衰减.

(3) 当 $\alpha<1$ 时(非光滑反馈)，$T=|x_0|^{1-\alpha}/k(1-\alpha)$ 时刻，误差已变成 0，以有限时间衰减到 0. 图 3.2.2 显示的是初始误差 $x_0=1$，反馈增益 $k=1.5$，而反馈幂次 α 分别等于 2，1，0.5，0 时的误差衰减曲线.

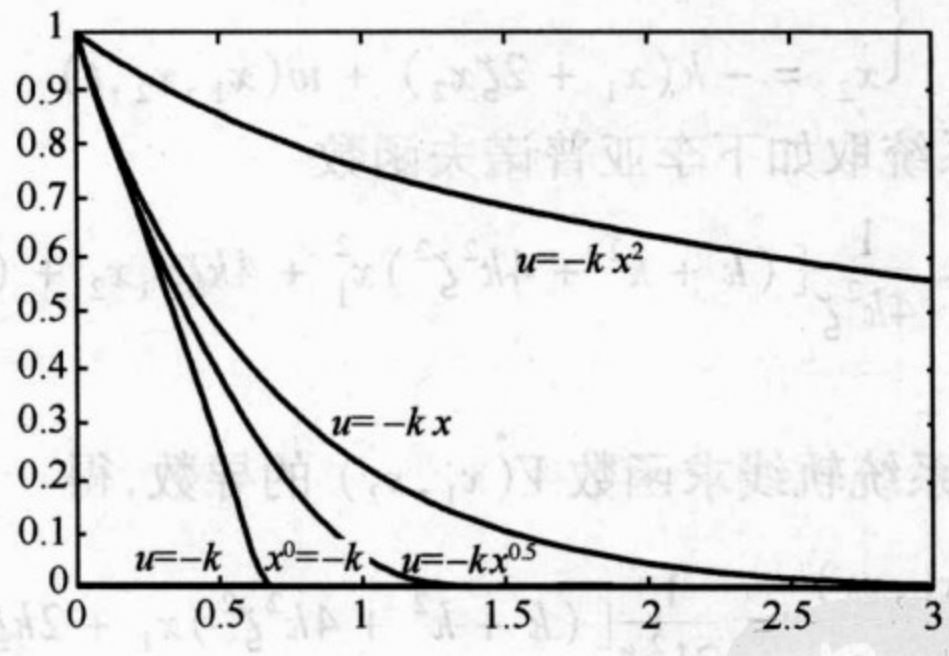


图 3.2.2

误差衰减的这些动态特性也表明：非光滑反馈的效率远比光滑反馈好. 所谓误差的指数衰减率只是光滑反馈范围里的理想结果，从非光滑反馈范围来看，当 $\alpha<1$ 时，都以有限时间衰减到 0，指数衰减率却成了效率最差的衰减率.

无论从闭环的稳态误差还是误差衰减的动态过程看，非光滑反馈比起大家熟悉的光滑反馈具有无可比拟的好处. $\alpha>1$ 确定的

光滑的误差反馈律具有小误差小增益，大误差大增益的特点，而 $\alpha < 1$ 确定的非光滑的误差反馈律，却具有小误差大增益，大误差小增益的特点. 非光滑的误差反馈律的这个特性却是控制工程界追求多年的误差反馈律.

下面，我们来讨论二阶系统的状态反馈抑制扰动的问题.

设有二阶受控系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(x_1, x_2, t) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{3.2.19}$$

其中，$w(x_1, x_2, t)$ 为除控制力之外的所有可能作用力的总和，包括已建模的动态、未建模的动态及各种外扰作用的总和.

今取如下线性状态反馈

$$u = -k(x_1 + 2\zeta x_2) \tag{3.2.20}$$

得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k(x_1 + 2\zeta x_2) + w(x_1, x_2, t) \end{cases} \tag{3.2.21}$$

对这个闭环系统取如下李亚普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{4k^2\zeta}[(k + k^2 + 4k^2\zeta^2)x_1^2 + 4k\zeta x_1 x_2 + (1 + k)x_2^2] \tag{3.2.22}$$

这时，沿闭环系统轨线求函数 $V(x_1, x_2)$ 的导数，得

$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2k^2\zeta}[(k + k^2 + 4k^2\zeta^2)x_1 + 2k\zeta x_2]$$

$$\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2k^2\zeta}[2k\zeta x_1 + (1 + k)x_2]$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2}(-kx_1 - 2k\zeta x_2 + w) =$$

$$\frac{1}{2k^2\zeta}[(k + k^2 + 4k^2\zeta^2)x_1 x_2 + 2k\zeta x_2^2] +$$

$$\frac{1}{2k^2\zeta}[2k\zeta x_1 + x_2 + kx_2](-kx_1 - 2k\zeta x_2 + w) =$$

$$-(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{k}x_1 w + \frac{1+k}{2k^2\zeta}x_2 w \tag{3.2.23}$$

$$\dot{V} = -\left(x_1 - \frac{w}{2k}\right)^2 - \left(x_2 - \frac{1+k}{4k^2\zeta}w\right)^2 + \left(1 + \frac{(1+k)^2}{4k^2\zeta^2}\right)\frac{w^2}{4k^2}$$

欲使 $\dot{V} < 0$ 成立，必须

$$\left(x_1 - \frac{w}{2k}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1+k}{4k^2\zeta}w\right)^2 > \left(1 + \frac{(1+k)^2}{4k^2\zeta^2}\right)\frac{w^2}{4k^2}$$

这个不等式的意义是，所有以矩形 $|x_1| \leqslant \frac{1}{2k}|w|$，$|x_2| \leqslant \frac{1}{2k}\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)|w|$ 之内的点为圆心，半径为 $\frac{|w|}{2k}\sqrt{1+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2}$ 的圆内点的并集之外，将有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 < 0$$

因此，当

$$|x_1| > \frac{|w|}{2k}\left[1 + \sqrt{1+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2}\right],$$

$$|x_2| > \frac{|w|}{2k}\left[\frac{1+k}{2k\zeta} + \sqrt{1+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2}\right]$$

时，就有 $\dot{V} < 0$. 如果 $\zeta > 0.5, k > 1$（一般情况下是要满足这个条件的），上面不等式可简化为

$$|x_1| > 3\frac{|w|}{k}, |x_2| > 3\frac{|w|}{k}$$

现在我们假定存在一常数 w_0，满足 $|w| < w_0$（在实际系统中做这样的假定并不苛刻，因为实际有意义的系统的运行，大部分都是在有限范围之内进行的），那么在 $\zeta > 0.5, k > 1$ 的情况下，只要系统状态满足不等式

$$|x_1| > 3\frac{w_0}{k}, |x_2| > 3\frac{w_0}{k}$$

就有 $\dot{V} < 0$，闭环系统的所有轨线都收敛到方形 $|x_1| \leqslant 3\frac{w_0}{k}$，$|x_2| \leqslant 3\frac{w_0}{k}$ 之内，因此闭环的稳态误差将限制在由不等式

$$|x_1| \leqslant 3\frac{w_0}{k}, |x_2| \leqslant 3\frac{w_0}{k} \tag{3.2.24}$$

限定的范围之内.

这说明，在线性状态反馈(3.2.20)的作用下，闭环系统抑制未知扰动 $w(x_1, x_2, t)$ 的能力是与量 $\left(\frac{w_0}{k}\right)$ 成正比.

下面对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(x_1, x_2, t) + u \end{cases}, |w(x_1, x_2, t)| < w_0$$

实施不同增益 k 的状态反馈 $u = -k(x_1 + 2\zeta x_2)$ 时的仿真结果.

实施这个状态反馈之后的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k(x_1 + 2\zeta x_2) + w(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

取 $k = 5, 10, 20$ 时，抑制扰动 $w(x_1, x_2, t) \equiv 1$ 的情况. 如 1.4 节所指出的那样，$k, 2k\zeta$ 之比为 $r^2, 2r$(见式(1.4.2))，因此 k 分别取 5，10，20 时，$2k\zeta$ 分别为 4.4732，6.324，8.944.

从这个仿真图 3.2.3 可以看出，k 越大，反馈抑制扰动的能力越大，其数量关系是与反馈增益 k 成反比.

下面看看非线性状态反馈

$$u = -k\left(|x_1|^{-\frac{1}{2}}x_1 + 2\zeta x_2\right) = -k\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}(x_1) + 2\zeta x_2\right) \tag{3.2.25}$$

的一些特性.

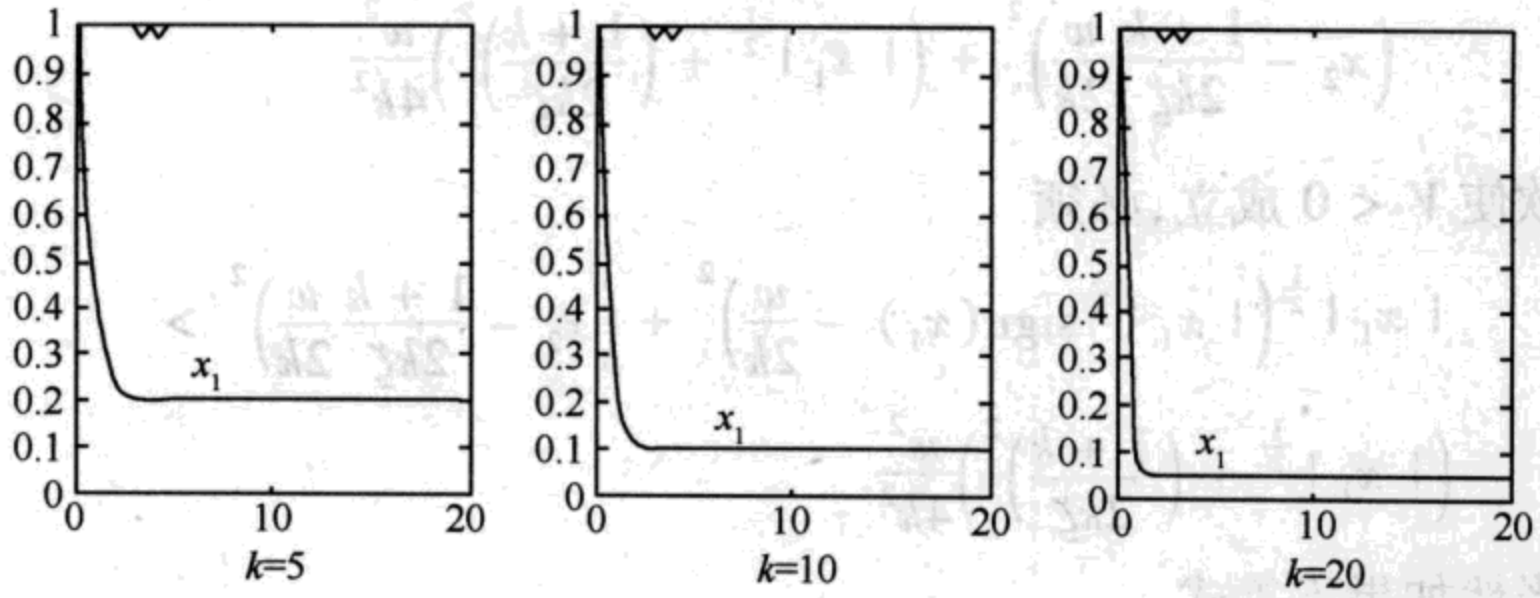


图 3.2.3

实施这个非线性状态反馈所得的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k\left(|x_1|^{-\frac{1}{2}}x_1 + 2\zeta x_2\right) + w(x_1, x_2, t) \end{cases} \tag{3.2.26}$$

对这个闭环系统,仿造前述线性反馈情形,取如下李亚普诺夫函数

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{3k^2\zeta}\left[(k + k^2 + 4k^2\zeta^2)|x_1|^{\frac{3}{2}} + 3k\zeta x_1 x_2 + \frac{3}{4}(1+k)x_2^2\right] \tag{3.2.27}$$

那么记 $A = 3k^2\zeta$,有

$$A\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{3}{2}(k + k^2 + 4k^2\zeta^2)|x_1|^{-\frac{1}{2}}x_1 + 3k\zeta x_2,$$

$$A\frac{\partial V}{\partial x_2} = 3k\zeta x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}kx_2$$

这时,沿闭环系统轨线求函数 $V(x_1, x_2)$ 的导数,得

$$\dot{V} = -(|x_1|^{\frac{3}{2}} + x_2^2) + 2\zeta(1 - |x_1|^{\frac{1}{2}})|x_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}(x_1)x_2 + x_1\frac{w}{k} + x_2\frac{1+k}{2k\zeta}\frac{w}{k}$$

$$\dot{V} = -(|x_1|^{\frac{3}{2}} + x_2^2) + x_1\frac{w}{k} + x_2\frac{1+k}{2k\zeta}\frac{w}{k} \tag{3.2.28}$$

可以把它整理成

$$\dot{V} = -\left(|x_1|^{\frac{3}{4}}\operatorname{sign}(x_1) - |x_1|^{\frac{1}{4}}\frac{w}{2k}\right)^2 -$$

$$\left(x_2-\frac{1+k}{2k\zeta}\frac{w}{2k}\right)^2+\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2\right)\frac{w^2}{4k^2}$$

欲使 $\dot{V}<0$ 成立,必须

$$|x_1|^{\frac{1}{2}}\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}(x_1)-\frac{w}{2k}\right)^2+\left(x_2-\frac{1+k}{2k\zeta}\frac{w}{2k}\right)^2>\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2\right)\frac{w^2}{4k^2}$$

当然如果不等式

$$|x_1|^{\frac{1}{2}}\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}(x_1)-\frac{w}{2k}\right)^2>\left(|x_1|^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2\right)\frac{w^2}{4k^2} \tag{3.2.29}$$

成立,那么不等式 $\dot{V}<0$ 必定成立. 由此当满足不等式

$$\frac{4k^2}{w^2}|x_1|>\left(1+\sqrt{\left(1+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2|x_1|^{\frac{-1}{2}}\right)}\right)^2 \tag{3.2.30}$$

时就有 $\dot{V}<0$. 这就是说,当点 (x_1,x_2) 处于不等式(3.2.30) 决定的区域时,经过该点的系统轨线终归要收敛到不等式

$$|x_1|<\frac{w^2}{4k^2}B,B=\frac{w^2}{4k^2}\left(1+\sqrt{\left(1+\left(\frac{1+k}{2k\zeta}\right)^2|x_1|^{\frac{-1}{2}}\right)}\right)^2 \tag{3.2.31}$$

决定的区域,因此 x_1 的稳态误差小于 $\frac{w^2}{4k^2}B$,这个稳态误差是与 k^2 成反比. 在一般情况下,反馈增益 k 是要取大于可能的扰动范围 w_0 的值,$\frac{w_0}{k}$ 总是小于 1 的. 因此非线性反馈时的闭环稳态误差(正比于 $\left(\frac{w_0}{k}\right)^2$) 比起线性反馈时的稳态误差(正比于 $\frac{w_0}{k}$) 小得多,可以相差好几个数量级. 显然,从抑制扰动的能力来看,合适的非光滑反馈(3.2.25) 比起线性反馈(3.2.20) 具有更强的扰动抑制能力.

下面给出在闭环系统(3.2.26) 中分别取 k 为 5,10,20,而 2ζ

也分别取成 5,10,20 所作的仿真结果，这个仿真结果示于图 3.2.4.

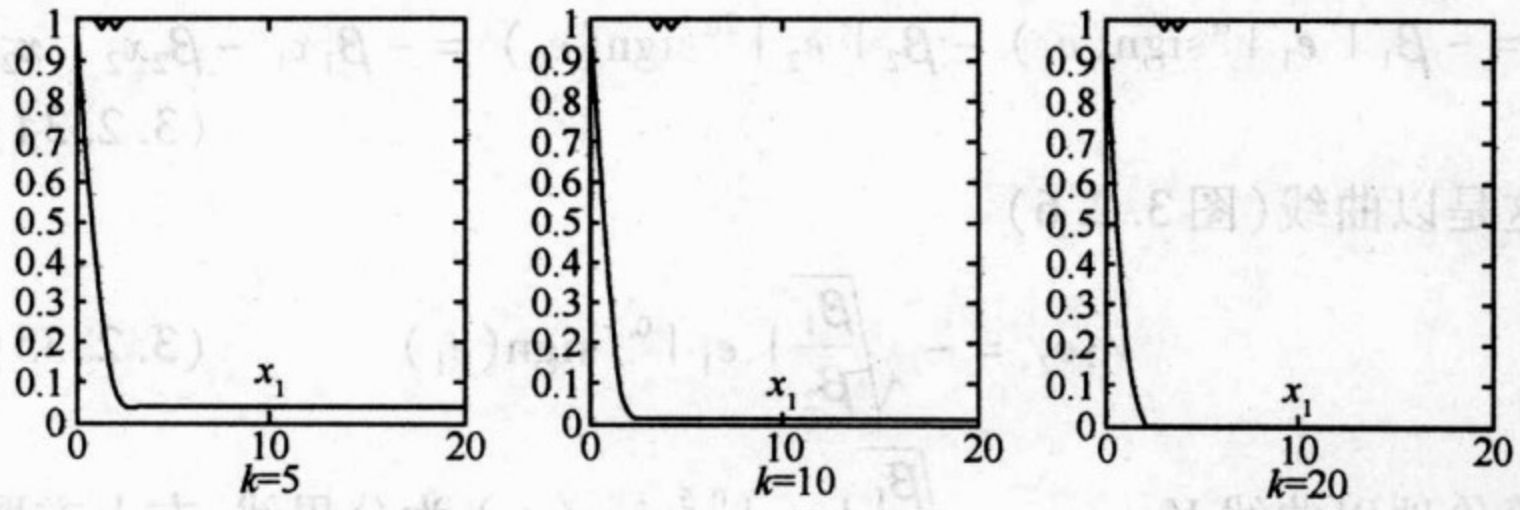


图 3.2.4

比较图 3.2.3 和图 3.2.4 中明显看出同样增益 k 的反馈作用之下，线性反馈和非线性反馈抑制扰动的不同效果.

下面比较线性和非线性 PD 反馈的一些几何性质.

线性 PD 反馈：$u = -\beta_1 e_1 - \beta_2 e_2$ (3.2.32)

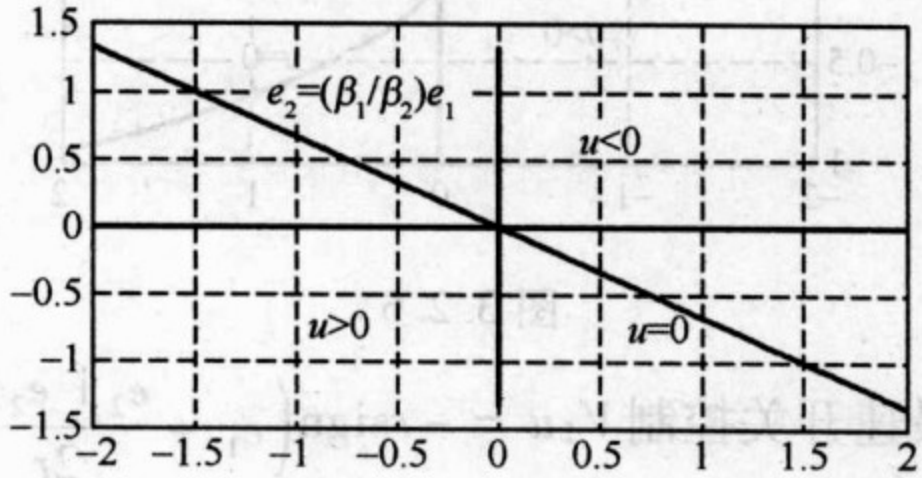


图 3.2.5

这是以 $k = -\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ 为斜率过原点的直线 $L: e_2 = -\dfrac{\beta_1}{\beta_2} e_1$ 作为分界线，右上方取 $u < 0$，左下方取 $u > 0$ 的控制律(图 3.2.5).

如果取 $u = -r\text{sign}(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$，那么这是以 $L: e_2 = -\dfrac{\beta_1}{\beta_2} e_1$ 为滑动曲线的变结构控制.

非线性 PD 反馈：$u = -\beta_1 | e_1 |^{\alpha} \text{sign}(e_1) - \beta_2 | e_2 |^{2\alpha} \text{sign}(e_2)$ (3.2.33)

这里如果记

$$x_1 = |e_1|^{\alpha}\mathrm{sign}(e_1), x_2 = |e_2|^{\alpha}\mathrm{sign}(e_2)$$

那么 $\mathrm{sign}(x_1) = \mathrm{sign}(e_1), \mathrm{sign}(x_2) = \mathrm{sign}(e_2)$，因此

$$u = -\beta_1|e_1|^{\alpha}\mathrm{sign}(e_1) - \beta_2|e_2|^{2\alpha}\mathrm{sign}(e_2) = -\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2|x_2| \tag{3.2.34}$$

这是以曲线(图 3.2.6)

$$V: e_2 = -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}|e_1|^{0.5}\mathrm{sign}(e_1) \tag{3.2.35}$$

等价地以曲线 $V: x_2 = -\sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}|x_1|^{0.5}\mathrm{sign}(x_1)$ 为分界线，右上方取 $u < 0$，左下方取 $u > 0$ 的控制律.

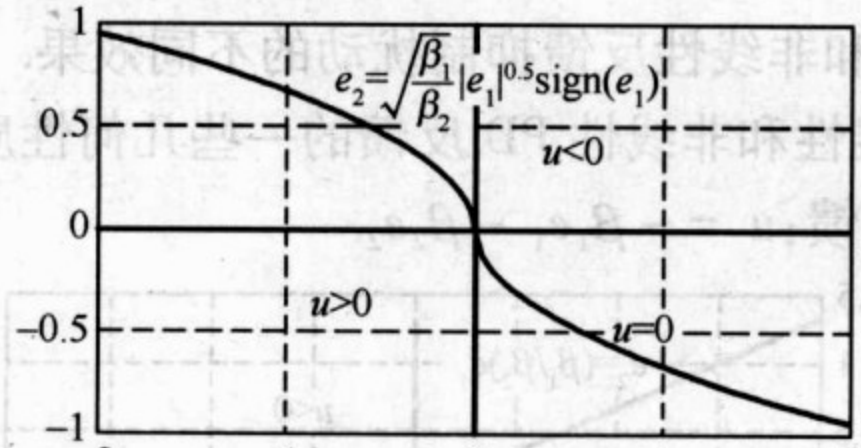


图 3.2.6

如果与最速开关控制 $V: u = -r\mathrm{sign}\left(e_1 + \frac{e_2|e_2|}{2r}\right)$ 比较，可以看出这个分界线就是加速度大小受限制 $r = \sqrt{\frac{\beta_1}{2\beta_2}}$ 时的二阶积分器串联系统的最速开关曲线.

如果取

$$u = -\sqrt{\frac{\beta_1}{2\beta_2}}\mathrm{sign}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}|e_1|^{\alpha}\mathrm{sign}(e_1) + |e_2|^{2\alpha}\mathrm{sign}(e_2)\right) \tag{3.2.36}$$

即 $u = -\sqrt{\frac{\beta_1}{2\beta_2}}\mathrm{sign}\left(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{\beta_1/\beta_2}\right)$，那么这是以曲线 V 为滑动曲线的变结构控制，也是二阶积分器串联系统的最速开关控制.

从以上的讨论看出,在反馈系统中有意识的引入合适的非线性结构,特别是非光滑结构,将显著改善闭环系统的动态特性. 因此开发利用非线性(特别是非光滑) 特性是反馈系统设计的很有意义的新课题.

这一节考察了连续的状态反馈之下线性反馈和非线性反馈的扰动抑制作用的差异,下一节我们考察不连续状态反馈抑制扰动的特殊作用.

3.3 最速反馈控制的不变性

下面将用变结构控制方法讨论具有直线滑动曲线的变结构控制和具有非线性滑动曲线的变结构控制在扰动抑制能力上的差异,然后指出最速控制综合函数形式的反馈控制所具有的特殊性质.

我们考察的被控对象为如下二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w + u \end{cases} \tag{3.3.1}$$

式中,w 是对系统的所有扰动的总和,包括系统已建模动态、未建模动态(可称为系统的内扰) 和所有外扰等作用的总和;u 是控制输入,可以取系统状态变量函数的反馈形式:$u = u(x_1, x_2)$.

今设

$$s = s(x_1, x_2) = 0, s(0,0) = 0 \tag{3.3.2}$$

是把整个相平面分成 $s > 0$ 和 $s < 0$ 的两部分并且通过原点且位于二,四象限的曲线.

对被控对象(3.3.1) 取如下形式的反馈控制:

$$u = -r_1 \operatorname{sign}(s) \tag{3.3.3}$$

得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}(s) + w \end{cases} \tag{3.3.4}$$

先考察滑动曲线(3.3.2) 为直线

$$s = x_1 + kx_2 \tag{3.3.5}$$

的情形(直线 $s = 0$ 位于二,四象限). 这时,

$$u = -r_1 \operatorname{sign}(x_1 + kx_2) \tag{3.3.6}$$

的闭环系统(3.3.4) 成为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}(x_1 + kx_2) + w \end{cases} \tag{3.3.7}$$

变结构控制系统到达滑动曲线 $s = 0$ 的"到达条件" 为

$$s\dot{s} < 0 \tag{3.3.8}$$

由于

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial s}{\partial x_2}(-r_1 \operatorname{sign}(s) + w) =$$

$$x_2 + k(-r_1 \operatorname{sign}(s) + w)$$

$$s\dot{s} = sx_2 - ks(r_1 \operatorname{sign}(s) - w) =$$

$$|s|((x_2 + kw)\operatorname{sign}(s) - kr_1)$$

欲使此式成为负,必须满足

$$\left(\frac{x_2}{k} + w\right)\operatorname{sign}(s) < r_1 \tag{3.3.9}$$

如果假定 w 是不确定扰动,满足限制条件 $|w| < r_2 < r_1$,那么当不等式

$$\left|\frac{x_2}{k}\right| < r_1 - r_2 \tag{3.3.10}$$

成立时保证满足"到达条件"(式(3.3.8)),也就是说,在直线 $s = 0$ 上,不等式(3.3.10) 所限定的线段 L(如图 3.3.1 上连接点 a, b 的线段) 上的点是满足"到达条件" 的.

由于闭环系统(3.3.7) 的加速度的绝对值 r 始终大于 $r_1 - r_2$,线段 L 邻近的轨线总是以有限时间到达 L(图 3.3.1). 在 L 上的速度方向是按菲利波夫定义,是由 L 两侧速度方向的凸组合,即 $\alpha[x_2, -r_1 + w] + (1 - \alpha)[x_2, r_1 + w] = [x_2, (1 - 2\alpha)r_1 + w]$ 与线段 L 的相切条件 $x_2/k + (1 - 2\alpha)r_1 + w = 0$ 来决定. 于是线段 L 上的运动方程变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{x_2}{k} \end{cases}$$

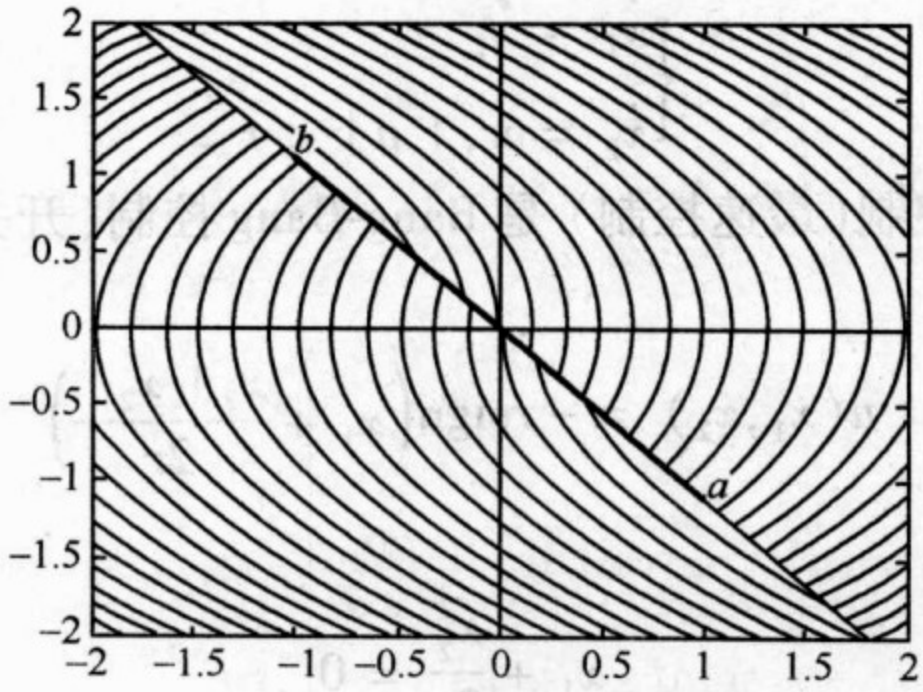


图 3.3.1

是与扰动 w 无关. 其运动是沿线段 L,以指数衰减率收敛于原点. 至于远离 L 的轨线,由于系统(3.3.7)的加速度为 $\dot{x}_2 = -r_1\text{sign}(s) + w < 0$,要么经有限次切换后到达线段 L 的非原点,然后以指数衰减率收敛于原点,要么,特殊情形,经几次切换,以有限时间直接到达原点. 不管什么情形,只要扰动 w 的作用不超出 $r_2(<r_1)$ 界限,变结构系统(3.3.7)能抑制其作用而使所有轨线都收敛于原点,但基本上是以指数衰减率收敛的.

以上就是以直线(3.3.5)为滑动直线的变结构控制系统轨线的特性.

在这里,直线 $s = x_1 + kx_2 = 0$ 的斜率 $-1/k$ 是常值. 但变结构系统(3.3.7)的轨线的斜率则是 $\dfrac{-r_1\text{sign}(s) + w}{x_2}$,只要状态变量 x_2 的绝对值足够大,就有 $\left|\dfrac{-r_1\text{sign}(s) + w}{x_2}\right| < \dfrac{1}{k}$,总有一部分轨线要从直线 $s = 0$ 离去,因而不能满足“到达条件”. 因此,要想在整个滑动曲线上都要满足“到达条件”,滑动曲线不能取固定斜率的直线,必须取斜率随 $|x_2|$ 的增大而变小的曲线.

下面我们考察一种非直线形滑动曲线所生成的变结构控制的扰动抑制能力.

我们知道,二阶纯积分器串联型系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \mid u \mid < r \end{cases} \tag{3.3.11}$$

的时间最优控制(最速控制)是 Bang-Bang 控制(开关控制),而其综合函数为

$$u(x_1, x_2) = -r\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \tag{3.3.12}$$

是抛物线

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2r} = 0$$

的上半部分以 x_2 轴为镜面反射所得曲线的右上半部分区域上 u 取 $-r$,左下半部分区域上 u 取 $+r$ 的控制律. 这里,曲线

$$x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} = 0 \tag{3.3.13}$$

是系统(3.3.11)的最速开关曲线(图 3.3.2).

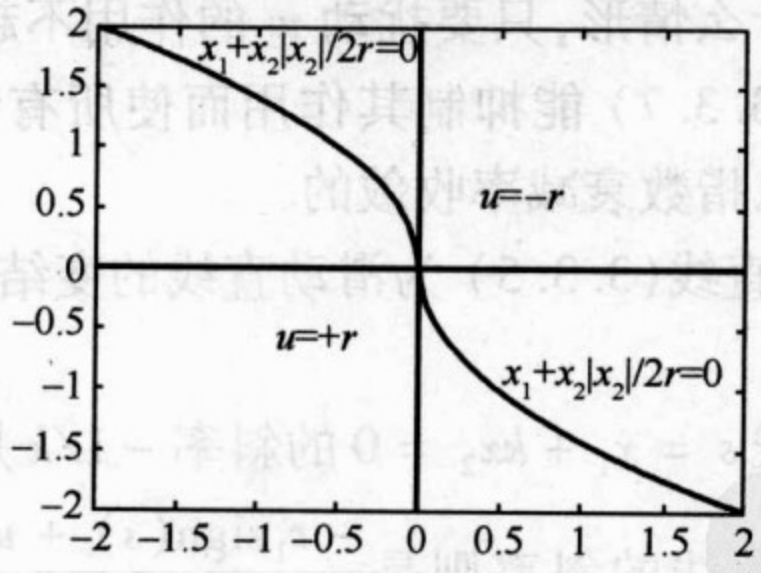


图 3.3.2

这个开关曲线是 20 世纪 50 年代最优控制理论早已阐述清楚了的. 有人也曾试图把它应用在反馈控制的设计上. 然而,由于没有找到克服开关特性所固有的高频颤震现象的合适办法,和数字控制技术没有足够的发达,未能在反馈控制设计上得到推广应用.

开关曲线(3.3.13) 就是随 $|x_2|$ 的增大而斜率变小的曲线，而最速控制综合函数(3.3.12) 可以看作以开关曲线(3.3.13) 为滑动曲线的变结构控制. 下面我们把最速控制综合函数(3.3.12) 形式的反馈称做最速反馈控制.

今记

$$s = x_1 + \frac{x_2 | x_2 |}{2r} \tag{3.3.14}$$

现在把最速反馈控制(3.3.12) 中的增益 r 改为 r_1，而括号中 r 保持不变，得

$$u = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 | x_2 |}{2r}\right) = -r_1 \operatorname{sign}(s) \tag{3.3.15}$$

把它代到被控对象(3.3.1) 中，得变结构系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}(s) + w \end{cases} \tag{3.3.16}$$

这个闭环系统对总和扰动(内扰和外扰的总和) w 的抑制能力和动态特性如何呢?

由于对式(3.3.14) 定义的滑动曲线 $s = 0$ 来说

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{x_2}{r} \operatorname{sign}(x_2) = \frac{|x_2|}{r},$$

$$\dot{s} = \left(x_2 - \frac{r_1}{r} | x_2 | \left(\operatorname{sign}(s) - \frac{w}{r_1}\right)\right) \tag{3.3.17}$$

于是由于 $s = |s| \operatorname{sign}(s)$，$x_2 = |x_2| \operatorname{sign}(x_2)$，

$$s\dot{s} = s\left(x_2 - \frac{r_1}{r} | x_2 | \left(\operatorname{sign}(s) - \frac{w}{r_1}\right)\right) =$$

$$|s||x_2| \left(\operatorname{sign}(s)\left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right) - \frac{r_1}{r}\right)$$

于是有

$$\left(1 + \frac{|w|}{r}\right) > \operatorname{sign}(s)\left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right)$$

欲使不等式

$$\frac{r_1}{r} > \operatorname{sign}(s)\left(\operatorname{sign}(x_2) + \frac{w}{r}\right)$$

成立,只要假定扰动范围满足不等式

$$|w| \leqslant r_2, r + r_2 < r_1 \tag{3.3.18}$$

就有

$$s\dot{s} < 0 \tag{3.3.19}$$

这说明,当条件(3.3.18)得到满足时,由曲线(3.3.14)定义的滑动曲线(开关曲线)上的所有点,都满足“到达条件”(3.3.19)(图3.3.3).

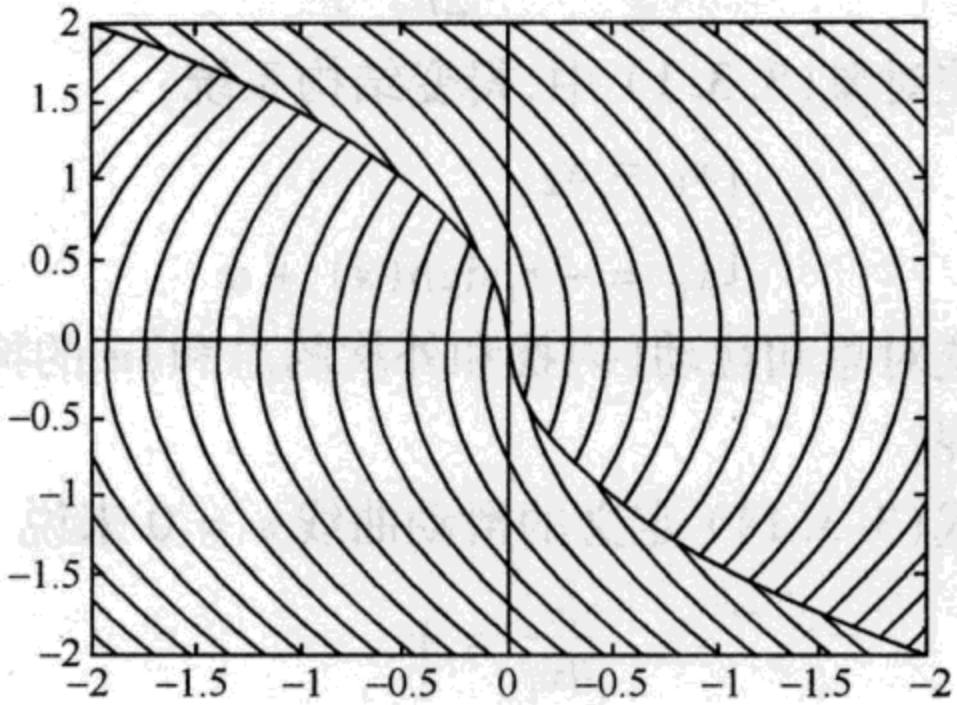


图3.3.3

进一步,变结构控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1\operatorname{sign}(s) + w\end{cases} \quad |w| \leqslant r_2, \tag{3.3.20}$$

的第二个方程右段加速度满足如下不等式:

$$-(r_1 + r_2) < |-r_1\operatorname{sign}(s) + w| < -(r_1 - r_2), s > 0$$

$$(r_1 - r_2) < |-r_1\operatorname{sign}(s) + w| < (r_1 + r_2), s < 0$$

其绝对值总是大于$r_1 - r_2 > 0$,而轨线到达滑动曲线之前其加速度不会变号,因此从开关曲线以外的初始点出发的轨线总是以有限时间到达滑动曲线$s = 0$. 而在滑动曲线上,轨线的速度方向是按菲利波夫的定义,由滑动线两侧轨线速度方向的凸组合来决定,即

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \alpha(r_1 + w) + (1-\alpha)(-r_1 + w)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1(1-2\alpha) + w\end{cases}$$

其中,α 是由相切条件

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}\right)\begin{bmatrix} x_2 \\ -r_1(1-2\alpha)+w \end{bmatrix} = \left(1, \frac{|x_2|}{r}\right)\begin{bmatrix} x_2 \\ -r_1(1-2\alpha)+w \end{bmatrix} = 0$$

来决定出

$$\alpha = \frac{r_1 - r\operatorname{sign}(x_2) + w}{2r_1}$$

因此,在滑动曲线 $s = 0$ 上的运动应满足微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1\left(1 - 2\dfrac{r_1 - r\operatorname{sign}(x_2) + w}{2r_1}\right) + w\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1\operatorname{sign}(x_2)\end{cases}$$

也与扰动 w 无关,且此轨线的加速度大小总是 $r > 0$,是以有限时间到达原点的.

由此得到如下定理:

定理　在控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w + u\end{cases} \tag{3.3.21}$$

中取变结构反馈控制

$$u = -(r + \Delta r)\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2r}\right) \tag{3.3.22}$$

那么闭环系统能够完全抑制满足不等式

$$|w| < \Delta r \tag{3.3.23}$$

的任意扰动 w 的作用,并且闭环系统的所有轨线最多切换一次后沿滑动曲线以有限时间到达原点.

换句话说,当考察满足限制 $|w| < \Delta r$ 的扰动(内扰和外扰之总和)作用的控制问题时,只要取变结构反馈控制(3.3.22),那么,不管扰动 w 在此范围内怎么作用,闭环系统的轨线,最多切换一次,总是以

有限时间到达原点. 变结构反馈控制(3.3.22) 对扰动作用 w, $|w| < \Delta r$ 是完全不变的,而且所有轨线都以有限时间到达原点.

由前述线性滑动曲线变结构反馈控制(3.3.6) 所得的闭环系统与非线性滑动曲线变结构反馈控制(3.3.15) 所得的闭环系统,都完全能够抑制扰动 $w(|w| < \Delta r)$ 的作用而使轨线都收敛于原点,但两者有很大的区别. 前者只能在滑动线的有限线段上满足"到达条件",不能在整条滑动线上满足"到达条件",而其轨线可能需要多次切换来到达滑动线而沿滑动线以指数衰减率收敛于原点. 但后者是在整条滑动曲线上都满足"到达条件",而其轨线最多切换一次后沿滑动曲线以有限时间到达原点. 这种意义上看,以非线性曲线为滑动曲线的变结构反馈控制(3.3.15) 比起以直线为滑动曲线的变结构反馈控制(3.3.6),具有更高的效率.

对系统的扰动限制 $|W| < \Delta r$ 是否太苛刻了?

如果把系统(3.3.1) 改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(x_1, x_2, t) + u \end{cases} \tag{3.3.24}$$

那么,当系统被有效控制时,状态变量 x_1, x_2 一般不可能变得很大. 在实际控制过程中 x_1, x_2 总是在有限范围内变化,因此 $|w(x_1, x_2, t)| < \Delta r$ 的假定在实际控制过程中是能够接受的条件.

从上面的分析可以看出,在理论上,不管 $w(x_1, x_2, t)$ 是什么样函数,只要在有界区域 M 内满足 $|w(x_1, x_2, t)| < r_2, \forall (x_1, x_2) \in M$,那么选取 $r_1 > r + r_2$ 来构造的变结构反馈控制律(3.3.15),就能使闭环系统(3.3.20) 从区域 M 内出发的所有轨线,都以有限时间到达原点.

最速反馈控制律(3.3.15) 对被控对象(3.3.1) 所具有的上述性质,可以称之为最速反馈控制律对系统模型和扰动的不变性原理或简称最速反馈控制的不变性原理.

从这个原理来看,被控对象(3.3.24) 中的 $w(x_1, x_2, t)$ 是线性还是非线性并不重要,重要的是在控制过程中 $|w(x_1(t), x_2(t), t)|$ 的取值范围. 因此,两种系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(x_1,x_2,t) + u\end{cases}, \mid w(x_1,x_2,t) \mid < r_2$$

和

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(t) + u\end{cases}, \mid w(t) \mid < r_2$$

的控制问题不应该有什么本质上的区别.

我们在两个闭环系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(x_1,x_2,t) - r\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{\mid x_2 \mid x_2}{2r}\right)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w(t) - r\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{\mid x_2 \mid x_2}{2r}\right)\end{cases}$$

中取 $w(t) = \sin(t)$ 和 $w(x_1,x_2,t) = x_1 + x_2 + \sin(t)$,参数 r 取 5 时的仿真结果如图 3.3.4 所示.

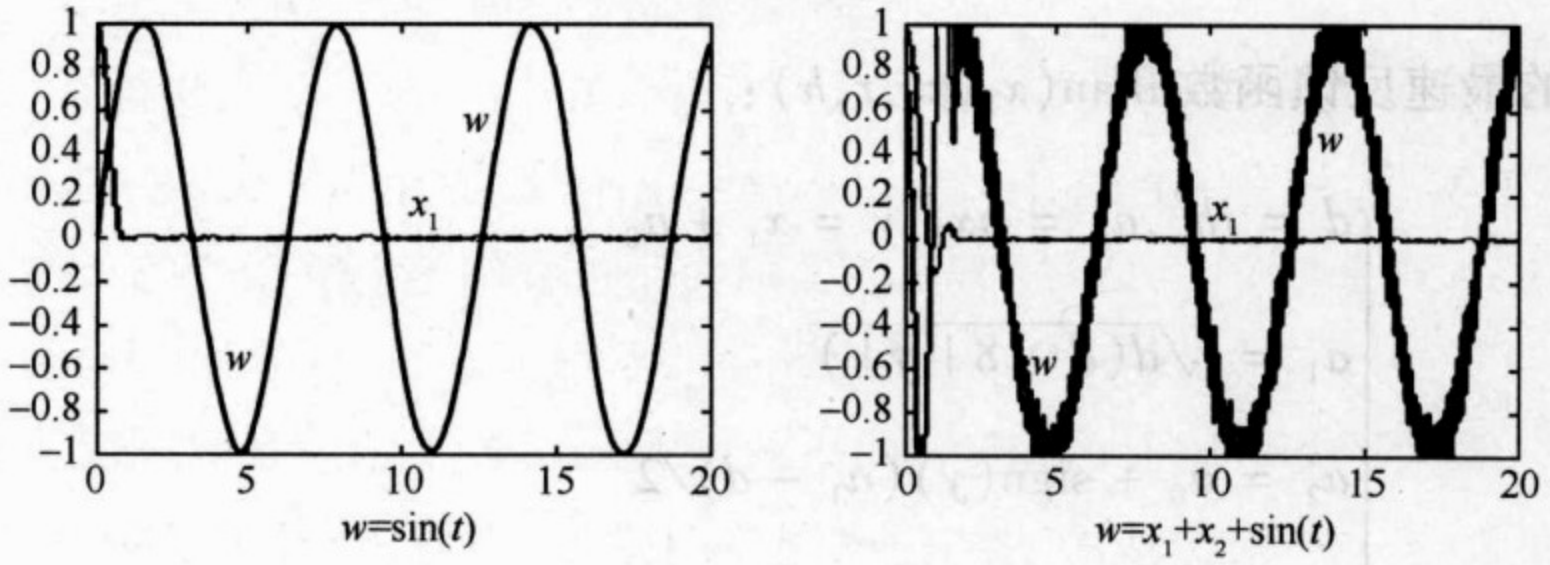


图 3.3.4

这里不管扰动是纯时变的还是依赖于状态变量的,只要参数 r 足够大,都能彻底抑制扰动. 但在这里系统状态进入稳态时有高频振荡,这是由于在开关线两边状态反馈量在 $\pm r$ 之间不断切换的结果. 为了消除这种高频颤震,容易想到的是把开关函数 sign(·) 改成线形饱和函数 sat(·,δ). 这里,sat(·,δ) 的定义为

$$\mathrm{sat}(s,\delta) = \begin{cases} \mathrm{sign}(s), \mid s \mid > \delta \\ \dfrac{s}{\delta}, \mid \delta \mid \leqslant \delta \end{cases} \tag{3.3.25}$$

然而,仿真图 3.3.5 所示那样,x_1 进入稳态后仍然有高频振荡. 为了彻底避免这种高频振荡,我们在第二章中给出了离散系统

$$\begin{cases} x_1(t+h) = x_1(t) + hx_2(t) \\ x_2(t+h) = x_2(t) + hu \end{cases}, \mid u \mid \leqslant r \tag{3.3.26}$$

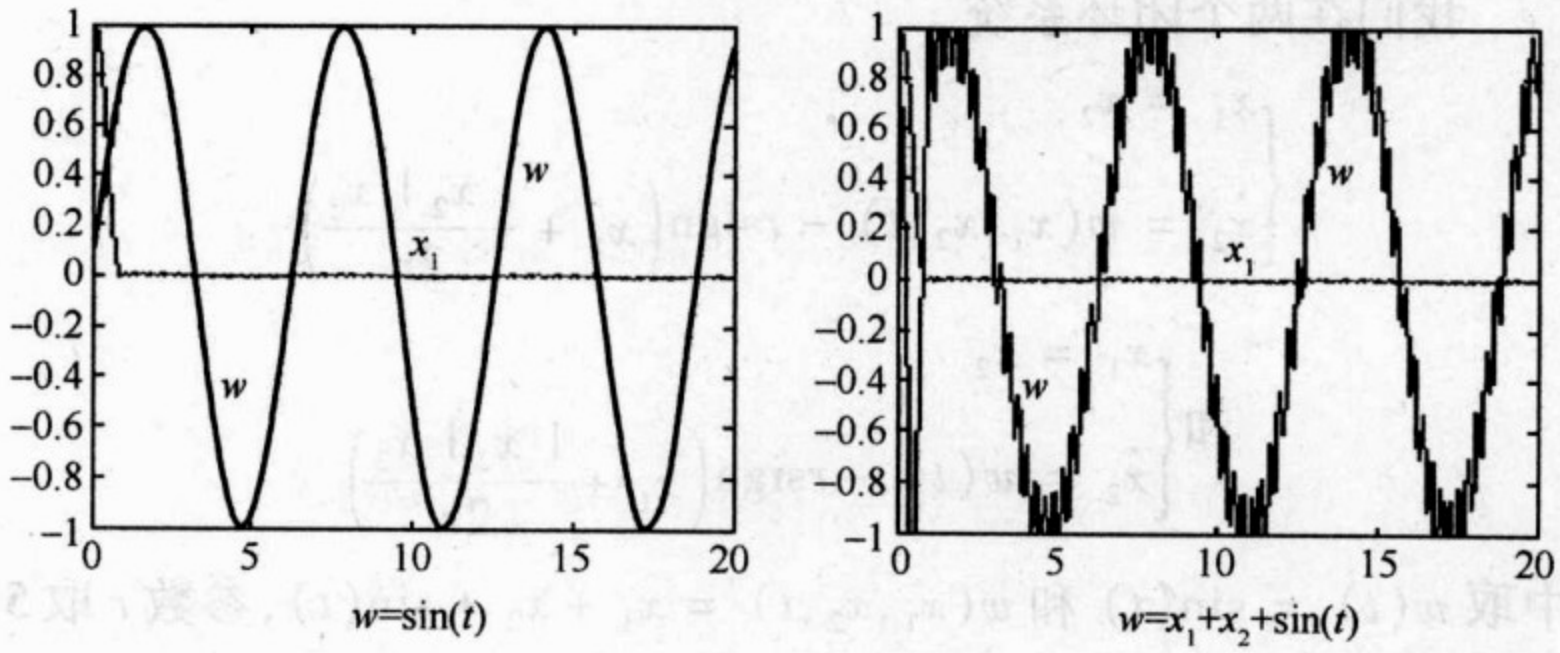


图 3.3.5

的最速反馈函数 $\mathrm{fhan}(x_1,x_2,r,h)$:

$$\begin{cases} d = rh^2, a_0 = hx_2, y = x_1 + a_0 \\ a_1 = \sqrt{d(d + 8 \mid y \mid)} \\ a_2 = a_0 + \mathrm{sign}(y)(a_1 - d)/2 \\ a = \begin{cases} a_0 + y, \mid y \mid \leqslant d \\ a_2, \mid y \mid > d \end{cases} \\ \mathrm{fhan} = -r \begin{cases} \dfrac{a}{d}, \mid a \mid \leqslant d \\ \mathrm{sign}(a), \mid a \mid > d \end{cases} \end{cases} \tag{3.3.27}$$

利用符号函数去掉条件语句并把步长 h 改成独立于步长的另一参

数 h_1,得

$$\text{fhan}(x_1, x_2, r, h_1):$$

$$\begin{cases} d = rh_1^2, a_0 = h_1 x_2, y = x_1 + a_0 \\ a_1 = \sqrt{d(d + 8|y|)} \\ a_2 = a_0 + \text{sign}(y)(a_1 - d)/2 \\ s_y = (\text{sign}(y + d) - \text{sign}(y - d))/2 \\ a = (a_0 + y - a_2)s_y + a_2 \\ s_a = (\text{sign}(a + d) - \text{sign}(a - d))/2 \\ \text{fhan} = -r\left(\dfrac{a}{d} - \text{sign}(a)\right)s_a - r\,\text{sign}(a) \end{cases} \tag{3.3.28}$$

这个反馈函数,当 $h_1 = h$ 时成为上述离散系统的最速反馈控制. 应用此函数时,一般取 $h_1 > h$. 在这个函数中有两个参数 r, h_1,可以把它表示成

$$\text{fhan}(x_1, x_2, r, h_1) = u(x_1, x_2)$$

参数 r 称为控制量增益,而把参数 h_1 称为快速因子. 这个离散形式的最速反馈控制用于上述例子的仿真结果如图 3.3.6 所示. 在这

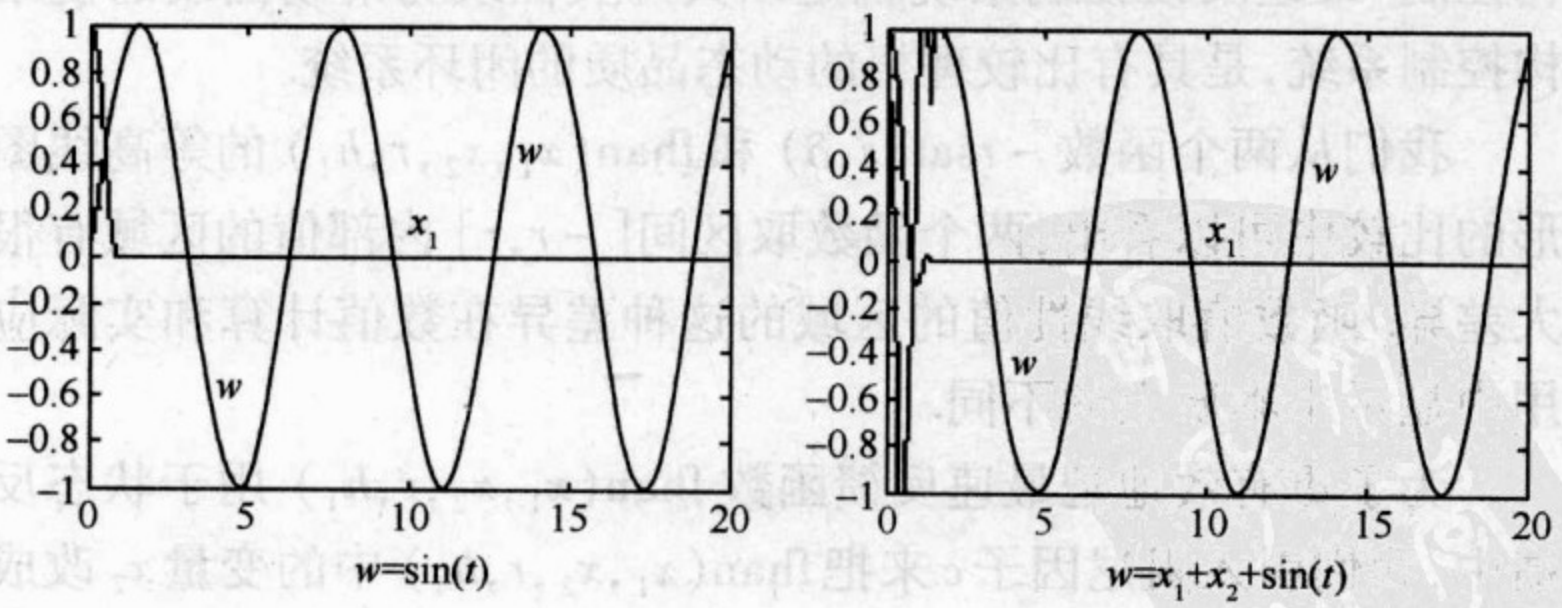


图 3.3.6

里稳态的高频振荡完全被克服了,这就是离散最速反馈函数的优

越性. 最速反馈函数和线性饱和函数都具有函数值取$(-r, +r)$中间值的线性区域,但两个函数确定的这个线性区域的几何形状是完全不同的,前者的线性区域离原点越远越宽,但后者却离原点越远越窄. 这种几何差异示于图 3.3.7.

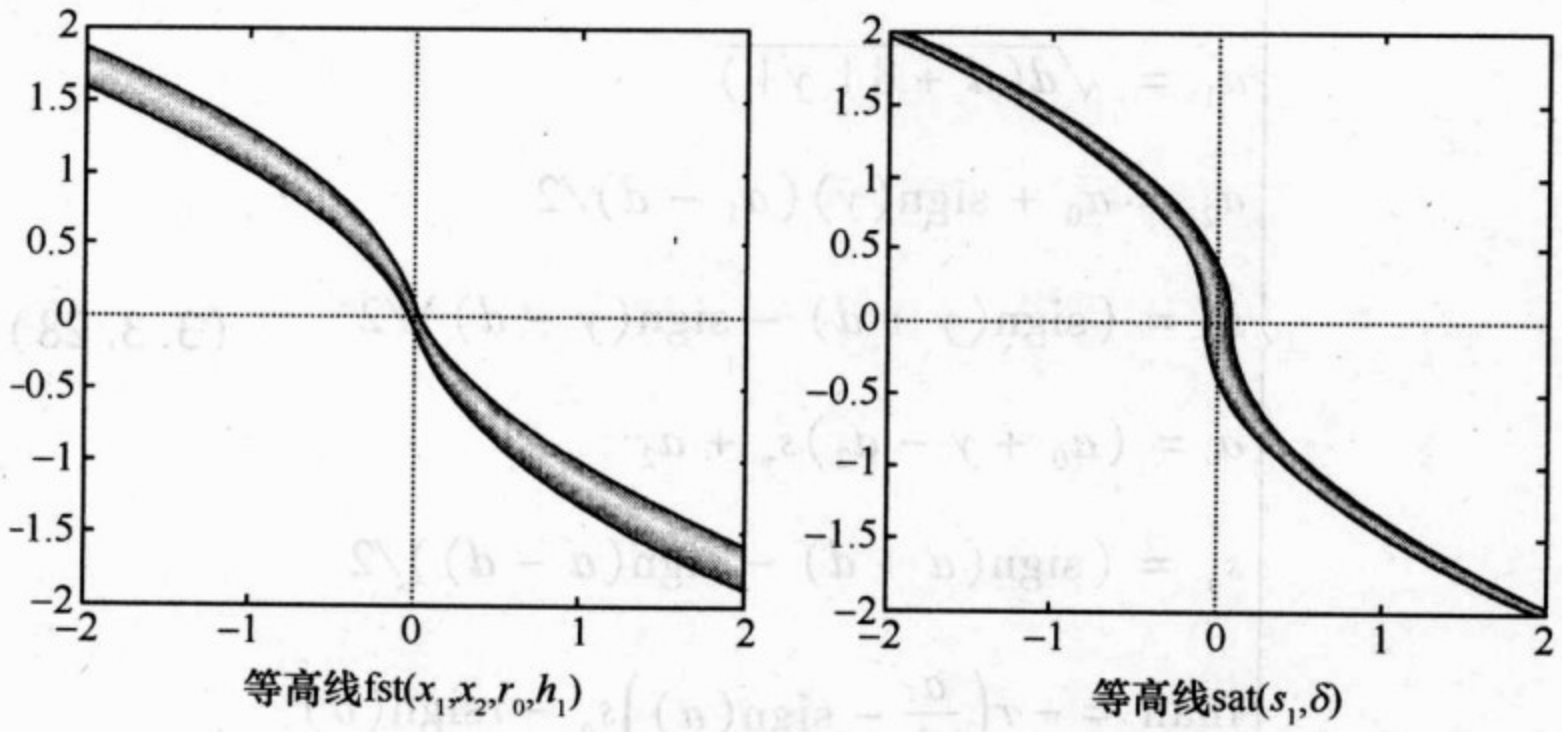


图 3.3.7

由于函数 fhan(x_1, x_2, r, h_1) 具有快速并消除颤震的特殊功能,因此用它来进行状态反馈的非线性配置、非线性 PID 和自抗扰控制器中的误差的非线性组合等是很理想的.

总之,在非线性滑动曲线所给出的变结构控制系统中,比直线性滑动线所给出的变结构控制,有很多具有更好动态品质的变结构控制. 最速反馈控制系统就是以其开关曲线为滑动曲线的变结构控制系统,是具有比较理想的动态品质的闭环系统.

我们从两个函数 $-r\mathrm{sat}(s,\delta)$ 和 fhan(x_1, x_2, r, h_1) 的等高线图形的比较中可以看出,两个函数取区间$[-r, r]$内部值的区域有很大差异. 函数值取线性值的区域的这种差异在数值计算和实际应用中显示出本质上的不同.

为了更有效地把最速反馈函数 fhan(x_1, x_2, r, h_1) 用于状态反馈中,我们引入阻尼因子c来把 fhan(x_1, x_2, r, h_1) 中的变量x_2改成cx_2,得 fhan(x_1, cx_2, r, h_1).

把函数(3.3.22)

$$u(x_1,x_2) = -(r+\Delta r)\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right)$$

可以改写成

$$u(x_1,x_2) = -(r+\Delta r)\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{x_2\sqrt{\frac{r+\Delta r}{r}}\left| x_2\sqrt{\frac{r+\Delta r}{r}}\right|}{2(r+\Delta r)}\right) \tag{3.3.29}$$

于是令 $r_1 = r + \Delta r, c = \sqrt{\frac{r_1}{r}}$,就得

$$u(x_1,x_2) = -r_1\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{cx_2 \mid cx_2 \mid}{2r_1}\right) \tag{3.3.30}$$

对应的离散化形式为 $\mathrm{fhan}(x_1,cx_2,r_1,h_1)$:

$$\begin{cases} d = rh_1^2, a_0 = h_1 cx_2, y = x_1 + a_0 \\ a_1 = \sqrt{d(d+8 \mid y \mid)} \\ a_2 = a_0 + \operatorname{sign}(y)(a_1 - d)/2 \\ s_y = (\operatorname{sign}(y+d) - \operatorname{sign}(y-d))/2 \\ a = (a_0 + y - a_2)s_y + a_2 \\ s_a = (\operatorname{sign}(a+d) - \operatorname{sign}(a-d))/2 \\ \mathrm{fhan} = -r(a/d - \operatorname{sign}(a))s_a - r\operatorname{sign}(a) \end{cases}$$

为什么参数 c 称作“阻尼因子”呢?先看看带阻尼项的线性状态反馈 $u(x_1,x_2) = -x_1 - cx_2$,其中 c 为阻尼因子. 在这个线性反馈中,控制量取零的状态是直线

$$u(x_1,x_2) = -x_1 - cx_2 = 0, x_2 = -x_1/c\ ,$$

是以 $-1/c$ 为斜率的,c 越大,直线越接近横轴. 在最速状态反馈控

制律 $u(x_1,x_2) = -r_1\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{cx_2 \mid cx_2 \mid}{2r_1}\right)$ 中控制量取零的曲线是两个在原点对接的半抛物线组成的曲线

$$x_1 + \frac{cx_2 \mid cx_2 \mid}{2r_1} = 0, x_2 = -\frac{\text{sign}(x_1)}{c}\sqrt{2r_1 \mid x_1 \mid}$$

在这里,c 越大,此曲线越贴近横轴. 其形状如图 3.3.8 所示. 这就是把 c 称作阻尼因子的原因.

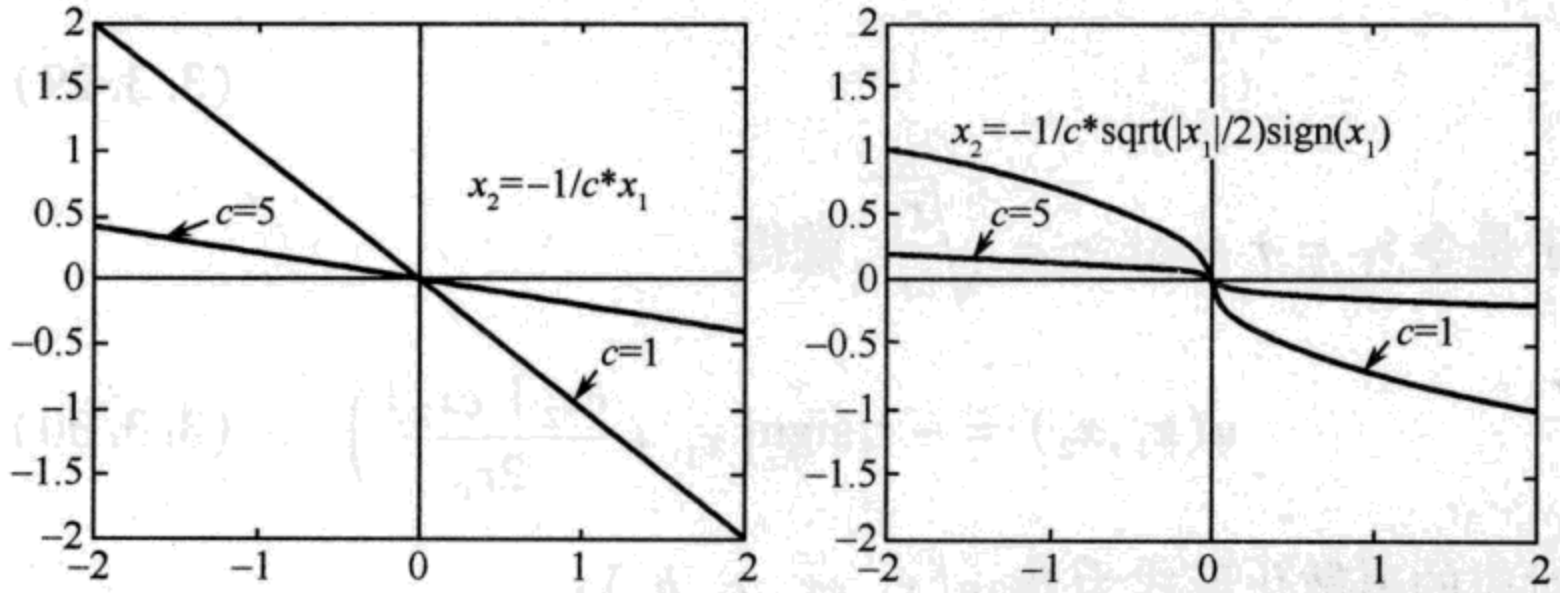


图 3.3.8

考察二阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2,t) + u \\ y = x_1 \end{cases}$$

式中,$f(x_1,x_2,t) = x_1^5 + x_2^2 + \text{sign}(\sin(t))$, 或 $f(x_1,x_2,t) = \text{sign}(\sin(t))$. 控制目的是让 y 达到设定值 $v = 2.0$. 对此分别取状态反馈 $u = \text{fhan}(x_1 - v, cx_2, r, h_1)$ 与 $u = -r^2(x_1 - v) - crx_2$ 来进行比较的仿真效果示于图3.3.9和图3.3.10控制这两个不同被控对象的控制器参数取了同一组,即用同一个控制器来控制两个不同对象,其仿真效果如下:当反馈取为最速状态反馈控制形式 $\text{fhan}(x_1, cx_2, r, h_1)$ 时,控制器参数为 $h = 0.001, r = 40, c = 2, h_1 = 0.002$,而反馈取为线性形式 $u = -r^2(x_1 - v) - crx_2$ 时,控制器参数为 $h = 0.001$, $r = 100, c = 3$. 两种响应均无超调. 线性情形快速性好一些,但精度差一个数量级. 但后者的比例增益比前者高 $100 \times 100 : 40 = 250$ 倍,

而阻尼增益也高出 300 : 2 = 150,近两个数量级. 这又一次说明,适当选取的非线性反馈的效率远比线性反馈的高得多.

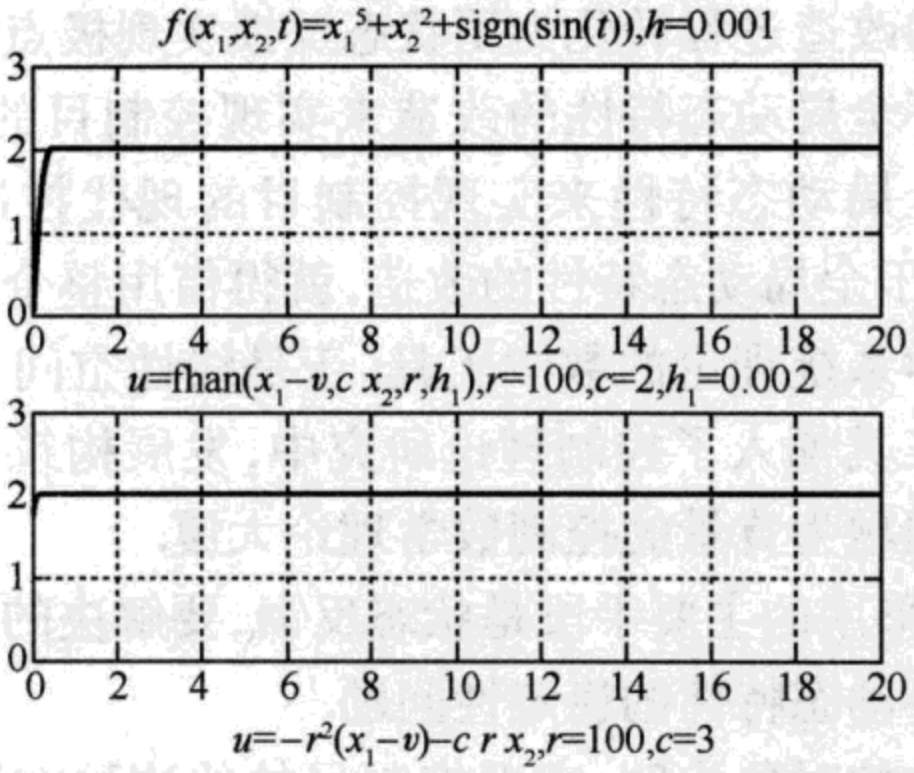


图 3.3.9

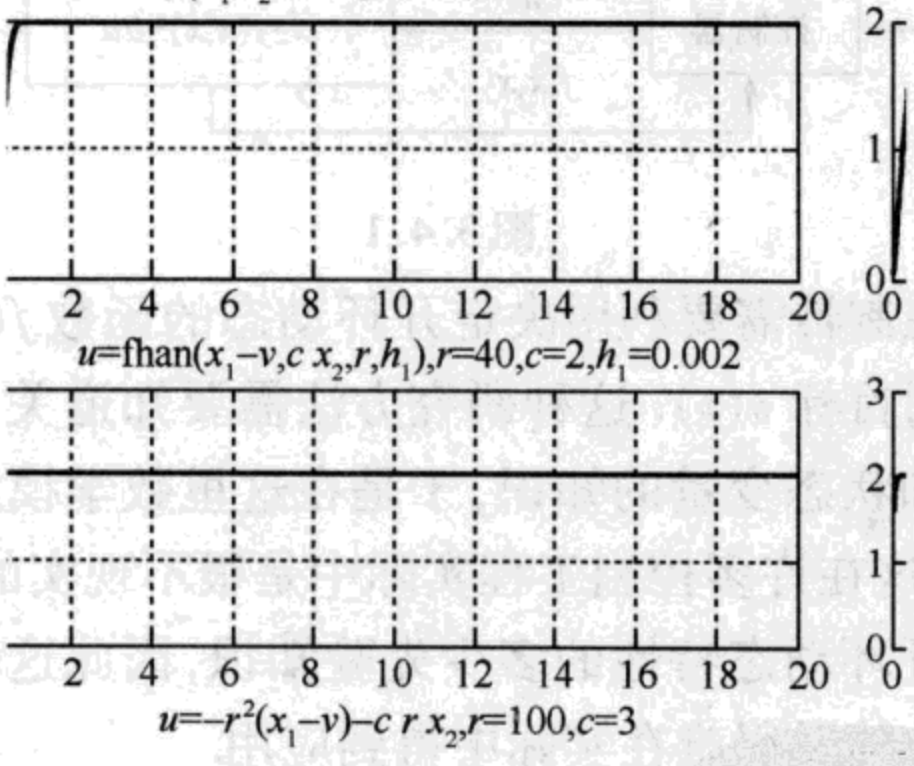


图 3.3.10

3.4 状态反馈方法与误差反馈方法

以上主要讨论的是利用“状态反馈”改造原开环“全局动态特性”来实现控制目的的方法.

在经典控制理论时期,发展了把对象的开环线性传递特性用

状态反馈改造成期望的闭环传递特性来实现控制目的的理论与设计方法. 以状态变量描述为工具的现代线性控制系统理论是把上述传递特性的改造过程转化为用状态反馈实现极点配置等问题.

这是开环全局动态特性的改造来实现控制目的的过程,于是确立了改造全局动态特性来实现控制目的现代控制理论研究方法. 既然立足于全局动态特性的改造,就得借用整个经典的和现代的研究动力学系统理论的数学工具. 于是线性空间、微分几何、拓扑学等数学工具涌入了控制理论研究中,发展构筑了丰富多彩的以控制系统问题为背景的控制数学理论大厦.

在这里,采用的主要手段是状态反馈,要解决的关键问题是被改造了的闭环动态特性的稳定性问题.

以二阶被控对象为例,实现控制目的的这种方法的信息流程图如图 3.4.1 所示.

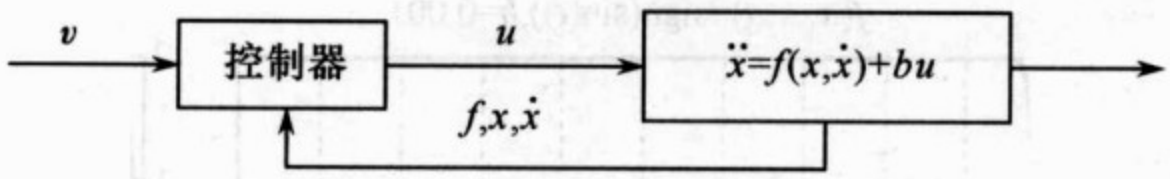


图 3.4.1

这里的控制器需要利用决定开环动态的函数 $f(x,\dot{x})$、状态变量 $x,\dot{x}$ 和控制目标 $v(t)$. 这种研究方法需要知道关于原开环动态特性的知识和状态变量的知识,于是在这里数学模型的认知是不可缺的前提. 这在许多控制工程实际中是很不现实的,因为工程实际提供不了开环动态特性的多少先验知识,因此这种全局性的改造方法给出的结果很难在实际中得到应用.

这就是现代控制理论成果与工程实际脱节的主要原因.

实际上,实现控制目的不一定需要事先知道开环动态特性 —— 数学模型. 例如,对二阶对象

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x,\dot{x}) + u \\ y = x \end{cases} \tag{3.4.1}$$

来说,要实现控制目的不一定需要知道函数 $f(x,\dot{x})$ 和系统状态变量 $x,\dot{x}$.

实现控制目的主要是在系统运行过程中施加适当控制力把目标 $v(t)$ 与被控输出 $y(t)$ 之间的误差 $e = v - y$ 衰减下去. 为此,只需明了开环动态在控制过程中的实时表现量

$$a(t) = f(x(t), \dot{x}(t)) \tag{3.4.2}$$

就够了. 这个过程的表现量可以表示成

$$a(t) = \ddot{x}(t) - u(t) \tag{3.4.3}$$

这说明,量 $a(t)$ 是利用系统的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t) = x(t)$ 可以提炼出来的.

如果能够获取运行过程中的量 $a(t)$,则把控制量取成

$$u(t) = -a(t) + u_0 \tag{3.4.4}$$

那么控制过程的微分方程变成

$$\ddot{y}(t) = u_0 \tag{3.4.5}$$

然后把控制量 u_0 再取成误差 e 的反馈,比如(也可以采用效率更高的其他形式反馈)

$$u_0(t) = -a_1 e - a_2 \dot{e} + \ddot{v}(t), a_1 > 0, a_2 > 0 \tag{3.4.6}$$

闭环过程的微分方程最后变成

$$\ddot{e}(t) = -a_1 e - a_2 \dot{e} \tag{3.4.7}$$

显然这个微分方程是稳定的,从而有 $e(t) \Rightarrow 0$,于是可以达到控制目的:$y(t) \Rightarrow v(t)$.

本书主要围绕采用“误差反馈”的“过程的控制”方法来介绍研发与工程实用控制器相关的各种问题.

在这里,最速反馈函数有其特殊的功能. 为此有必要进一步了解最速反馈函数的有关性质.

3.5 最速反馈函数的进一步性质

20 世纪 50 年代确立了二阶积分器串联型系统的最速反馈综合函数以后,由于它所具有的特殊功能,控制工程界曾期望把它应用于反馈系统设计上,但是没有找到能够避免它所固有的 bang-bang 开关特性引起的高频颤振的合适办法,至今没能在控制

工程实际中得到推广应用. 为了适应数字化控制的时代潮流,作者在20世纪90年代末对离散积分器串联型系统

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + hu, \mid u \mid \leqslant r \end{cases} \tag{3.5.1}$$

确立了最速反馈综合函数 $\text{fhan}(x_1, x_2, r, h)$. 把参数 h 改成与采样步长独立的新的参数 h_0,并再引入新的参数——阻尼因子 c,使 $\text{fhan}(x_1, x_2, r, h)$ 变成 $\text{fhan}(x_1, cx_2, r, h_0)$ 来应用于反馈控制中,彻底避免了高频颤振现象的出现,并且进一步指出了函数 $\text{fhan}(x_1, cx_2, r, h_0)$ 在信号处理、反馈控制及最优控制等领域中的广泛应用前景.

由于最速反馈控制函数有如此广泛的应用前景,下面将进一步讨论与这个函数相关的一些其他性质.

下面我们来看看控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u, \mid u \mid < r \end{cases} \tag{3.5.2}$$

的“等时区”和“最速控制综合函数”的一些性质.

根据线性系统的最速控制理论,系统(3.5.2)的从任意非零初始状态出发到达原点的最速轨线只有三种:① 取正的最大加速度 r,或负的最大加速度 $-r$,不变号地直接到达原点的轨线;② 先取正的最大加速度 $+r$,然后开关一次取负最大加速度 $-r$ 来到达原点;③ 先取负的最大加速度 $-r$,然后开关一次取正的最大加速度 $+r$ 来到达原点. 每一个最速轨线在正负最大加速度 $\pm r$ 之间最多开关一次,最后加速度取 $+r$ 或 $-r$ 来沿着抛物线

$$x_1 = -\frac{\mid x_2 \mid x_2}{2r} \tag{3.5.3}$$

进入原点. 这个曲线叫做开关曲线(图3.5.1). 在相平面上,这个开关曲线的右上方,即函数值 $x_1 + \frac{\mid x_2 \mid x_2}{2r}$ 取正值的区域,是最速控制函数取 $-r$ 的区域;左下方,即 $x_1 + \frac{\mid x_2 \mid x_2}{2r}$ 取负值的区域,是控制函数取 $+r$ 的区域,因此这个系统的最速综合函数为

$$u = -r\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r}\right) \tag{3.5.4}$$

沿最速轨线花 T 时间到达原点的初始点是可以用倒退积分法来决定. 系统(3.5.2) 的倒推方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2\\ \dot{x}_2 = -u\end{cases} \tag{3.5.5}$$

从原点出发,先取 $u = +r$,积分倒退的方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2\\ \dot{x}_2 = -r\end{cases}$$

到时刻 τ,$0 \leqslant \tau \leqslant T$,得

$$\begin{cases}x_1(\tau) = r\dfrac{\tau^2}{2}\\ x_2(\tau) = -r\tau\end{cases} \tag{3.5.6}$$

这是抛物线

$$x_1 - \frac{x_2^2}{2r} = 0$$

上 $x_2 \leqslant 0$ 的部分,是原系统(3.5.2) 的取 $u = r$ 而最快地到达原点的初始点 (x_1, x_2) 所在的位置. 然后以这个曲线上的点 $(x_1(\tau), x_2(\tau))$ 为初始点,取相反加速度 $u = -r$,从 $\tau \geqslant 0$ 到 $T \geqslant \tau$,积分倒退方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2\\ \dot{x}_2 = r\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_1(T) = -r\dfrac{(T-\tau)^2}{2} + (r\tau)(T-\tau) + r\dfrac{\tau^2}{2}\\ x_2(T) = r(T-\tau) - r\tau = r(T-2\tau)\end{cases} \tag{3.5.7}$$

点 $(x_1(T), x_2(T))$ 将位于开关线的右上方且以时间 T 来到达原点的状态(图 3.5.1),即坐标 (x_1, x_2) 满足

$$x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r} > 0$$

从式(3.5.7) 的第二式解出 τ,得

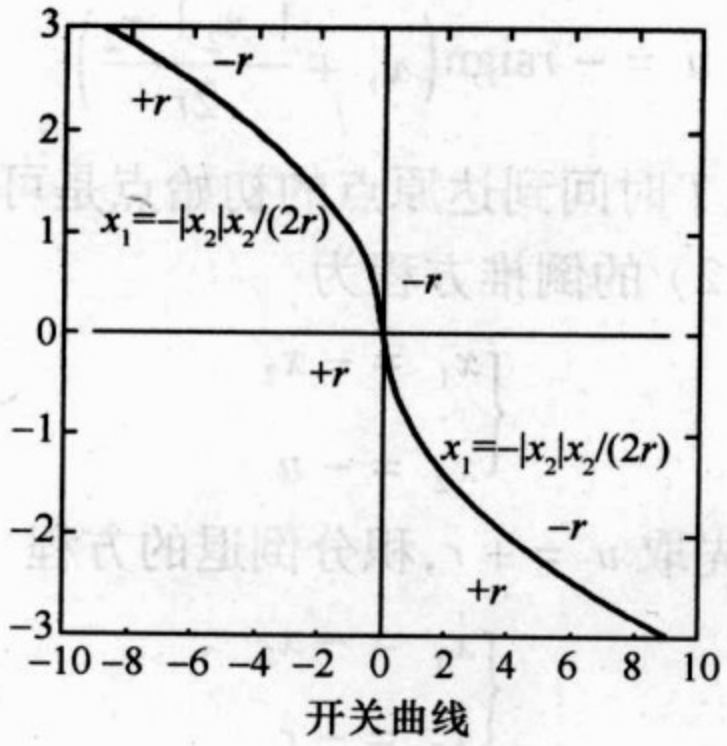


图 3.5.1

$$\tau = \frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}, T - \tau = \frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r} \tag{3.5.8}$$

把这些表达式代到第一式,有

$$x_1 = -\frac{r}{2}\left(\frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r}\right)^2 - r\left(\frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}\right)\left(\frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r}\right) - \frac{r}{2}\left(\frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4r}(rT - x_2)^2 - T^2 + \frac{x_2^2}{2r} \tag{3.5.9}$$

由此解出 T,得

$$T = \frac{x_2}{r} \pm \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{2r}} \tag{3.5.10}$$

式(3.5.10) 要有意义,必须 $x_1 + \frac{x_2^2}{2r} \geqslant 0$. 但是开关线右上方的点 (x_1, x_2) 的坐标满足 $x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r} \geqslant 0$,从而由于 $0 \leqslant x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r} \leqslant x_1 + \frac{x_2^2}{2r}$,表达式(3.5.10) 在开关线右上方是有意义的. 而当 $x_2 = 0$ 时开关线右上方必有 $x_1 > 0$,时间 T 不能取负值,因此表达式(3.5.10) 的“±”符号只能取“+”号,所以在开关线右上方,时间 T 的表达式最终变成

$$T = \frac{x_2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{2r}} \tag{3.5.11}$$

然后,从原点出发先取 $u = -r$ 积分倒退的方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = r \end{cases}$$

到 $\tau, 0 \leqslant \tau \leqslant T$ 时间,得

$$\begin{cases} x_1(\tau) = -r\dfrac{\tau^2}{2} \\ x_2(\tau) = r\tau \end{cases}$$

这些点位于抛物线 $x_1 + \dfrac{x_2^2}{2r} = 0$ 的 $x_2 > 0$ 部分上. 然后从这些 $(x_1(\tau), x_2(\tau))$ 点出发,取相反加速度 $u = r$,从 τ 到时刻 $T \geqslant \tau$,积分倒退的方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -r \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_1(T) = r\dfrac{(T-\tau)^2}{2} - (r\tau)(T-\tau) - r\dfrac{\tau^2}{2} \\ x_2(T) = -r(T-\tau) + r\tau = r(-T+2\tau) \end{cases}$$

这些点将位于开关线 $x_1 + \dfrac{|x_2|x_2}{2r} = 0$ 的左下方. 从上面式的第二个方程解出 τ,得

$$\tau = \frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r}, T - \tau = \frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}$$

把这些表达式代到第一式,有

$$x_1 = \frac{r}{2}\left(\frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r}\right)^2 - r\left(\frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}\right)\left(\frac{T}{2} + \frac{x_2}{2r}\right) - \frac{r}{2}\left(\frac{T}{2} - \frac{x_2}{2r}\right)^2 =$$

$$-\frac{r}{4}\left(T + \frac{x_2}{r}\right)^2 + \frac{x_2^2}{2r}$$

解出 T,得

$$T = -\frac{x_2}{r} \pm \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_1 + \frac{x_2^2}{2r}} \tag{3.5.12}$$

这就是从状态$(x_1,x_2) \in \left\{(x_1,x_2) \mid x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r} \leqslant 0\right\}$出发按系统(3.5.2)最快地到达原点所花的时间 T 的表达式. 在这里,由于 $-x_1 + \frac{x_2^2}{r} \geqslant -x_1 - \frac{|x_2|x_2}{2r} \geqslant 0$,表达式(3.5.12)的开方是有意义的. 另外,在开关线的左下方,当 $x_2 = 0$ 时,$-x_1 \geqslant 0$,而时间 T 不能取负值,表达式(3.5.12)中的"±"号只能取"+"号,因此表达式(3.5.12)最终变成

$$T = -\frac{x_2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_1 + \frac{x_2^2}{2r}} \tag{3.5.13}$$

考虑到表达式(3.5.11)和式(3.5.13)的施用范围,可以统一地表示成

$$s = \operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r}\right)$$

$$T(x_1,x_2) = s\frac{x_2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + sx_1} \tag{3.5.14}$$

这个函数可以称作最速时间函数,函数 $T(x_1,x_2)$ 的意思是从点 (x_1,x_2) 出发沿最速轨线到达原点所花的时间.

最速时间函数 $T(x_1,x_2)$ 在原点上的值 $T(x_1,x_2) = 0$,在整个相平面上是连续的正定数. 最速时间函数 $T(x_1,x_2)$,将成为闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -rs \end{cases} \tag{3.5.15}$$

的一个李亚普诺夫函数,而且满足等式

$$\frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial T(x_1,x_2)}{\partial x_2}(-rs) = -1$$

事实上,有

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + x_1}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{1}{r} + \frac{x_2}{r}\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + x_1}}, x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} \geqslant 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = -\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} - x_1}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = -\frac{1}{r} + \frac{x_2}{r}\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} - x_1}}, x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} \leqslant 0$$

统一两式,有

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{s}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + sx_1}}, \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{s}{r} + \frac{x_2}{r}\frac{1}{\sqrt{r}\sqrt{\frac{x_2^2}{2r} + sx_1}}$$

因此就有

$$\frac{\mathrm{d}T(x_1, x_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2}rs = -1 \tag{3.5.16}$$

于是由于

$$T(x_1(t), x_2(t)) = -t + T(x_1(0), x_2(0)) \tag{3.5.17}$$

所有轨线都以有限时间到达原点. 这是对系统(3.4.1) 作不连续的,非光滑的状态反馈(3.5.4) 带来的特殊效果. 正定函数 $T(x_1, x_2)$ 的等值线和不连续系统(3.5.15) 的运动轨线分布图如图 3.5.2 所示,而其三维曲面图如图 3.5.3 所示.

以上讨论的是闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\mathrm{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) \end{cases} \tag{3.5.18}$$

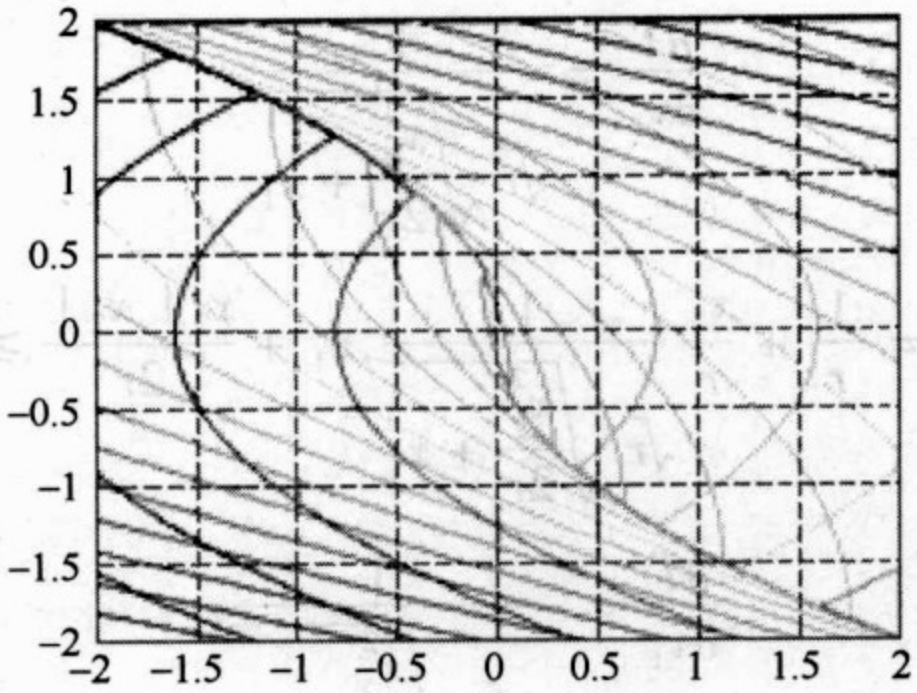


图 3.5.2

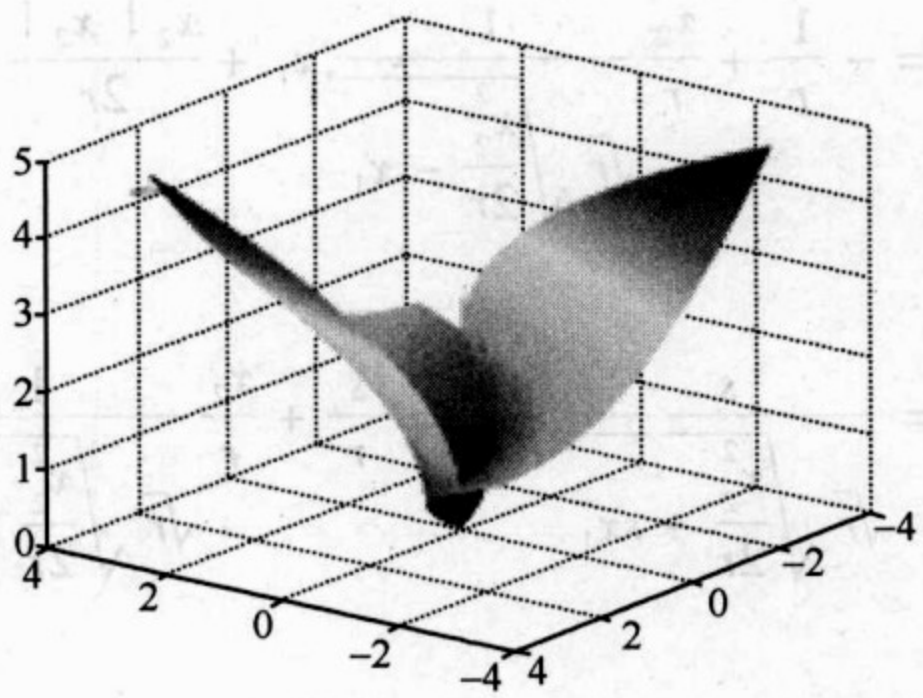


图 3.5.3

的相平面轨线的有关性质.

下面用同样的方式讨论闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right), r_1 > r \end{cases} \tag{3.5.19}$$

的轨线分布和过渡时间函数. 这里决定开关线的参数 r 和决定加速度的最大值的参数 r_1 应该满足 $r_1 > r$.

此系统花 t 时间到达原点的轨线的初始点是用倒退积分系统(3.5.2) 来决定. 系统(3.5.2) 的倒退方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -u\end{cases}$$

在这里加速度取 $u = +r_1$ 和 $u = -r_1$ 的分界线是

$$x_1 + \frac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r} = 0$$

这个曲线是在原点对顶的两个半抛物线(图 3.5.4). 这个曲线实际上是系统(3.5.2) 的进入原点的最速轨线,上半部分为 $u = -r$ 的最速轨线,而下半部分为 $u = +r$ 的最速轨线,它们是可以用如下方式确定.

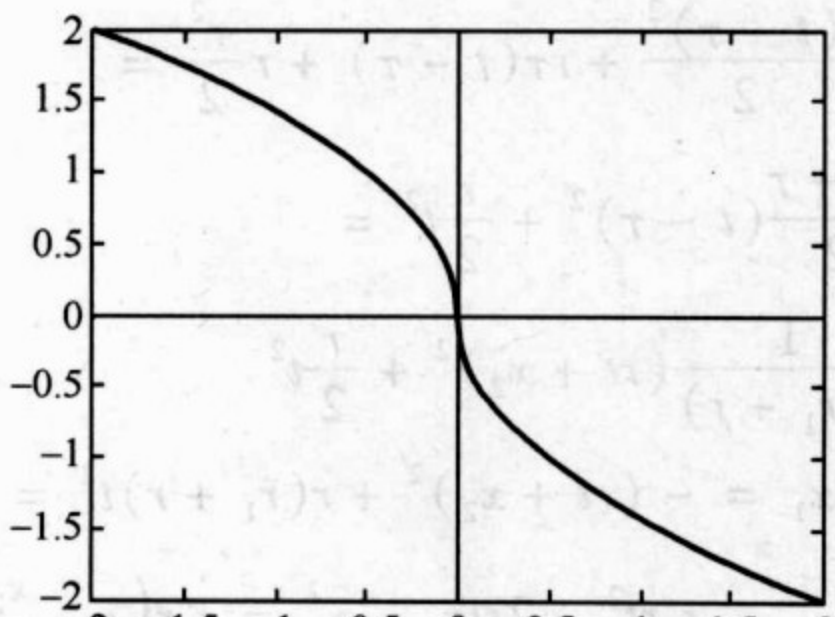


图 3.5.4

1. 先取 $u = +r$,从原点出发积分到 τ 时刻倒退方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_2(\tau) = -r\tau \\ x_1(\tau) = r\dfrac{\tau^2}{2}\end{cases}$$

这是图3.5.4曲线的下半部分. 为了决定沿系统(3.5.19) 的轨线,花时间 t 来到达原点的初始点,然后取 $u = -r_1$,由上式决定的点为初值,从 τ 积分倒退方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = +r_1\end{cases}$$

到 t 时刻,得

$$\begin{cases}x_2 = r_1(t-\tau) - r\tau \\ x_1 = -r_1\dfrac{(t-\tau)^2}{2} + r\tau(t-\tau) + r\dfrac{\tau^2}{2}\end{cases} \tag{3.5.20}$$

从式(3.5.20)中第1式解出 τ 和 $t-\tau$,然后把此表达式代到第2式,有

$$x_2 = r_1(t-\tau) - r\tau \Rightarrow \tau = \frac{r_1 t - x_2}{r_1 + r}, t-\tau = \frac{rt + x_2}{r_1 + r}$$

$$x_1 = -r_1\frac{(t-\tau)^2}{2} + r\tau(t-\tau) + r\frac{\tau^2}{2} =$$

$$-\frac{r_1 + r}{2}(t-\tau)^2 + \frac{r}{2}t^2 =$$

$$-\frac{1}{2(r_1 + r)}(rt + x_2)^2 + \frac{r}{2}t^2$$

$$2(r_1 + r)x_1 = -(rt + x_2)^2 + r(r_1 + r)t^2 =$$

$$r_1 r t^2 - 2rtx_2 - x_2^2 = r_1 r\left(t - \frac{x_2}{r_1}\right)^2 - \frac{r_1 + r}{r_1}x_2^2$$

$$2\frac{r_1 + r}{r_1 r}\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2r_1}\right) = \left(t - \frac{x_2}{r_1}\right)^2 \tag{3.5.21}$$

由此得时间 t 的表达式

$$t = \frac{x_2}{r_1} \pm \sqrt{2\frac{r_1 + r}{r_1 r}}\sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{2r_1}} \tag{3.5.22}$$

2. 先取 $u = -r$,从0积分到 τ 倒退方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = r\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}x_2(\tau) = r\tau \\ x_1(\tau) = -r\dfrac{\tau^2}{2}\end{cases}$$

然后取 $u = -r_1$,以上式为初值,从 τ 积分倒退方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = +r_1 \end{cases}$$

到 t 时刻,得

$$\begin{cases} x_2 = r_1(t-\tau) + r\tau \\ x_1 = -r_1\dfrac{(t-\tau)^2}{2} - r\tau(t-\tau) - r\dfrac{\tau^2}{2} \end{cases} \tag{3.5.23}$$

从式(3.5.23)中第1式解出 τ 和 $t-\tau$,然后把此表达式代到第2式,有

$$x_2 = r_1(t-\tau) + r\tau \Rightarrow \tau = \frac{r_1 t - x_2}{r_1 - r}, t - \tau = \frac{x_2 - rt}{r_1 - r}$$

$$x_1 = -r_1\frac{(t-\tau)^2}{2} - r\tau(t-\tau) - r\frac{\tau^2}{2} =$$

$$-\frac{r_1 - r}{2}(t-\tau)^2 - \frac{r}{2}t^2 - 2x_1 =$$

$$(r_1 - r)(t-\tau)^2 + rt^2 =$$

$$\frac{(x_2 - rt)^2}{r_1 - r} + rt^2 =$$

$$\frac{x_2^2 - 2rx_2 t + r_1 r t^2}{r_1 - r} - 2(r_1 - r)x_1 =$$

$$x_2^2 - 2rx_2 t + r_1 r t^2 =$$

$$r_1 r\left(t - \frac{x_2}{r_1}\right)^2 + \frac{r_1 - r}{r_1}x_2^2$$

$$-2\frac{r_1 - r}{r_1 r}\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2r_1}\right) = \left(t - \frac{x_2}{r_1}\right)^2 \tag{3.5.24}$$

由此得时间 t 的表达式

$$t = \frac{x_2}{r_1} \pm \sqrt{2\frac{r_1 - r}{r_1 r}}\sqrt{-x_1 - \frac{x_2^2}{2r_1}} \tag{3.5.25}$$

3. 先取 $u = -r$,从 0 积分到 τ 倒退方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = r \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_2(\tau) = r\tau \\ x_1(\tau) = -r\dfrac{\tau^2}{2} \end{cases}$$

然后取 $u = +r_1$,以上式为初值,从 τ 积分倒退方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \end{cases}$$

到 t 时刻,得

$$\begin{cases} x_2 = -r_1(t-\tau) + r\tau \\ x_1 = r_1\dfrac{(t-\tau)^2}{2} - r\tau(t-\tau) - r\dfrac{\tau^2}{2} = \\ \qquad \dfrac{r_1 + r}{2}(t-\tau)^2 - \dfrac{r}{2}t^2 \end{cases} \tag{3.5.26}$$

从式(3.5.26) 中第 1 式解出 τ 和 $t-\tau$,然后把此表达式代到第 2 式,有

$$x_2 = -r_1(t-\tau) + r\tau \Rightarrow \tau = \frac{x_2 + r_1 t}{r_1 + r}, t - \tau = \frac{rt - x_2}{r_1 + r}$$

$$x_1 = r_1\frac{(t-\tau)^2}{2} - r\tau(t-\tau) - r\frac{\tau^2}{2} =$$

$$\frac{r_1 + r}{2}(t-\tau)^2 - \frac{r}{2}t^2$$

$$2(r_1 + r)x_1 =$$

$$(rt - x_2)^2 - r(r_1 + r)t^2 = -r_1 r\left(t + \frac{x_2}{r_1}\right)^2 + (r_1 + r)$$

$$\frac{x_2^2}{r_1} - 2(r_1 + r)\left(x_1 - \frac{x_2^2}{2r_1}\right) = r_1 r\left(t + \frac{x_2}{r_1}\right)^2 \tag{3.5.27}$$

由此得时间 t 的表达式

$$t = -\frac{x_2}{r_1} \pm \sqrt{2\frac{r_1 + r}{r_1 r}}\sqrt{-x_1 + \frac{x_2^2}{2r_1}} \tag{3.5.28}$$

4. 先取 $u = +r$,从 0 积分到 τ 倒退方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -r \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x_2(\tau) = -r\tau \\ x_1(\tau) = r\dfrac{\tau^2}{2} \end{cases}$$

然后取 $u = +r_1$,以上式为初值,从 τ 积分倒推方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \end{cases}$$

到 t 时刻,得

$$\begin{cases} x_2 = -r_1(t-\tau) - r\tau \\ x_1 = r_1\dfrac{(t-\tau)^2}{2} + r\tau(t-\tau) + r\dfrac{r^2}{2} \end{cases} \tag{3.5.29}$$

从式(3.5.29) 中第1式解出 τ 和 $t-\tau$,然后把此表达式代到第2式,有

$$x_2 = -r_1(t-\tau) - r\tau \Rightarrow \tau = \frac{x_2 + r_1 t}{r_1 - \tau}, t - \tau = \frac{rt + x_2}{r_1 - r}$$

$$x_1 = \frac{r_1 - \tau}{2}(t-\tau)^2 + \frac{r}{2}t^2$$

$$2(r_1 - r)x_1 = (rt + x_2)^2 + r(r_1 - r)t^2$$

$$2(r_1 - r)\left(x_1 - \frac{x_2}{2r_1}\right) = r_1 r\left(t + \frac{x_2}{r_1}\right)^2 \tag{3.5.30}$$

由此得时间 t 的表达式

$$t = -\frac{x_2}{r_1} \pm \sqrt{2\frac{r_1 - r}{r_1 r}}\sqrt{x_1 - \frac{x_2^2}{2r_1}} \tag{3.5.31}$$

把四个 t 的表达式(3.5.22),式(3.5.25),式(3.5.28),式

(3.5.31) 放在一起,有

$$t = \begin{cases} \dfrac{x_2}{r_1} + \sqrt{2\dfrac{r+r_1}{rr_1}}\sqrt{x_1 + \dfrac{x_2^2}{2r_1}} \\ \dfrac{x_2}{r_1} + \sqrt{2\dfrac{r_1-r}{rr_1}}\sqrt{-\left(x_1 + \dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)} \\ -\dfrac{x_2}{r_1} + \sqrt{2\dfrac{r+r_1}{rr_1}}\sqrt{-\left(x_1 - \dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)} \\ -\dfrac{x_2}{r_1} + \sqrt{2\dfrac{r_1-r}{rr_1}}\sqrt{x_1 - \dfrac{x_2^2}{2r_1}} \end{cases} \tag{3.5.32}$$

令 $a_1 = \sqrt{2\dfrac{r+r_1}{rr_1}}$, $a_2 = \sqrt{2\dfrac{r_1-r}{rr_1}}$, $s = \operatorname{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2}{2r}\right)$,

$s_1 = \operatorname{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2}{2r_1}\right)$

$a = a_1\dfrac{1+s_1 s}{2} + a_2\dfrac{1-s_1 s}{2}$,则有

$$t = \begin{cases} \dfrac{x_2}{r_1} + a\sqrt{x_1 + \dfrac{x_2^2}{2r_1}}, s_1 \geqslant 0, s \geqslant 0 \\ \dfrac{x_2}{r_1} + a\sqrt{-x_1 - \dfrac{x_2^2}{2r_1}}, s_1 \leqslant 0, s \geqslant 0 \\ -\dfrac{x_2}{r_1} + a\sqrt{-x_1 + \dfrac{x_2^2}{2r_1}}, s_1 \leqslant 0, s \leqslant 0 \\ -\dfrac{x_2}{r_1} + a\sqrt{x_1 - \dfrac{x_2^2}{2r_1}}, s_1 \geqslant 0, s \leqslant 0 \end{cases}$$

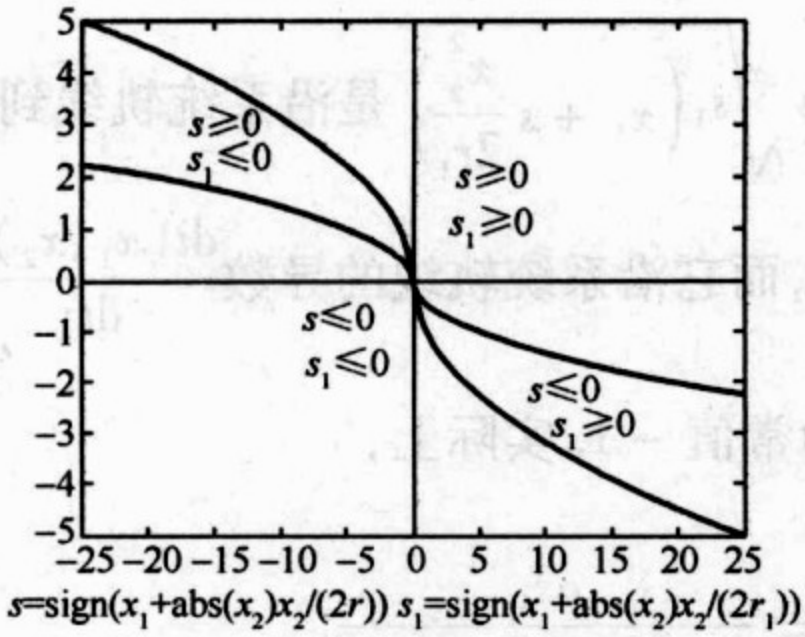


图 3.5.5

于是四个式子统一地表达成

$$t = s\frac{x_2}{r_1} + a\sqrt{s_1\left(x_1 + s\frac{x_2^2}{2r_1}\right)} \tag{3.5.33}$$

这个函数的曲面表现和等高线分别如图 3.5.6 和图 3.5.7 所示.

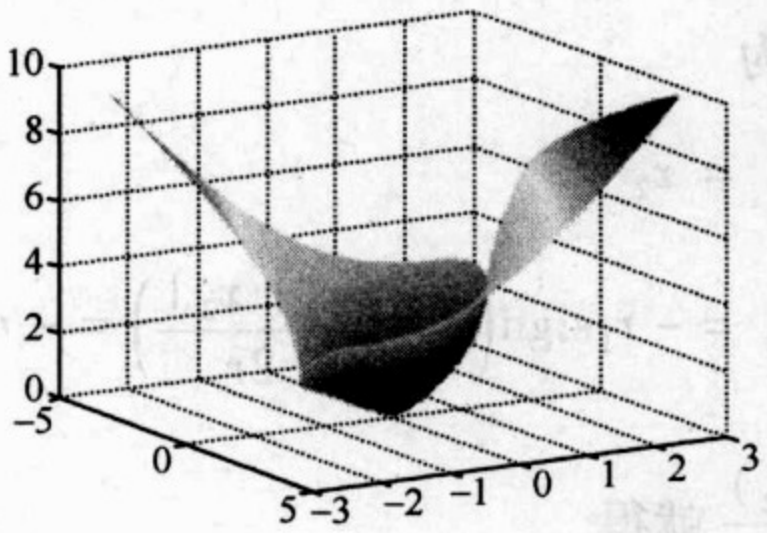


图 3.5.6

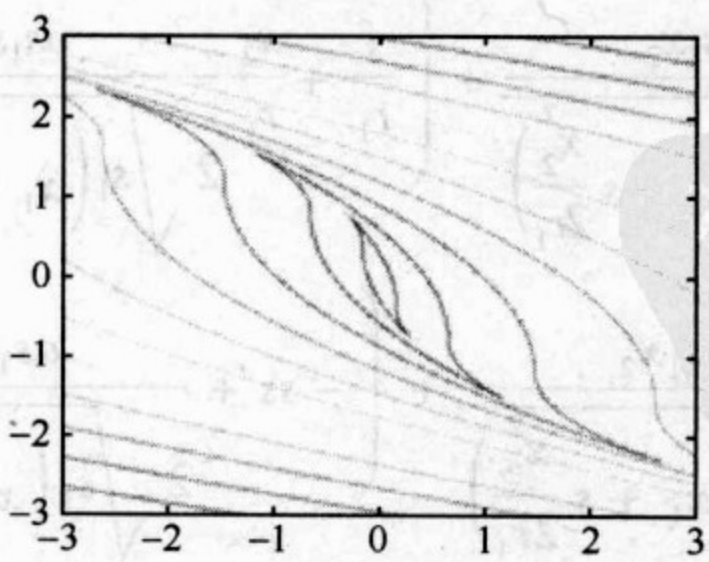


图 3.5.7

由于 $t = s\dfrac{x_2}{r_1} + a\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}$ 是沿系统轨线到达原点的时间，只能是正定函数，而它沿系统轨线的导数 $\dfrac{\mathrm{d}t(x_1,x_2)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial t(x_1,x_2)}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dfrac{\partial t(x_1,x_2)}{\partial x_2}\dot{x}_2$ 为常值 -1. 实际上，

$$\frac{\partial t(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{as_1}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}},$$

$$\frac{\partial t(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{s}{r_1} + \frac{x_2}{r_1}\frac{as_1 s}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}}$$

而闭环系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1 \operatorname{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) = -r_1 s \end{cases}$$

因此计算 $\dfrac{\mathrm{d}t(x_1,x_2)}{\mathrm{d}t}$ 就得

$$\frac{\mathrm{d}t(x_1,x_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{as_1 x_2}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}} + \left(\frac{s}{r_1} + \frac{x_2}{r_1}\frac{as_1 s}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}}\right)(-r_1 s) =$$

$$\frac{as_1 x_2}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}} + \left(-ss + \frac{as_1 ssx_2}{2\sqrt{s_1\left(x_1 + s\dfrac{x_2^2}{2r_1}\right)}}\right) = -1$$

在此，有意思的是如下一个显然的事实，即如下一个命题：

命题. 对一个二阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2)\end{cases} \tag{3.5.34}$$

若有一个连续的李亚普诺夫函数 $V(x_1, x_2)$，满足不等式

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial V}{\partial x_2}f(x_1, x_2) < -a, a = \text{const} > 0$$

那么在满足条件 $\left|\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2}w(t)\right| \leqslant a$ 的扰动 $w(t)$ 的作用下，受扰系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + w(t)\end{cases}$$

仍然渐近稳定.

如果我们把 $f(x_1, x_2)$ 当作开环系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u + w(t)\end{cases}$$

中的状态反馈，那么上述事实可以解释成：状态反馈 $f(x_1, x_2)$ 能够抑制满足条件 $\left|\frac{\partial V(x_1, x_2)}{\partial x_2}w(t)\right| \leqslant a$ 的扰动 $w(t)$ 的作用，使闭环系统渐近稳定.

上述式(3.5.14)和式(3.5.33)给出的到达原点的时间函数 $T(x_1, x_2)$ 和 $t(x_1, x_2)$ 分别满足

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_2}\left(-r\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r}\right)\right) = -1 < 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}x_2 + \frac{\partial t}{\partial x_2}\left(-r_1\operatorname{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2r}\right)\right) = -1 < 0, r_1 > r$$

因此对闭环系统(3.5.18)，(3.5.19)分别施加满足

$$\frac{\partial T}{\partial x_2}w(x_1, x_2, t) < 1, \frac{\partial t}{\partial x_2}w(x_1, x_2, t) < 1$$

的扰动 $w(x_1, x_2, t)$ 的系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) + w(x_1, x_2, t)\end{cases}$$

和系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -r_1\text{sign}\left(x_1 + \dfrac{x_2 \mid x_2 \mid}{2r}\right) + w(x_1, x_2, t), r_1 > r\end{cases}$$

仍然渐近稳定.

3.6 三阶线性最速控制系统的开关曲面

三阶线性控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u, \mid u \mid \leqslant r\end{cases} \tag{3.6.1}$$

在三维状态空间中,以原点为终点的最速轨线可分为如下五种形式:控制取 $u = +r$ 或 $u = -r$ 不开关直接进入原点的轨线;控制先取 $u = +r$,走一段开关一次,然后取 $u = -r$ 来进入原点的轨线和控制先取 $u = -r$,走一段开关一次,然后取 $u = +r$ 来进入原点的轨线;控制先取 $u = +r$,走一段,开关一次后取 $u = -r$ 再走一段,再开关一次后取 $u = +r$ 来最后进入原点的轨线;控制先取 $u = -r$,走一段开关一次后取 $u = +r$,再走一段,再开关一次,然后取 $u = -r$ 来最后进入原点的轨线. 在所有的最速轨线上,控制量的绝对值始终取最大值 $\mid u \mid = r$,并且在到达原点之前的整个过程中,控制量最多开关两次. 控制量最多开关一次的所有最速轨线将在三维状态空间中编织出一个二维曲面,这个曲面是在整个状态空间中最速控制综合函数 $u(x_1, x_2, x_3)$ 取 $+r$ 和 $-r$ 的分界面,被称为“开关曲面”. 因此要确定此开关曲面,将采用从原点出发积分倒退方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_3 \\ \dot{x}_3 = -u \end{cases} \tag{3.6.2}$$

的办法来确定.

下面就用倒退积分的办法确定这个三维空间中的开关曲面.

先取 $u = +r$,从原点出发积分倒退方程,得

$$\begin{cases} x_3(\tau) = -r\tau \\ x_2(\tau) = r\dfrac{\tau^2}{2} \\ x_1(\tau) = -r\dfrac{\tau^3}{6} \end{cases}$$

开关一次后取 $u = -r$,以上式表示的点为初值倒退积分,得

$$\begin{cases} x_3 = -r\tau + r(t-\tau) = rt - 2r\tau \\ x_2 = r\dfrac{\tau^2}{2} - r\dfrac{(t-\tau)^2}{2} + r\tau(t-\tau) \\ x_1 = -r\dfrac{\tau^3}{6} - r\dfrac{\tau^2}{2}(t-\tau) + r\dfrac{(t-\tau)^3}{6} - r\tau\dfrac{(t-\tau)^2}{2} \end{cases} \tag{3.6.3}$$

从式(3.6.3)第1式解出 $t - \tau = \tau + \dfrac{x_3}{r}$,把它代到第2式,得

$$2\frac{x_2}{r} = \tau^2 + 2\tau\left(\tau + \frac{x_3}{r}\right) - \left(\tau + \frac{x_3}{r}\right)^2 = 2\tau^2 - \frac{x_3^2}{r^2}$$

由此

$$\tau = \pm\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \frac{x_3^2}{2r}}, x_2 + \frac{x_3^2}{2r} \geqslant 0$$

由于 $\tau \geqslant 0$,这里的符号"±"只能取"+",从而有

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}\sqrt{x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}}, x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r} \geqslant 0 \\ t = 2\tau + \dfrac{x_3}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}} + \dfrac{x_3}{r} \\ t - \tau = \tau + \dfrac{x_3}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}} + \dfrac{x_3}{r} \end{cases} \tag{3.6.4}$$

把式(3.6.3)中第3式整理成

$$6\frac{x_1}{r} = -\tau^3 - 3\tau^2(t-\tau) + (t-\tau)^3 - 3\tau(t-\tau)^2$$

$$6\frac{x_1}{r} = -(\tau + t - \tau)^3 + 2(t-\tau)^3 = -t^3 + 2(t-\tau)^3 \tag{3.6.5}$$

把 τ 和 t 的表达式(式3.6.4中第2式和第3式)代进去,最后得

$$6\frac{x_1}{r} = -\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + \frac{x_3}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + \frac{x_3}{r}\right)^3$$

$$6\frac{x_1}{r} = -\frac{6}{r}\left(x_2 + \frac{x_3^2}{2r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + \frac{x_3}{r}\right) + \left(\frac{x_3}{r}\right)^3$$

$$x_1 = -\left(x_2 + \frac{x_3^2}{2r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + \frac{x_3}{r}\right) + \frac{x_3^3}{6r^2}, x_2 + \frac{x_3^2}{2r} \geqslant 0 \tag{3.6.6}$$

然后取 $u = -r$,从原点倒退积分,得

$$\begin{cases} x_3(\tau) = r\tau \\ x_2(\tau) = -r\dfrac{\tau^2}{2} \\ x_1(\tau) = r\dfrac{\tau^3}{6} \end{cases}$$

开关一次后取 $u = +r$,以上式表示的点为初值倒退积分,得

$$\begin{cases} x_3 = r\tau - r(t-\tau) = -rt + 2r\tau \\ x_2 = -r\dfrac{\tau^2}{2} + r\dfrac{(t-\tau)^2}{2} - r\tau(t-\tau) \\ x_1 = r\dfrac{\tau^3}{6} + r\dfrac{\tau^2}{2}(t-\tau) - r\dfrac{(t-\tau)^3}{6} + r\tau\dfrac{(t-\tau)^2}{2} \end{cases} \tag{3.6.7}$$

从式(3.6.7) 中第 1 式解出 $t-\tau = \tau - \dfrac{x_3}{r}$,把它代到第 2 式,得

$$2\frac{x_2}{r} = -\tau^2 - 2\tau\left(\tau - \frac{x_3}{r}\right) + \left(\tau - \frac{x_3}{r}\right)^2 = -2\tau^2 + \frac{x_3^2}{r^2}$$

由此

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}}, x_2 - \dfrac{x_3^2}{2r} \leqslant 0 \\ t = 2\tau - \dfrac{x_3}{r} = \dfrac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}} - \dfrac{x_3}{r} \\ t - \tau = \tau - \dfrac{x_3}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2 + \dfrac{x_3^2}{2r}} - \dfrac{x_3}{r} \end{cases} \tag{3.6.8}$$

把式(3.6.7) 的第 3 式整理成

$$6\frac{x_1}{r} = \tau^3 + 3\tau^2(t-\tau) + 3\tau(t-\tau)^2 - (t-\tau)^3$$

$$6\frac{x_1}{r} = (\tau + t - \tau)^3 - 2(t-\tau)^3 = t^3 - 2(t-\tau)^3$$

把 τ 和 t 的表达式(式 3.6.8 中第 2 式和第 3 式) 代进去,最后得

$$6\frac{x_1}{r}=\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2+\frac{x_3^2}{2r}}-\frac{x_3}{r}\right)^3-2\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2+\frac{x_3^2}{2r}}-\frac{x_3}{r}\right)^3$$

$$x_1=\left(-x_2+\frac{x_3^2}{2r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2+\frac{x_3^2}{2r}}-\frac{x_3}{r}\right)+\frac{x_3^3}{6r^2},$$

$$-x_2+\frac{x_3^2}{2r}=-\left(x_2-\frac{x_3^2}{2r}\right)\geqslant 0 \tag{3.6.9}$$

把式(3.6.6),式(3.6.9) 放在一起

$$\begin{cases} x_1=-\left(x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}}+\dfrac{x_3}{r}\right)+\dfrac{x_3^3}{6r^2}, \\ x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}\geqslant 0 \\ x_1=\left(-x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{-x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}}-\dfrac{x_3}{r}\right)+\dfrac{x_3^3}{6r^2}, \\ -x_2+\dfrac{x_3^2}{2r}\geqslant 0 \end{cases} \tag{3.6.10}$$

在这里,由于有

$$x_2+\frac{x_3^2}{2r}\geqslant x_2+\frac{|x_3|x_3}{2r},\quad -x_2+\frac{x_3^2}{2r}\geqslant -\left(x_2+\frac{|x_3|x_3}{2r}\right)$$

$$x_2+\frac{|x_3|x_3}{2r}\geqslant 0\Rightarrow x_2+\frac{x_3^2}{2r}\geqslant 0,$$

$$x_2+\frac{|x_3|x_3}{2r}\leqslant 0\Rightarrow -x_2+\frac{x_3^2}{2r}\geqslant 0$$

因此,令

$$s=\operatorname{sign}\left(x_2+\frac{|x_3|x_3}{2r}\right)$$

则式(3.6.10)的两式统一地写成

$$x_1 = -s\left(sx_2 + \frac{x_3^2}{2r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{sx_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + s\frac{x_3}{r}\right) + \frac{x_3^3}{6r^2} \tag{3.6.11}$$

这就是三维状态空间中的最速开关曲面的表达式. 此开关曲面也可以表示成

$$\begin{cases} s = \operatorname{sign}\left(x_2 + \dfrac{|x_3|x_3}{2r}\right) \\ a = sx_2 + \dfrac{x_3^2}{2r} \\ b = \dfrac{x_3}{r} \\ x_1 = -sa\left(\sqrt{\dfrac{a}{r}} + sb\right) + \dfrac{r}{6}b^3 \end{cases} \tag{3.6.12}$$

于是最速控制综合函数的表达式变成

$$u(x_1,x_2,x_3) = -r\operatorname{sign}\left(x_1 + s\left(sx_2 + \frac{x_3^2}{2r}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{sx_2 + \frac{x_3^2}{2r}} + s\frac{x_3}{r}\right) - \frac{x_3^3}{6r^2}\right) \tag{3.6.13}$$

或

$$\begin{cases} s = \operatorname{sign}\left(x_2 + \dfrac{|x_3|x_3}{2r}\right) \\ a = sx_2 + \dfrac{x_3^2}{2r} \\ b = \dfrac{x_3}{r} \\ u(x_1,x_2,x_3) = -r\operatorname{sign}\left(x_1 + sa\left(\sqrt{\dfrac{a}{r}} + sb\right) - \dfrac{r}{6}b^3\right) \end{cases} \tag{3.6.14}$$

开关曲面在空间的形状和在 x_1 轴向高度的等高线在(x_2,x_3)平面上的投影曲线如图 3.6.1 和图 3.6.2 所示.

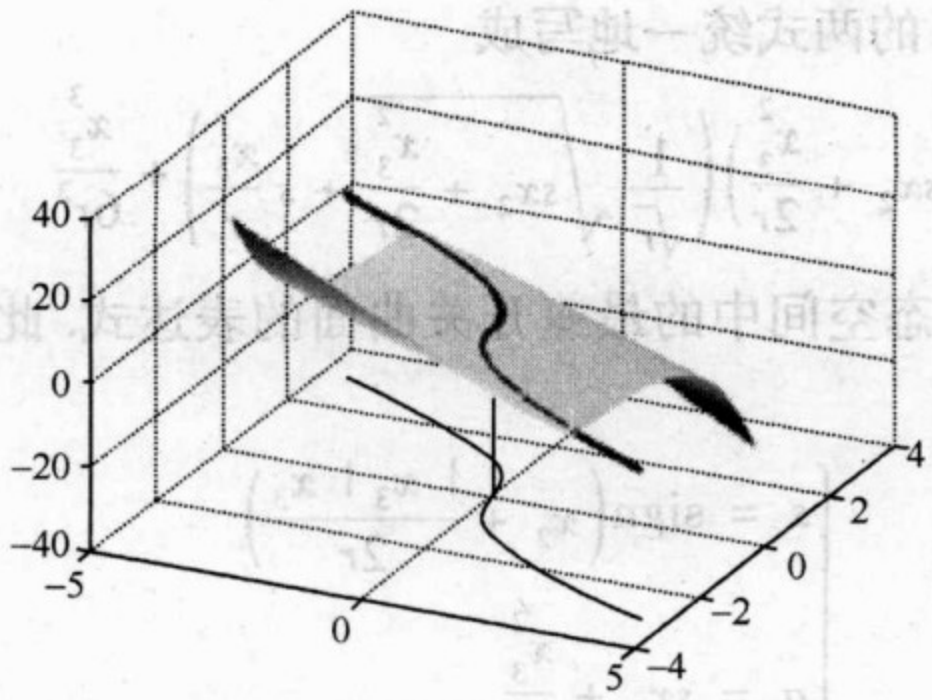


图 3.6.1

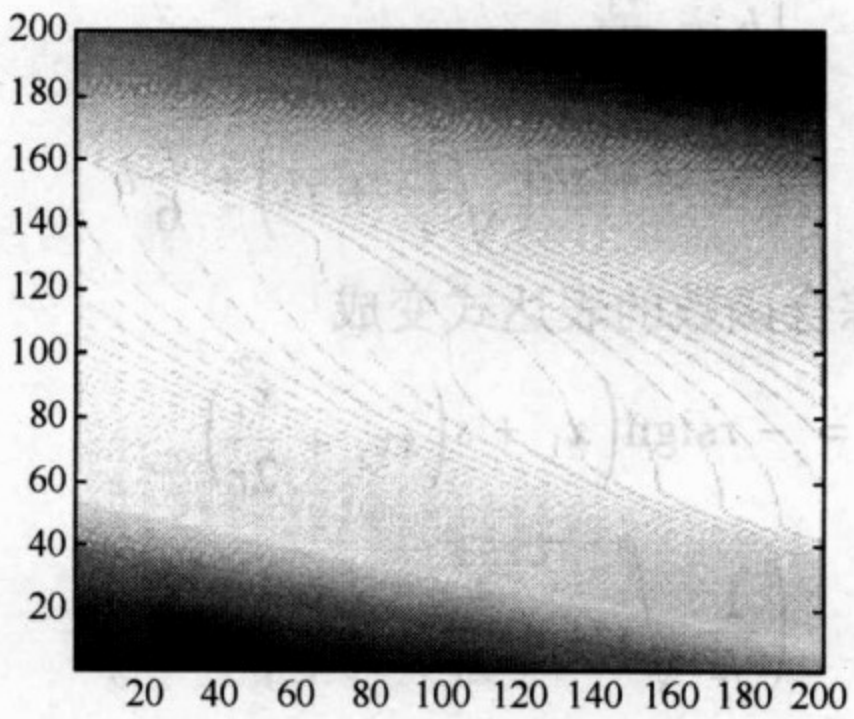


图 3.6.2

利用这个最速控制反馈函数可以构造出同时提取信号 $v(t)$ 的一阶、二阶微分的跟踪微分器

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u(x_1 - v(t), x_2, x_3) \end{cases}$$

3.7 随动问题和调节问题

任何实在的反馈控制都是靠误差来实现的. 都有一个控制的

目标，这个控制目标也许是一个给定的常值，也许是一个时变的运动轨迹. 我们实现控制的过程，实际上是在不断的感受控制目标与被控对象实际行为之间的误差，适当方式处理这个误差信息，并按某种规则或方式随时影响被控对象实际行为，使控制目标与被控对象实际行为之间的误差最终被消除，从而达到控制的目的. 简单地说，“基于误差来消除误差”是反馈控制的最基本的思想和方法. 比如，人们学会骑自行车就要掌握两点：① 骑上去掌握运动中的平衡；② 驱车绕过障碍和拐弯来到达目的地. 训练掌握运动中平衡的过程，实际上是人们感受失衡的感觉来训练如何消除此失衡的办法. 训练达到目的地时人们头脑里就有一个设定的运动轨迹，人们随时感受这个设定轨迹和自行车实际位置之间误差，然后训练消除这个误差的办法.

设控制目标信号 $v(t)$ 是由如下动态系统

$$\dot{v} = w(v,t), \mid w(v,t) \mid \leqslant w_0$$

产生，如若 $v(t)$ 是常值，那么它是脉冲函数 $w(x,t) = v(0)\delta(t)$ 的积分. 现在对系统

$$\dot{x} = f(x,t) + u$$

施加误差 $e = v - x$ 的反馈 $u = \varphi(e) = \varphi(v - x), (e\varphi(e) > 0)$ 来让 $x(t)$ 跟踪 $v(t)$.

这个问题的误差方程为

$$\dot{e} = \dot{v} - \dot{x} = w(v,t) - f(x,t) - u = w(v,t) - f(v - e,t) - \varphi(e)$$

令 $g(e,t) = w(v,t) - f(x,t)$，那么当

$$eg(e,t) < e\varphi(e)$$

时，就有

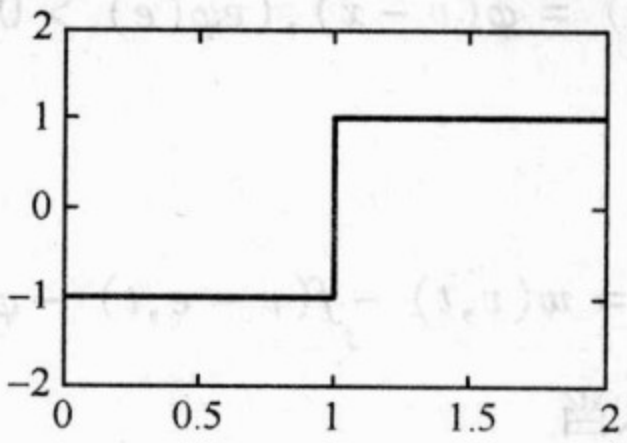
$$\frac{\mathrm{d}e^2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}e\dot{e} = = eg(e,t) - e\varphi(e) < 0$$

从而 $e \Rightarrow 0$. 因此控制系统设计问题就是选择满足不等式 $eg(e,t)$

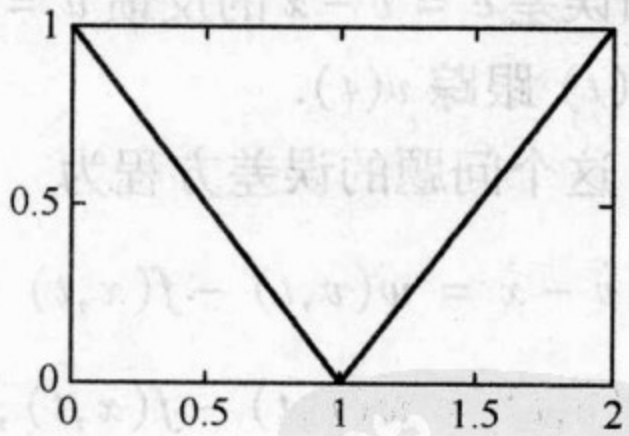
$< e\varphi(e)$ 的函数 $u = \varphi(e)$ 的问题. 若能选择满足这个不等式的 $\varphi(e)$,它就能够抑制一定范围的确定的和不确定因素 $w(v,t) - f(v-e,t) = W(e,v,t)$ 的作用且能达到 $e \to 0$ 的目的. 在这里,我们是把 $W(e,v,t)$ 当作扰动来看待. 当 $v(t) \equiv \text{const}$ 时,这个问题就是所谓的“调节问题”,而 $v(t)$ 为事先未知其变化规律,只能实时地得到 $v(t)$ 时的问题称为所谓的“随动问题”或“跟踪问题”. 因此调节问题和随动问题从误差方程来看只是常值扰动与时变扰动的区分,从克服扰动作用的角度看没有必要把它们区分为两个不同问题,即调节问题和随动问题是可以不加区分地统一处理.

3.8 几个有用的非线性函数

在许多智能表达中经常应用数量关系条件判断,如某一个变量 x 属于某一范围内变化时相应的另一个变量 y 取另外一个范围值等. 常常用条件语句表述上述事实. 但是我们也可以用适当的非线性函数 $y = f(x)$ 来表示这种数量关系判断条件. 这里有两个基本函数——符号函数 $\text{sign}(x-a)$ 和取绝对值函数 $|x-a|$,其图形分别如图 3.8.1(a)、(b) 所示.



(a)



(b)

图 3.8.1

1. 定义区间函数

$$\text{fsg}_0(x,d) = \frac{\text{sign}(x+d) - \text{sign}(x-d)}{2}$$

是在区间 $[-d,d]$ 上取 1,其余取 0 的函数.

2. 定义更一般的区间函数

$$\mathrm{fsg}(x,a,b) = \frac{\mathrm{sign}(x-a) - \mathrm{sign}(x-b)}{2}$$

其图形如图 3.8.2 所示($a = -1, b = 1$). 是在区间$[a,b]$上取 1, 其余取 0 的函数.

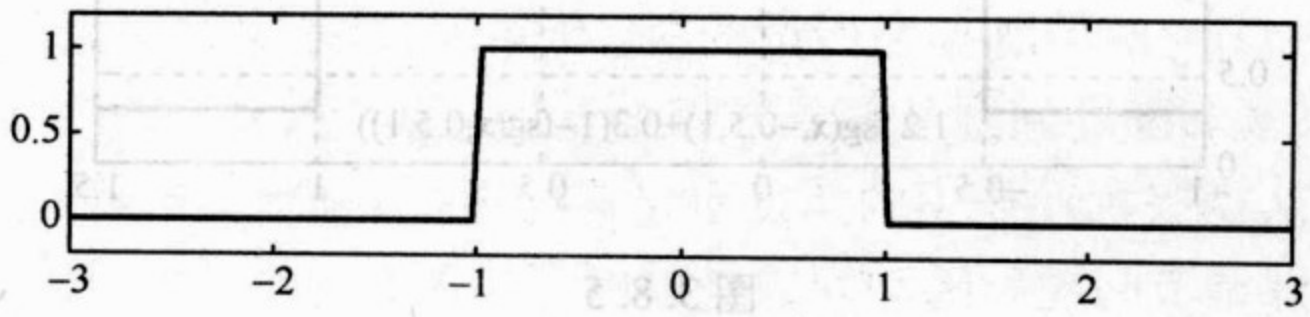


图 3.8.2

例 1 取$f(x) = \sin(2\pi x)$, 那么函数$y = \mathrm{fsg}(x,0,1.5)f(x)$的图形如图 3.8.3 所示.

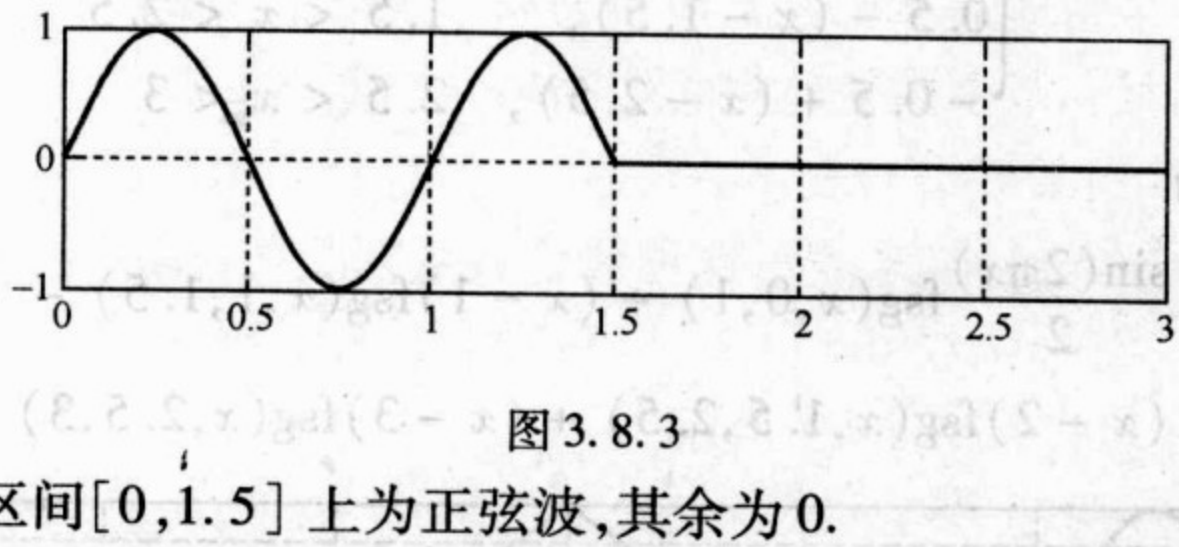


图 3.8.3

在区间$[0,1.5]$上为正弦波, 其余为 0.

例 2 阶梯函数

$$y = \mathrm{fsg}(x,0,1) + 2\mathrm{fsg}(x,1,2) + 3\mathrm{fsg}(x,2,3)$$

其图形如图 3.8.4 所示.

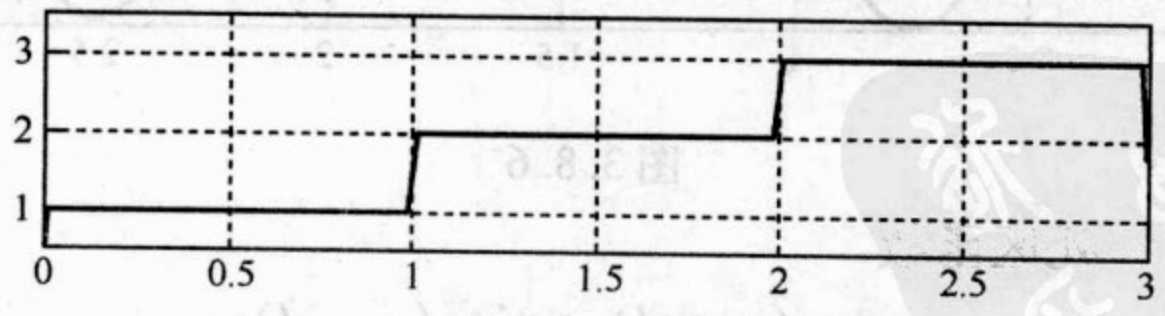


图 3.8.4

例 3 函数

$$y = \begin{cases} a, x \in [d_1, d_2] \\ b, x \notin [d_1, d_2] \end{cases}$$

可表示成

$$y = a\mathrm{fsg}(x,d_1,d_2) + b(1 - \mathrm{fsg}(x,d_1,d_2))$$

取 $d_1 = -0.5, d_2 = 1.0, a = 1.2, b = 0.3$ 时的图形如图 3.8.5 所示.

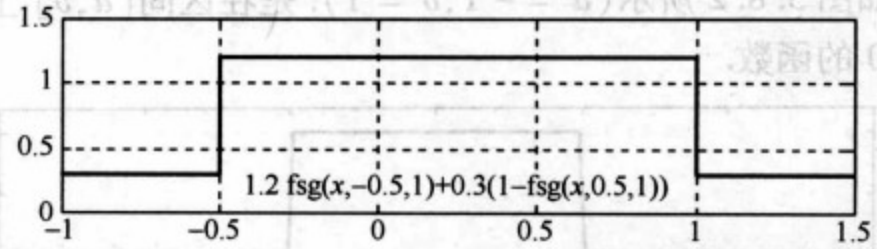


图 3.8.5

例 4 函数

$$y = \begin{cases} \sin(2\pi x), & 0 < x < 1 \\ x - 1, & 1 < x < 1.5 \\ 0.5 - (x - 1.5), & 1.5 < x < 2.5 \\ -0.5 + (x - 2.5), & 2.5 < x < 3 \end{cases}$$

可表示为

$$y = \frac{\sin(2\pi x)}{2}\mathrm{fsg}(x,0,1) + (x-1)\mathrm{fsg}(x,1,1.5) -$$

$$(x-2)\mathrm{fsg}(x,1.5,2.5) + (x-3)\mathrm{fsg}(x,2.5,3)$$

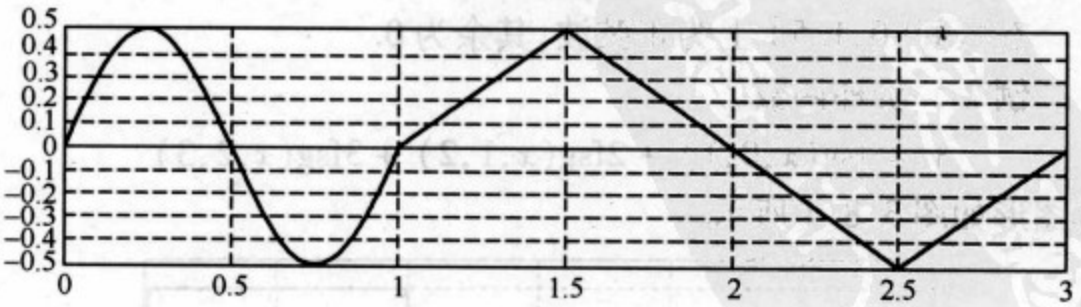
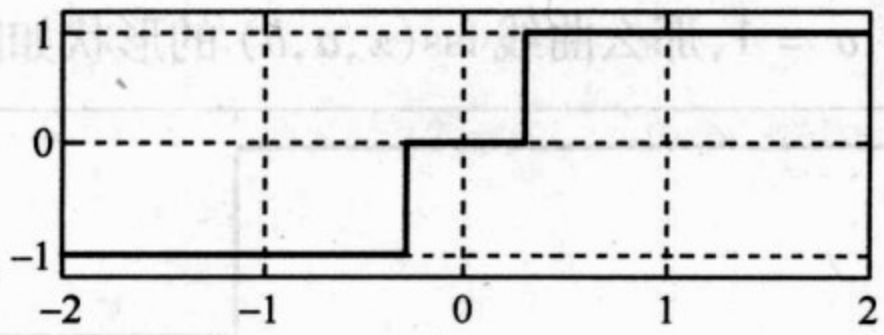


图 3.8.6

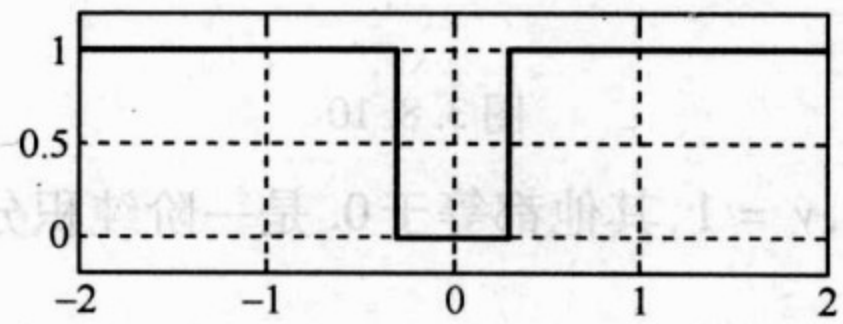
例 5 死区函数

$\mathrm{fdb}_0(x,d) = \dfrac{\mathrm{sign}(x+d) + \mathrm{sign}(x-d)}{2}$，其图形为图 3.8.7(a)．$\mathrm{sign}(x)\mathrm{fdb}_0(x,d)$ 图形为图 3.8.7(b).

例 6 $f(x) = \mathrm{sign}(x)\sqrt{|x|}, y = \mathrm{sign}(f)(|f| - \sqrt{d})(1 - \mathrm{fsg}_0(x,d))$（图 3.8.8）



(a)



(b)

图 3.8.7

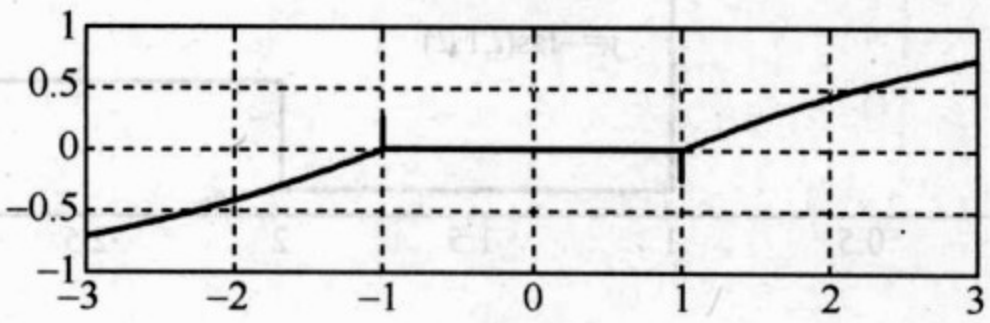


图 3.8.8

例 7 $f = x|x|, y = \text{sign}(f)(|f| - d^2)(1 - \text{fsg}_0(x,d))$(图 3.8.9)

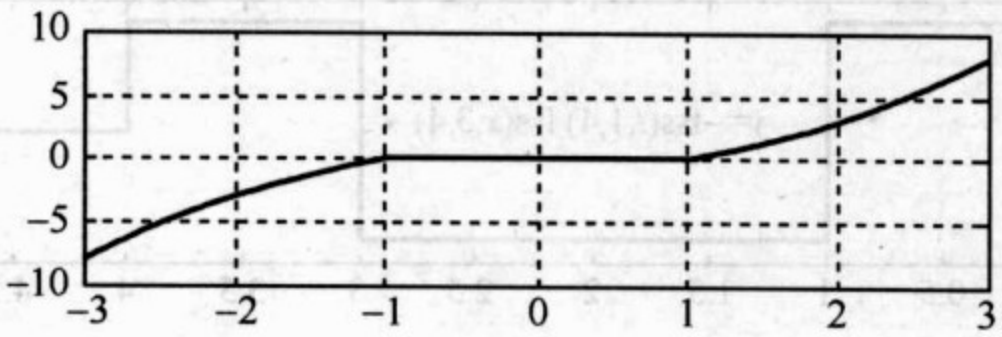


图 3.8.9

3. 最优开关函数

积分器串联型的位置分量,当控制量受限 $|u| \leqslant 1$ 时,从静止状态转移到某一给定距离的过程,其最速控制是遵守一定规则的开关函数. 对各阶次积分器串联型对象在这个过程的最速开关规律可按如下方式产生. 定义函数

$$\text{fss}(x,a,b) = \text{sign}(x-a)(1 - \text{sign}(x-b))/2, a < b$$

如果取 $b = 1.5, a = 1$,那么曲线 fss(x,a,b) 的形状如图 3.8.10 所示.

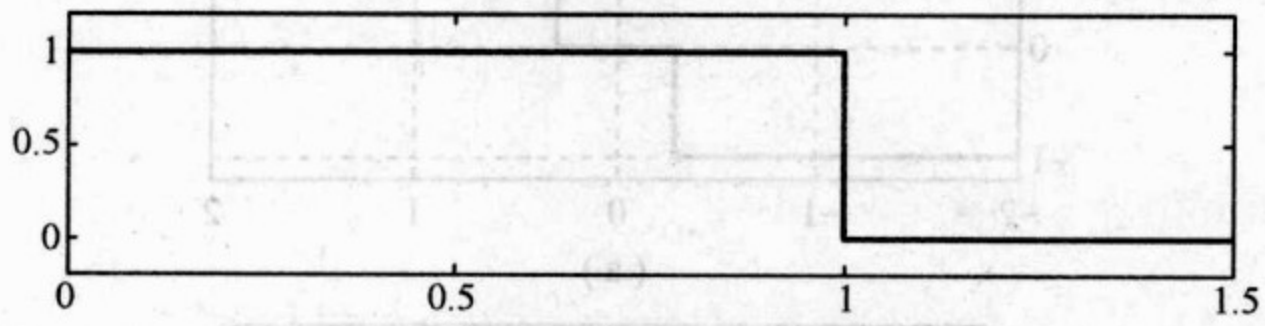


图 3.8.10

当 $0 < x < 1$ 时,$y = 1$,其他都等于 0. 是一阶纯积分器对象的最速控制规律.

二阶积分器串联型对象的最速开关规律如图 3.8.11 所示.

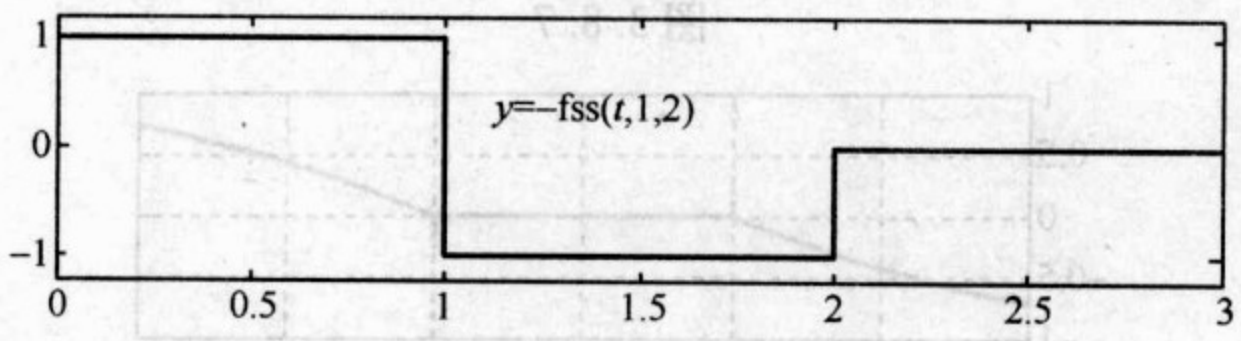


图 3.8.11

三,四阶积分器串联型对象的开关规律分别如图 3.8.12 和图 3.8.13 所示.

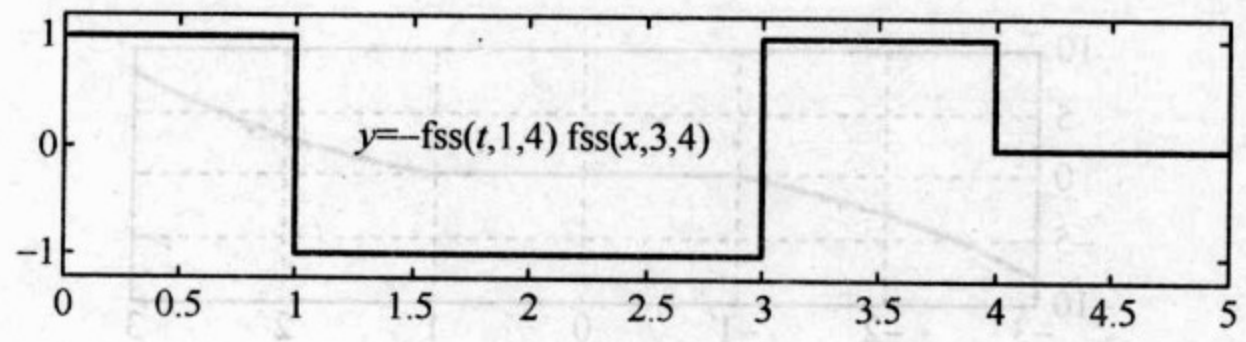


图 3.8.12

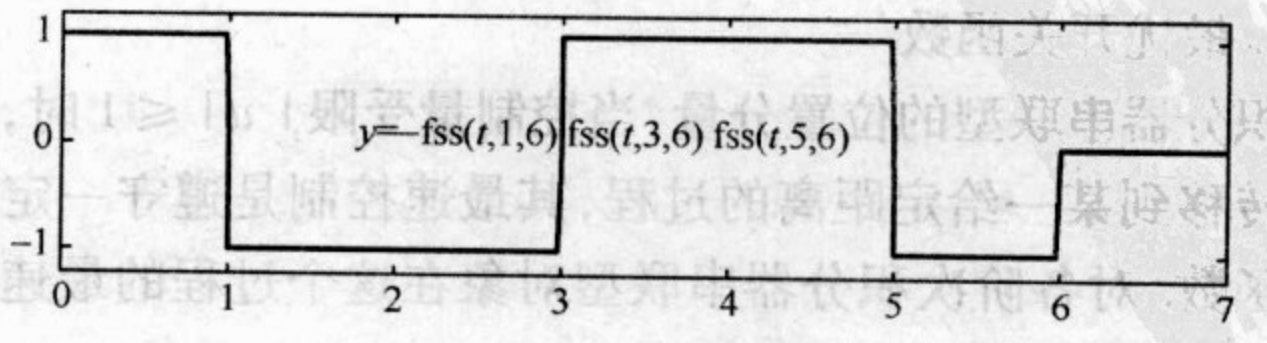


图 3.8.13

4. 绝对值函数之差

$$\mathrm{fst}_0(x,d) = \frac{|x+d|-|x-d|}{2d} = \begin{cases} x, & |x| < d \\ \mathrm{sign}(x), & |x| \geqslant d \end{cases}$$

$d = 1$ 时的图形为图 3.8.14.

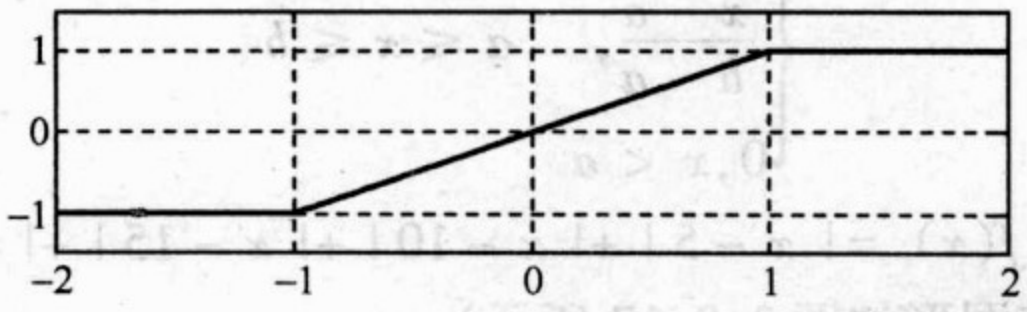


图 3.8.14

在区间$[-d,d]$上是斜率为$\frac{1}{d}$的直线,而这个区间之外取$\mathrm{sign}(x)$的线性饱和函数.

例 8 $f(x) = \mathrm{sign}(x)\sqrt{|x|}$,那么$y = d\mathrm{fst}_0(f(x),d) = \frac{|f(x)+d|-|f(x)-d|}{2}$在区间$[-d,d]$上取$f(x)$,而其外取$\mathrm{sign}(f(x))$(图 3.8.15).

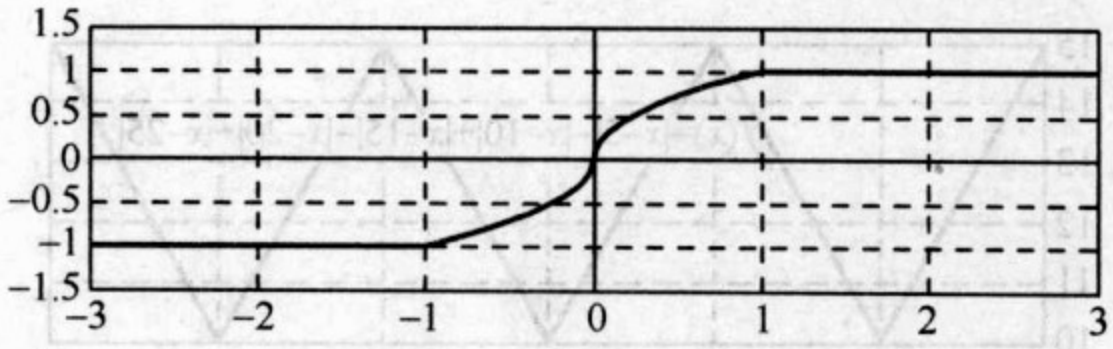


图 3.8.15

例9 $f = \sin(x), y = d\mathrm{fst}_0(f,d) = \frac{|f+d|-|f-d|}{2}$是从曲线$f = \sin(x)$中只取$-d \sim d$之间的值(图 3.8.16).

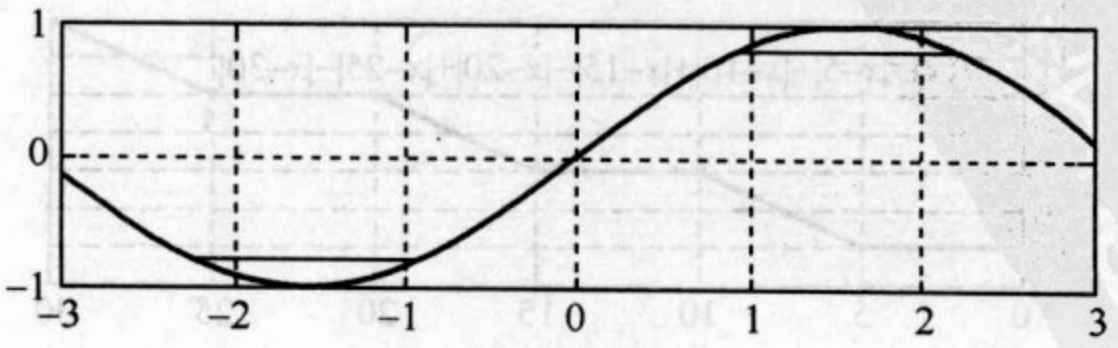


图 3.8.16

$$5.\ \mathrm{fst}(x,a,b) = \frac{\left(\frac{|x-a|-|x-b|}{b-a}+1\right)}{2} =$$

$$\begin{cases} 1, & x > b \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b \\ 0, & x < a \end{cases}$$

例 10 $f(x) = |x-5|+|x-10|+|x-15|+|x-20|+|x-25|$（其图形如图 3.8.17 所示）

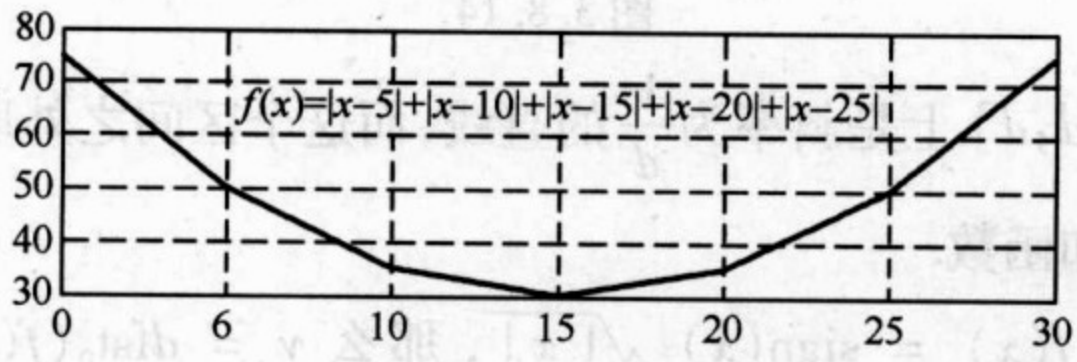


图 3.8.17

例 11 $f(x) = |x-5|-|x-10|+|x-15|-|x-20|+|x-25|$（其图形如图 3.8.18 所示）

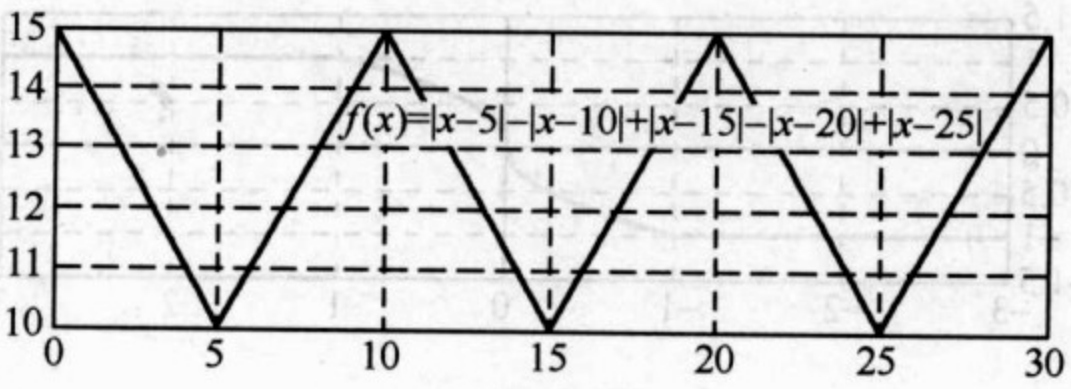


图 3.8.18

例 12 $f(x) = |x-5|-|x-10|+|x-15|-|x-20|+|x-25|-|x-30|$（其图形如图 3.8.19 所示）

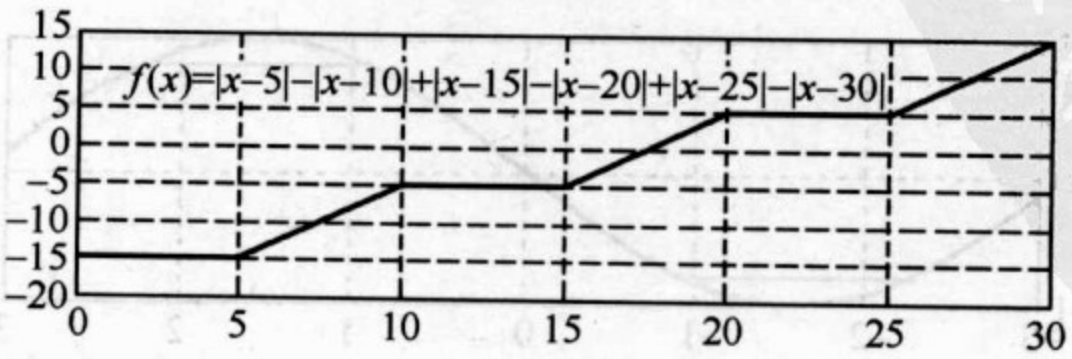


图 3.8.19

灵活应用符号函数与绝对值函数可以构造出许多与条件语句相关的非线性函数,因此一些简单的人工智能是可以用适当的非线性函数来表达出来的.

6. 用 $\mathrm{fst}(x,d_1,d_2)$ 函数的组合来逼近任意函数

设 $f(x)$ 在自变量

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$$

上的值为

$$y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5$$

记

$$d_1 = y_1 - y_0, d_2 = y_2 - y_1, d_3 = y_3 - y_2, d_4 = y_4 - y_3, d_5 = y_5 - y_4$$

那么函数 $f(x)$ 近似的逼近成

$$y = y_0 + d_1\mathrm{fst}(x,x_0,x_1) + d_2\mathrm{fst}(x,x_1,x_2) + d_3\mathrm{fst}(x,x_2,x_3) + d_4\mathrm{fst}(x,x_3,x_4) + d_5\mathrm{fst}(x,x_4,x_5)$$

例 13 用 $\mathrm{fst}(x,a,b)$ 逼近函数 $f(x) = \mathrm{sign}(x)\mid x\mid^{0.5}$.

$f(x)$ 在点 $x = 0,0.1,0.3,0.5,0.8,1.0$ 上的函数值分别是:0,0.3162,0.5477,0.7071,0.8944,1.000,那么就用组合函数 $y = 0.3162\mathrm{fst}(x,0,0.1) + 0.2315\mathrm{fst}(x,0.1,0.3) + 0.1593\mathrm{fst}(x,0.3,0.5) + 0.1873\mathrm{fst}(x,0.5,0.8) + 0.1055\mathrm{fst}(x,0.8,1.0)$ 来逼近 $f(x)$(图 3.8.20).

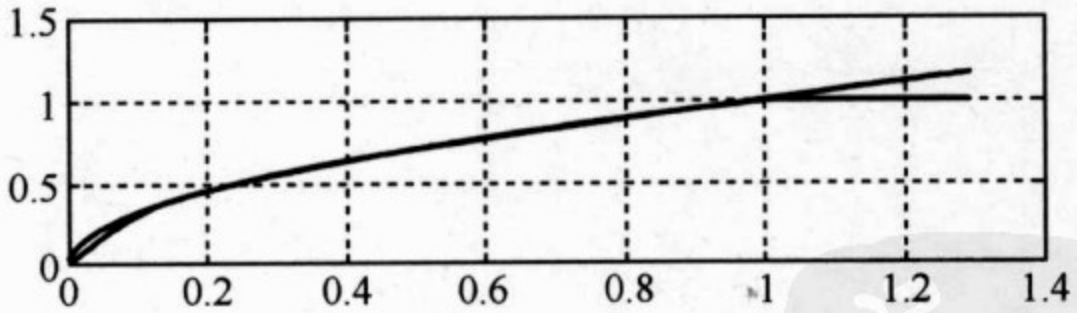


图 3.8.20

7. 幂次函数:$\mathrm{fal}(x,\alpha,\delta) = \dfrac{x}{\delta^{1-\alpha}}f_{\mathrm{sg}}(x,\delta) + \mid f_{\mathrm{db}}(x,\delta)\mid \mid x\mid^{\alpha}\mathrm{sign}(x)$

其中,取 $\alpha > 1,\alpha < 0,0 < \alpha < 1,\alpha = 1$ 时的曲线如图 3.8.21 所示.

这些非线性函数的合理利用可以产生许多智能性功能. 非线性含有许多智能!

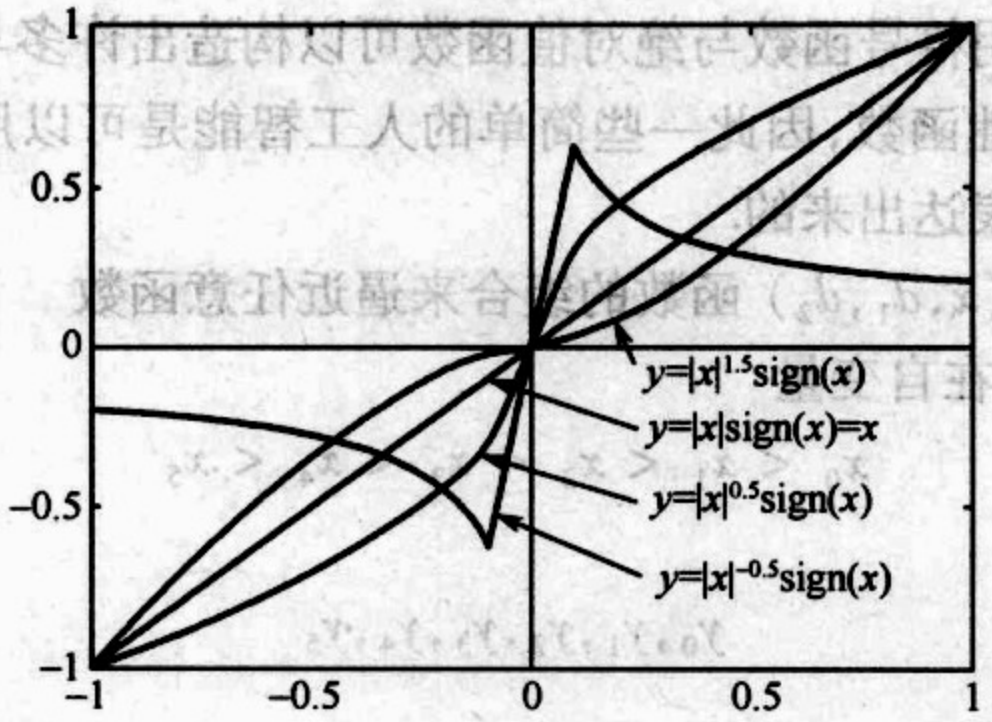


图 3.8.21

第四章　扩张状态观测器

控制系统中的负反馈对扰动有一定的抑制作用，但不能完全消除其影响，采取什么样的措施来有效地消除各种扰动的影响，始终是控制系统设计者们要考虑的重要课题. 消除扰动影响，在控制工程历史上曾出现过两个原理：苏联学者希巴诺夫(Щипанов)20 世纪 40 年代提出的“绝对不变性原理”和加拿大学者 Davison 和 Wonham 在 20 世纪 70 年代提出的“内模原理”. 前者消除扰动影响是基于直接量测扰动的基础上，而后者则基于知道生成扰动的模型基础上. 从完成控制的目的来看，如果某一种扰动作用不影响系统的被控输出(即这种扰动从被控输出不能观测，或这种扰动不能控制被控输出)，那么在控制被控输出的过程中是用不着考虑消除这种扰动的影响. 需要消除的是能够影响被控输出的那种扰动(即由被控输出能观测，或能控被控输出的那种扰动). 既然某一种扰动能够影响被控输出，其作用就应该反映在这个被控输出信息中，从而就有可能以适当方式处理被控输出信息来估计出其作用. 既然能估计出影响被控输出的扰动作用，就有可能用补偿的办法来消除其影响了. 在控制工程中常常采用“前馈补偿”的措施，这实际上是直接或间接测量扰动来进行“扰动补偿”的办法.

借用状态观测器的思想，把能够影响被控输出的扰动作用扩张成新的状态变量，用特殊的反馈机制来建立能够观测被扩张的状态 —— 扰动作用的扩张状态观测器. 这个扩张状态观测器并不依赖于生成扰动的具体数学模型，也不需要直接去测量其作用. 扩张状态观测器，从某种意义上，是通用而实用的扰动观测器.

本章先介绍状态观测器的机理及非线性状态观测器的状态估计误差,然后引入被扩张的状态、对应的扩张状态观测器结构及其仿真研究结果;输出信号被噪声污染时的具体处理方法;讨论扩张状态观测器的参数选取问题;系统的“时间尺度”与扩张状态观测器参数之间关系等.

4.1 状态观测器

系统在运行过程中总是与环境进行信息交流. 系统把某些部分状态变量信息传给外部,也从外部吸入一些信息,即系统是与外部进行信息交流的过程中变化发展. 人们只能收集系统外部变量来把握系统运行状况. 对于动态过程而言,系统外部变量就是系统传给外部的输出变量 —— 部分状态变量信息和外部给系统的输入变量,包括控制输入. 根据这种外部变量的观测来确定系统内部状态变量的装置叫做状态观测器,即根据量测到的系统输入(控制量)和系统输出(部分状态变量或状态变量的函数)来确定系统所有内部状态信息的装置就是状态观测器(图 4.1.1).



图 4.1.1

对线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BU} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

来说,$\boldsymbol{X}$ 是 n 维状态变量,$\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 分别是 p 维、q 维向量,通常 $q < n$. $p < n$. 以对象的输出量 $\boldsymbol{Y}$ 和输入量 $\boldsymbol{U}$ 做为其输入,可构造出如下新系统

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{Z}} &= \boldsymbol{AZ} - \boldsymbol{L}(\boldsymbol{CZ} - \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{BU} = \\ &\quad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{LY} + \boldsymbol{BU} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

式中：L 为要适当选取的矩阵. 这是用对象的输出量 Y 和输入量 U 来设计出的新系统. 今令这两个系统状态变量的误差记为 $e = Z - X$，则上面两个方程组相减，得误差变量 e 所满足的方程组

$$\dot{e} = (A - LC)e \tag{4.1.3}$$

这里只要取矩阵 L，使矩阵

$$(A - LC) \tag{4.1.4}$$

稳定（系统 (A, C) 的能观性保证这样的 L 存在），就有 $e \Rightarrow 0$，从而 $Z \Rightarrow X$. 新设计的系统(4.1.2) 的状态 Z 就是能近似地估计出原系统(4.1.1) 的所有状态变量 X. 因此，当条件(4.1.4) 得到满足时，把新建的系统(4.1.2) 称做原系统(4.1.1) 的状态观测器. 这个状态观测器(4.1.2) 也可以改写成

$$\begin{cases} e = CZ - Y \\ \dot{Z} = AZ - Le + BU \end{cases} \tag{4.1.5}$$

式中：e 为系统的输出误差. 因此状态观测器是用输出误差的“反馈”来改造原系统而构造出来的新系统.

下面具体看看特殊的二阶系统的状态观测器的具体形式. 设有二阶线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.6}$$

对这个系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, C = [1\ 0], L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$$

因此

$$LC = \begin{bmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & 0 \end{bmatrix}, AZ - Le_1 = \begin{bmatrix} z_2 - l_1 e_1 \\ a_1 z_1 + a_2 z_2 - l_2 e_1 \end{bmatrix}$$

根据式(4.1.5)，对应于这个系统的状态观测器形式为

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - l_1 e_1 \\ \dot{z}_2 = (a_1 z_1 + a_2 z_2) - l_2 e_1 + bu \end{cases} \tag{4.1.7}$$

其中,参数 l_1, l_2 就是在式(4.1.4)中要选取的 $\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$. 这个系统与原系统的误差方程为

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2 \\ \dot{e}_1 = -l_1 e_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 = (-l_2 + a_1) e_1 + a_2 e_2 + bu \end{cases}$$

因此只要选取参数 l_1, l_2,使得矩阵

$$\begin{bmatrix} -l_1 & 1 \\ -l_2 + a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

稳定,那么系统(4.1.7)将成为系统(4.1.6)的状态观测器.

对非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.8}$$

当函数 $f(x_1, x_2)$ 和 b 已知时,也可以建立如下状态观测器

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - l_1 e_1 \\ \dot{z}_2 = f(z_1, z_2) - l_2 e_1 + bu \end{cases} \tag{4.1.9}$$

这时,系统(4.1.8)和系统(4.1.9)的误差方程为

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2 \\ \dot{e}_1 = e_2 - l_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = f(x_1 + e_1, x_2 + e_2) - f(x_1, x_2) - l_2 e_1 \end{cases}$$

假定函数 $f(x_1, x_2)$ 连续可微,那么按泰勒展开线性近似成

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2 \\ \dot{e}_1 = e_2 - l_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} e_1 + \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} e_2 - l_2 e_1 \end{cases} \tag{4.1.10}$$

这里，只要$\dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}$有界，总可以选$l_1, l_2$，使误差系统(4.1.10)稳定，于是系统(4.1.9)将成为系统(4.1.8)的状态观测器.

下面要讨论的问题是，原系统(4.1.5)和(4.1.7)中的参数a_1, a_2或函数$f(x_1, x_2)$未知时，我们能否构造出估计状态变量x_1和x_2的状态观测器?暂时先假定参数b已知.

已知线性系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BU} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{CX} + \boldsymbol{DU} \end{cases} \tag{4.1.11}$$

(这里$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$是列向量)的对偶系统为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi A} + \boldsymbol{\eta C} \\ \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi B} - \boldsymbol{\eta D} \end{cases} \tag{4.1.12}$$

式中：$\boldsymbol{\psi}$为对偶系统的状态向量；$\boldsymbol{\eta}$为对偶系统的输入向量，即对偶系统的控制向量；$\boldsymbol{\varphi}$为对偶系统的输出向量. $\boldsymbol{\psi}$、$\boldsymbol{\eta}$、$\boldsymbol{\varphi}$都是横向量. 现在对对偶系统(4.1.12)取状态反馈

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\psi L} \tag{4.1.13}$$

那么对偶的闭环系统变成

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\psi A} + \boldsymbol{\psi LB} = -\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}) \tag{4.1.14}$$

比较这个系统和误差方程(4.1.3)知，线性状态观测器的设计相当于对对偶系统设计状态反馈.

既然不知道参数a_1, a_2或函数$f(x_1, x_2)$，我们设计状态观测器时也无法利用这些参数和函数，因此，最简单的办法，就是干脆不要它们而建立如下状态观测器，即

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - l_1 e \\ \dot{z}_2 = -l_2 e + bu \end{cases} \tag{4.1.15}$$

在这里,尽管人为地取消了未知函数$f(x_1, x_2)$,但是这个函数在误差系统中却是实实在在地起作用的因素. 为了有效地抑制其作用,我们根据非线性反馈(对偶系统的反馈)效应,取如下非线性反馈形式

$$-\beta_{01} g_1(e),\ -\beta_{02} g_2(e)$$

使系统(4.1.15) 变成

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} g_1(e) \\ \dot{z}_2 = -\beta_{02} g_2(e) + bu \end{cases} \tag{4.1.16}$$

式中:β_{01}, β_{02} 为适当参数;$g_i(e), i = 1, 2$,是满足条件

$$e g_i(e) \geqslant 0$$

的适当的非线性函数.

只要适当的选取参数 β_{01}, β_{02} 和非线性函数 $g_1(e), g_2(e)$,状态观测器(4.1.16) 对很大范围的系统(4.1.8) 都能很好地估计出其状态变量. 显然,这个状态观测器中没有用到对象系统(4.1.8) 中的函数$f(x_1, x_2)$,是独立于对象的传递关系,因此对一定范围的$f(x_1, x_2)$ 是通用的.

原系统(4.1.8) 和状态观测器(4.1.16) 的误差方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 - \beta_{01} g_1(e_1), e_1 = z_1 - x_1 \\ \dot{e}_2 = -f(x_1, x_2) - \beta_{02} g_2(e_1), e_2 = z_2 - x_2 \end{cases} \tag{4.1.17}$$

下面取$g_1(e_1) = e_1, g_2(e_1) = |e_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1)$ 的特殊形式来进行仿真计算.

例 1　设对象为如下有扰动作用的非定常系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + w(t), & x_2(0) = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.18}$$

在这里，有

$$f(x_1,x_2,t) = -\left(1+\frac{\cos(t)}{2}\right)x_1 - \left(1+\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right)x_2$$

$$w(t) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right)$$

取状态观测器为

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - 100e \\ \dot{z}_2 = -200\operatorname{fal}(e,0.5,0.01) \end{cases} \tag{4.1.19}$$

其中

$$\operatorname{fal}(e,0.5,0.01) = \begin{cases} |e|^{0.5}\operatorname{sign}(e), & |e| > 0.01 \\ \dfrac{e}{0.01^{0.5}}, & |e| \leqslant 0.01 \end{cases} \tag{4.1.20}$$

而其初始条件为 $z_1(0) = 0, z_2(0) = 0$.

用这个状态观测器对对象(4.1.18)进行状态估计时，可以用简单的欧拉积分法来计算，即令状态观测器初始值为 $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = 0$，然后把系统(4.1.19)离散化成如下递推公式来计算

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \operatorname{fal}(e,0.5,0.01) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - 100e) \\ z_2 = z_2 - h200\mathrm{fe} \end{cases} \tag{4.1.21}$$

用这个递推公式，取采样周期 $h = 0.01$ 来进行状态估计的结果如图4.1.2所示. 图4.1.2中原系统的状态和状态观测器给出的估计值几乎完全重合，看不出其差别.

例2 对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0.3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 0.25x_2(1.5 - x_1^2) + \sin\left(\dfrac{t}{2}\right), & x_2(0) = 0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.22}$$

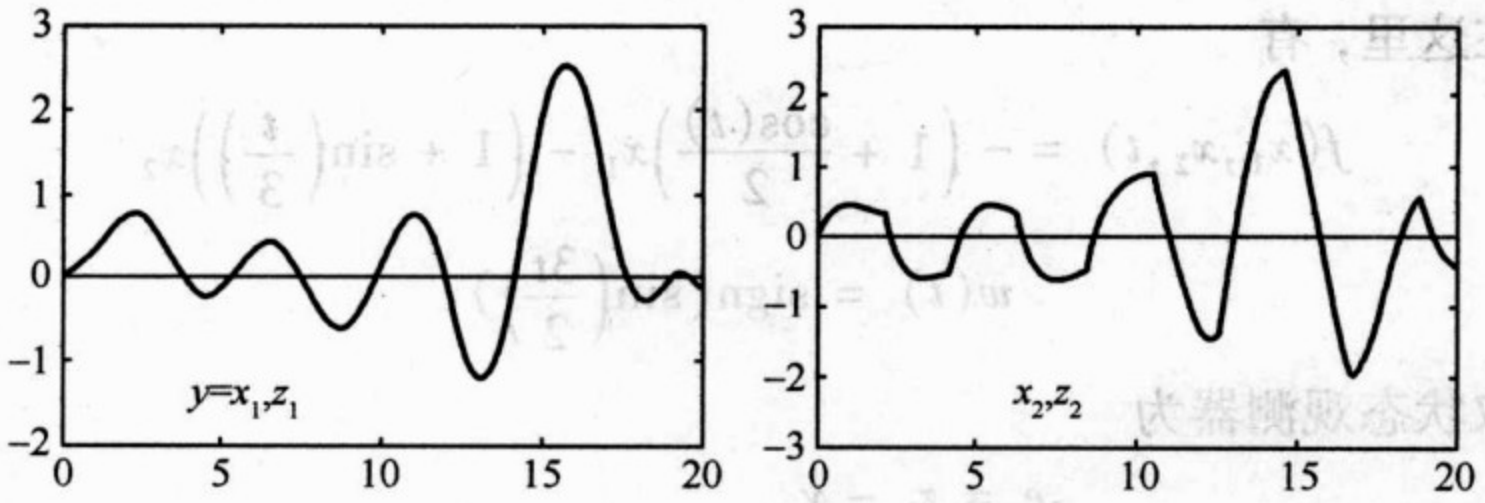


图 4.1.2

就用上面给出的状态观测器(4.1.12)进行估计的仿真结果如图4.1.3(最右图为相平面图),同样估计的很好.

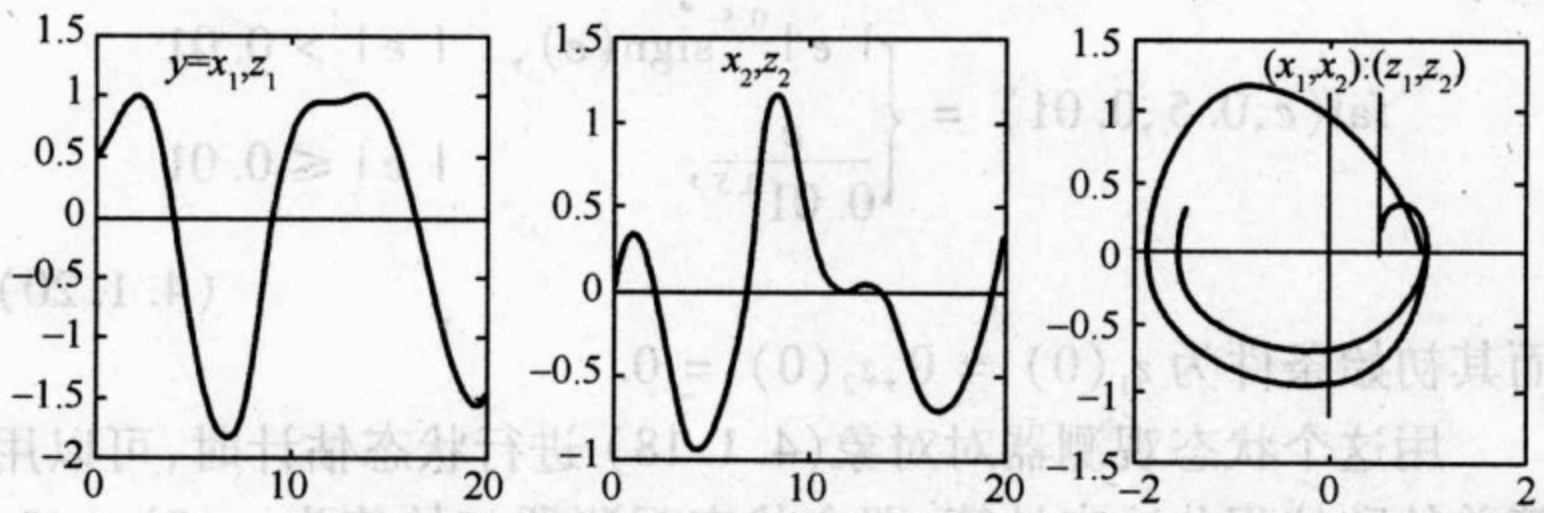


图 4.1.3

从这两个例子看,状态观测器(4.1.12)对一定范围的对象来说是完全通用的.这是因为状态观测器(4.1.12)的设计是与对象中的函数无关,而其估计效率之高是由于采用了合适的非光滑函数.

这种形式的非线性状态观测器是可以推广到任意阶系统上.如对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.23}$$

可以建立如下状态观测器

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n - \beta_{0n-1} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2^{n-2}}} \operatorname{sign}(e_1) \\ \dot{z}_n = -\beta_n \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2^{n-1}}} \operatorname{sign}(e_1) + bu \end{cases} \tag{4.1.24}$$

例如,对三阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = f(x_1, x_2, t) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.25}$$

可以建立如下状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} g_1(e) \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} g_2(e) \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03} g_3(e) + bu \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} \operatorname{fal}\left(e, \frac{1}{2}, \delta\right) \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03} \operatorname{fal}\left(e, \frac{1}{4}, \delta\right) + bu \end{cases} \tag{4.1.26}$$

例 3　用状态观测器(4.1.26)对三阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.1.27}$$

进行状态估计的仿真结果如图 4.1.4 所示.

在状态观测器中取了如下参数:

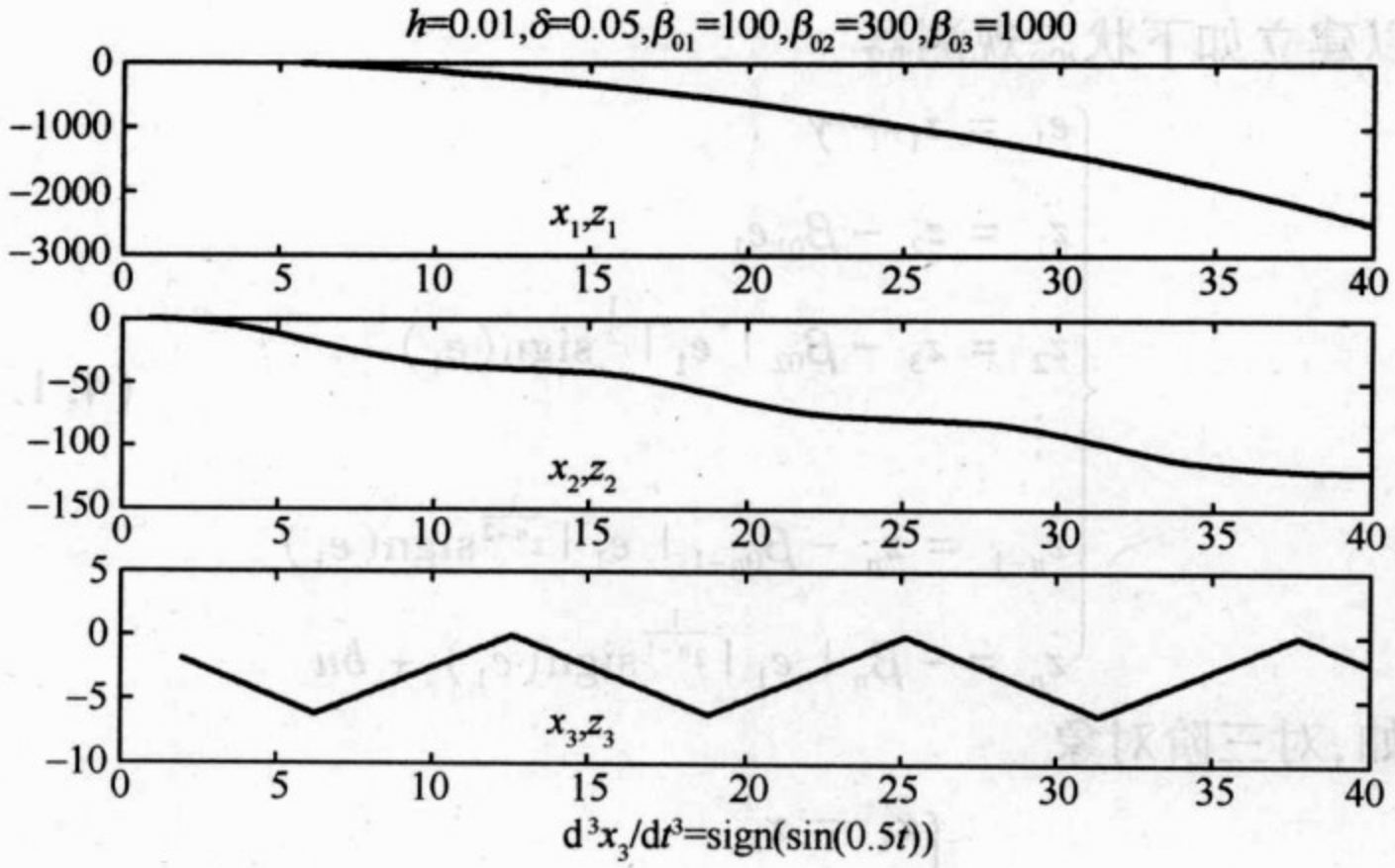


图 4.1.4

$h = 0.01, \delta = 0.05, \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000$

系统的状态变量 x_1, x_2, x_3 和其估计值 z_1, z_2, z_3 之间的差别几乎看不出来.

4.2 状态观测器观测误差的讨论

下面在假定参数 b 已知的情况下,讨论状态观测器

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e_1 \\ \dot{z}_2 = -\beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) + bu \end{cases} \tag{4.2.1}$$

对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.2.2}$$

状态的估计误差.

先假定函数 $f(x_1, x_2) = w_0 = \text{const}$,即对象为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = w_0 + bu \\ y = x_1 \end{cases}$$

对此建立如下状态观测器为

$$\begin{cases} e = z_1 - x_1 \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e \\ \dot{z}_2 = -\beta_{02} \mathrm{fal}\left(e, \frac{1}{2}, \delta\right) + bu \end{cases}$$

那么这两个系统的误差系统为

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - x_1, e_2 = z_2 - x_2 \\ \dot{e}_1 = e_2 - \beta_{01} e_1 \\ \dot{e}_2 = w_0 - \beta_{02} \mathrm{fal}\left(e_1, \frac{1}{2}, \delta\right) \end{cases}$$

这个误差系统进入稳态时，有

$$w_0 - \beta_{02} \mathrm{fal}\left(e_1, \frac{1}{2}, \delta\right) = e_2 - \beta_{01} e_1 = 0$$

由此误差系统的稳态误差为

$$e_1 = \left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2, e_2 = \beta_{01} e_1 = \beta_{01} \left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2$$

因此只要 β_{02} 足够大于 w_0，这些稳态误差与量 $\left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2$，是同一个数量级，比起线性观测时的稳态误差的量级 $\left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)$ 好得多. 因为当 $\beta_{02} \gg w_0$ 时，有关系式 $\left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right) \gg \left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2$.

当 $f(x_1, x_2)$ 为一般的非线性函数时，取如下形式李亚普诺夫函数

$$V(e_1, e_2) = A \mid e_1 \mid^{\frac{3}{2}} - Be_1 e_2 + Ce_2^2 \qquad (4.2.3)$$

这时有

$$\frac{\partial V}{\partial e_1} = \frac{3}{2}A \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) - Be_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial e_2} = -Be_1 + 2Ce_2$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial e_1}\dot{e}_1 + \frac{\partial V}{\partial e_2}\dot{e}_2 =$$

$$\left(\frac{3}{2}A \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) - Be_2\right)(e_2 - \beta_{01}e_1) +$$

$$(-Be_1 + 2Ce_2)(w_0 - \beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1)) =$$

$$\left(\frac{3}{2}A \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1)e_2 - Be_2^2 - \frac{3}{2}A\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{3}{2}} +\right.$$

$$\left. B\beta_{01}e_1e_2\right) + (-Bw_0e_1 + 2Cw_0e_2 + B\beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{3}{2}} -$$

$$2C\beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1)e_2) =$$

$$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right) \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1)e_2 -$$

$$Be_2^2 - \left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right) \mid e_1 \mid^{\frac{3}{2}} + (Bw_0e_1 + 2Cw_0e_2) =$$

$$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right) \mid e_1 \mid^{-\frac{1}{4}} \mid e_1 \mid^{\frac{3}{4}} \operatorname{sign}(e_1)e_2 -$$

$$Be_2^2 - \left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right) \mid e_1 \mid^{2(\frac{3}{4})} + (Bw_0e_1 + 2Cw_0e_2)$$

这个式子可以看作变量 $\mid e_1 \mid^{\frac{3}{4}} \operatorname{sign}(e_1)$ 和 e_2 的二次型形式的函数,可以改写成

$$\dot{V} = -X \mid e_1 \mid^{2(\frac{3}{4})} + Y \mid e_1 \mid^{\frac{3}{4}} \operatorname{sign}(e_1)e_2$$
$$- Ze_2^2 + (Bw_0e_1 + 2Cw_0e_2) \qquad (4.2.4)$$

其中

$$X = \left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right),$$

$$Y = \left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right) \mid e_1 \mid^{-\frac{1}{4}}, Z = B$$

(4.2.5)

这个二次型函数的二次项部分为负定的充要条件为

$$X > 0, Y > 0, Z > 0, Y^2 - 4XZ < 0$$

即

$$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right)^2 \mid e_1 \mid^{-\frac{1}{2}} < 4B\left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right)$$

$$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right)^2 < 4B\left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right) \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right) < 2\sqrt{B\left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right)} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{4}}$$

(4.2.6)

且$\left(\frac{3}{2}A - 2C\beta_{02} + B\beta_{01} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}}\right) > 0, B > 0, \left(\frac{3}{2}A\beta_{01} > B\beta_{02}\right)$，由此当$3A > 4C\beta_{02}$时就有$Y > 0$，再由后两个不等式，得$B > 0$，$3\frac{A}{B} > 2\frac{\beta_{02}}{\beta_{01}}$. 如果记

$$a = B\beta_{01}, c = \frac{3}{2}A - 2C\beta_{02}, b = \sqrt{B\left(\frac{3}{2}A\beta_{01} - B\beta_{02}\right)}, x = \mid e_1 \mid^{\frac{1}{4}}$$

那么不等式(4.2.6)可写成

$$c + ax^2 < 2bx$$

但这个式子对某些x要有意义，必须满足不等式

$$b^2 - ac > 0 \tag{4.2.7}$$

这时，不等式(4.2.6)只能在二次方程$ax^2 - 2bx + c = 0$的两个实

根$\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a},\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$之间才成立. 由判别条件$b^2-ac>0$,又可推出

$$B\left(\frac{3}{2}A\beta_{01}-B\beta_{02}\right)-B\beta_{01}\left(\frac{3}{2}A-2C\beta_{02}\right)>0,$$

$$B\beta_{02}(2C\beta_{01}-B)>0,2C\beta_{01}>B$$

欲使上述二次方程的根相距很大间隔,必须使$b^2-ac>0$很大才行. 为此需要取$B\beta_{02}$很大,且要取C使$2C\beta_{01}-B>0$也很大. 这样,李亚普诺夫函数(4.2.4)的系数A,B,C要满足的不等式为

$$B>0,3\frac{A}{B}>2\frac{\beta_{02}}{\beta_{01}},3A>4C\beta_{02},$$

$$B\beta_{02}(2C\beta_{01}-B)>0 \tag{4.2.8}$$

这里参数β_{01},β_{02}是给定的. 这样,先给定一个大的$B>0$,然后取C和A为:$C>\frac{B}{2\beta_{01}},A>2\frac{\beta_{02}}{\beta_{01}}B$. 这时不等式$3A>4C\beta_{02}$自然被满足.

对这样选取的A,B,C来说,李亚普诺夫函数(4.2.4)成为正定函数,而且二次方程的两个实根$\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a},\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$相距很大,且小根$\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$是很小的数,因此李亚普诺夫函数(4.1.19)沿系统轨线的导数在变量e_1的很大范围和任意e_2都是负定函数. 按上述方式选择了系数A,B,C之后,二次型形式的函数

$$\dot{V}=-X|e_1|^{2(\frac{3}{4})}+Y|e_1|^{\frac{3}{4}}\operatorname{sign}(e_1)e_2-Ze_2^2+(Bw_0e_1+2Cw_0e_2) \tag{4.2.9}$$

不满足负定条件,即取正值的区域是变量$e_1^{\frac{3}{4}}$和e_2的“抛物面”

$$V_1=-X|e_1|^{2(\frac{3}{4})}+Y|e_1|^{\frac{3}{4}}\operatorname{sign}(e_1)e_2-Ze_2^2 \tag{4.2.10}$$

与变量 e_1 和 e_2 的平面 $f(x_1,x_2,t,w(t))$

$$V_2 = -Bw_0e_1 - 2Cw_0e_2 \tag{4.2.11}$$

相交的上面部分，而这个交线上的变量 e_1 的量级是与方程

$$Bw_0e_1 = X \mid e_1 \mid^{2\left(\frac{3}{4}\right)} \tag{4.2.12}$$

的根 $e_1 = \left(\frac{Bw_0}{X}\right)^2$ 同级. 由 X 的表达式知，X 与 $B\beta_{02}$ 同级，因此这个根 e_1 将与 $\left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2$ 同级，这就是变量 e_1 的误差估计的界. 如果状态观测器(4.1.17) 中取 $g_1(e_1),g_2(e_1)$ 为线性函数 $\beta_{01}e_1,\beta_{02}e_1$，那么这个误差估计的界为 $\frac{w_0}{\beta_{02}}$，只要取 $\beta_{02} \geqslant w_0$，就有 $\left(\frac{w_0}{\beta_{02}}\right)^2 < \frac{w_0}{\beta_{02}}$，用非线性 $g_1(e_1),g_2(e_1)$ 设计的状态观测器的状态跟踪效率比起线性状态观测器高得多.

4.3 扩张状态观测器

既然非线性状态观测器

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}e_1 \\ \dot{z}_2 = -\beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) + bu \end{cases} \tag{4.3.1}$$

对非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.3.2}$$

的状态 $x_1(t),x_2(t)$ 进行很好地跟踪，我们把作用于开环系统的加速度 $f(x_1(t),x_2(t))$ 的实时作用量扩充成新的状态变量 x_3，记作

$$x_3(t) = f(x_1(t),x_2(t)) \tag{4.3.3}$$

并记 $\dot{x}_3(t) = w(t)$，那么系统(4.3.2) 可扩张成新的线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + bu \\ \dot{x}_3 = w(t) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.3.4}$$

按式(4.1.23)对这个被扩张的系统建立状态观测器

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) + bu \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{4}} \operatorname{sign}(e_1) \end{cases} \tag{4.3.5}$$

则只要适当选择参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$，这个系统也能很好地估计系统(4.3.4)的状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 及被扩张的状态的实时作用量 $x_3(t) = f(x_1(t), x_2(t))$，即

$$z_1(t) \to x_1(t), z_2(t) \to x_2(t) \tag{4.3.6}$$

并且有

$$z_3(t) \to x_3(t) = f(x_1(t), x_2(t)) \tag{4.3.7}$$

如果函数 $f(x_1, x_2)$ 中含有时间变量 t 和未知扰动作用 $w(t)$，那么同样，令

$$x_3(t) = f(x_1(t), x_2(t), t, w(t)) \tag{4.3.8}$$

则从观测器(4.3.5)同样可以得到状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 的估计 $z_1(t), z_2(t)$，而且还能估计出被扩张的状态变量 - 作用于系统的加速度的实时作用量

$$a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t, w(t)) \tag{4.3.9}$$

我们把被扩张的系统的状态观测器(4.3.5)称为系统(4.3.2)的扩张状态观测器(Extended State Observer, ESO)，而变量 $x_3(t)$ 称作被扩张的状态.

扩张状态观测器是一个动态过程，它只用了原对象的输入 - 输出信息，没有用到描述对象传递关系的函数 f 的任何信息，其结构图如图 4.3.1 所示.

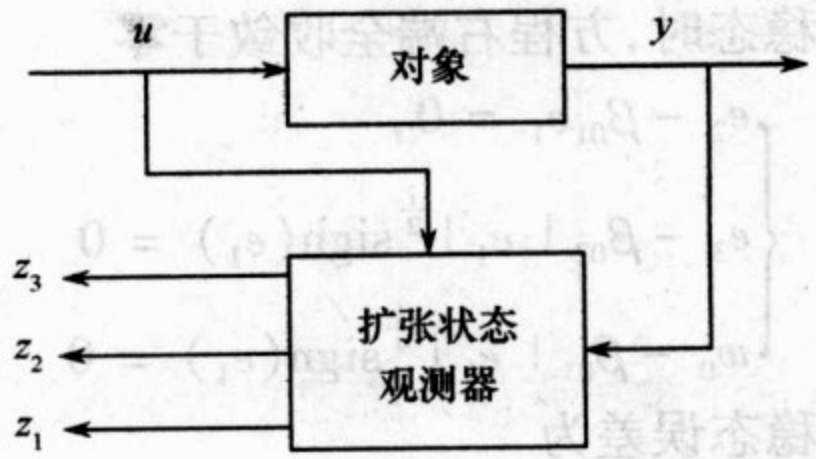


图 4.3.1

对扩张状态观测器(4.3.5) 来说,估计如下三种类型系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = f(t) + bu;\\ y = x_1\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2) + bu;\\ y = x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2,t,w(t)) + bu\\ y = x_1\end{cases}$$

的状态和被扩张的状态是没有什么区别的. 实际上,在这里不需要假定函数$f(x_1,x_2,t,w(t))$是连续的还是不连续的,是已知的还是未知的, 只要它在过程进程中的实时作用量 $a(t) = f(x_1(t), x_2(t),t,w(t))$ 是有界的,并参数 b 已知,我们总可以选择适当的参数$\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03}$,使得扩张状态观测器(4.3.5) 都能很好地实时估计对象的状态 $x_1(t),x_2(t)$ 和被扩张的状态 $x_3(t)$. 因此扩张状态观测器(4.3.5) 是独立于描述对象传递关系的函数 f 的具体形式的.

如果我们假定作用于系统的加加速度$\dot{x}_3(t) = w(t)$ 是常值 $\dot{x}_3(t) = w_0$,那么系统(4.3.4) 与系统(4.3.5) 的误差方程为

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = e_2 - \beta_{01}e_1, & e_1 = z_1 - y\\ \dot{e}_2 = e_3 - \beta_{02}\mid e_1\mid^{\frac{1}{2}}\operatorname{sign}(e_1), & e_2 = z_2 - x_2\\ \dot{e}_3 = w_0 - \beta_{03}\mid e_1\mid^{\frac{1}{4}}\operatorname{sign}(e_1), & e_3 = z_3 - x_3\end{cases}\tag{4.3.10}$$

当这个系统进入稳态时,方程右端全收敛于零

$$\begin{cases} e_2 - \beta_{01} e_1 = 0, \\ e_3 - \beta_{02} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign}(e_1) = 0 \\ w_0 - \beta_{03} \mid e_1 \mid^{\frac{1}{4}} \operatorname{sign}(e_1) = 0 \end{cases} \tag{4.3.11}$$

因此误差系统的稳态误差为

$$\mid e_1 \mid = \left(\frac{w_0}{\beta_{03}}\right)^4, \mid e_2 \mid = \beta_{01}\left(\frac{w_0}{\beta_{03}}\right)^4, \mid e_3 \mid = \beta_{02}\left(\frac{w_0}{\beta_{03}}\right)^2 \tag{4.3.12}$$

只要 β_{03} 足够大于 w_0,这些估计误差都会足够小.

扩张状态观测器(4.3.5)中的 $z_3(t)$ 能够很好地跟踪开环系统加速度的实时作用量 $a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t, w(t))$ 的根本原因,是只要系统满足能观测性条件,那么不管加速度是什么形式,只要它是在起作用,那么其作用必定会反映在系统的输出上,就有可能从系统输出信息中提炼出其作用量. 扩张状态观测器(4.3.5)就是从系统输出中提炼出系统加速度的实时作用量 $a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t, w(t))$ 的一种具体办法. 有了这个被扩张的状态 $x_3(t)$ 的估计值 $z_3(t)$,只要参数 b 已知,控制量可以取成

$$u = u_0 - \frac{z_3(t)}{b} \quad \text{或} \quad u = \frac{u_0 - z_3(t)}{b} \tag{4.3.13}$$

即控制量中补偿被扩张的状态 $x_3(t)$ 的估计 $z_3(t)$,就能使对象变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + b\left(u_0 - \dfrac{z_3(t)}{b}\right) \Rightarrow \\ y = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1(t), x_2(t)) - z_3(t) + bu_0 \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = bu_0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.3.14}$$

或

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + b\dfrac{u_0 - z_3(t)}{b} \\ y = x_1\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1(t), x_2(t)) - z_3(t) + u_0 \\ y = x_1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_0 \\ y = x_1\end{cases} \tag{4.3.15}$$

即原来的非线性控制系统(4.3.2) 变成线性的积分器串联型控制系统.

对非线性控制系统(4.3.2) 用扩张状态观测器(4.3.5) 估计的结果来把控制量取成(4.3.13) 的形式,使原非线性控制系统(4.3.2) 变成线性控制系统(4.3.14) 或(4.3.15) 的过程,称为动态补偿线性化过程(用系统输出 y 来改造系统输入 u 的过程).

这样,无论对象(4.3.2) 是确定性的还是不确定性的,线性的还是非线性的,时变的还是时不变的,经过式(4.3.10) 形式的补偿,均可以把系统化成(4.3.13) 或(4.3.14) 形式的积分器串联型被控制系统. 这样,扩张状态观测器和(4.3.12) 形式的补偿办法给予我们一种可能性,用统一的方式来处理确定性和不确定性,线性和非线性,时变和时不变等控制系统的控制问题.

例 1 设有系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a\,\mathrm{sign}(\sin(\omega t)) + 3\cos\left(\dfrac{t}{2}\right) \\ y = x_1\end{cases} \tag{4.3.16}$$

式中,$a = 1, w = 1.0$. 假定系统中函数 $3\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$ 是已知的输入. 我们想用离散型扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = |e|^{\frac{1}{2}}\mathrm{sign}(e), \mathrm{fe}_1 = |e|^{\frac{1}{4}}\mathrm{sign}(e) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h\left(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.3.17}$$

进行状态和被扩张的状态 $x_3(t)^{\cdot} = a\mathrm{sign}(\sin(\omega t))$ 的实时估计的数值仿真结果如图 4.3.2 所示. 这里,状态变量 $x_1(t), x_2(t)$ 和其估计值 $z_1(t), z_2(t)$ 的差别已看不出来了,但被扩张的状态和其估计 $z_3(t)$ 的差别是可以从图 4.3.2 中看得出来. 在这里参数取了如下值:

$$h = 0.01, \delta = h, \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000.$$

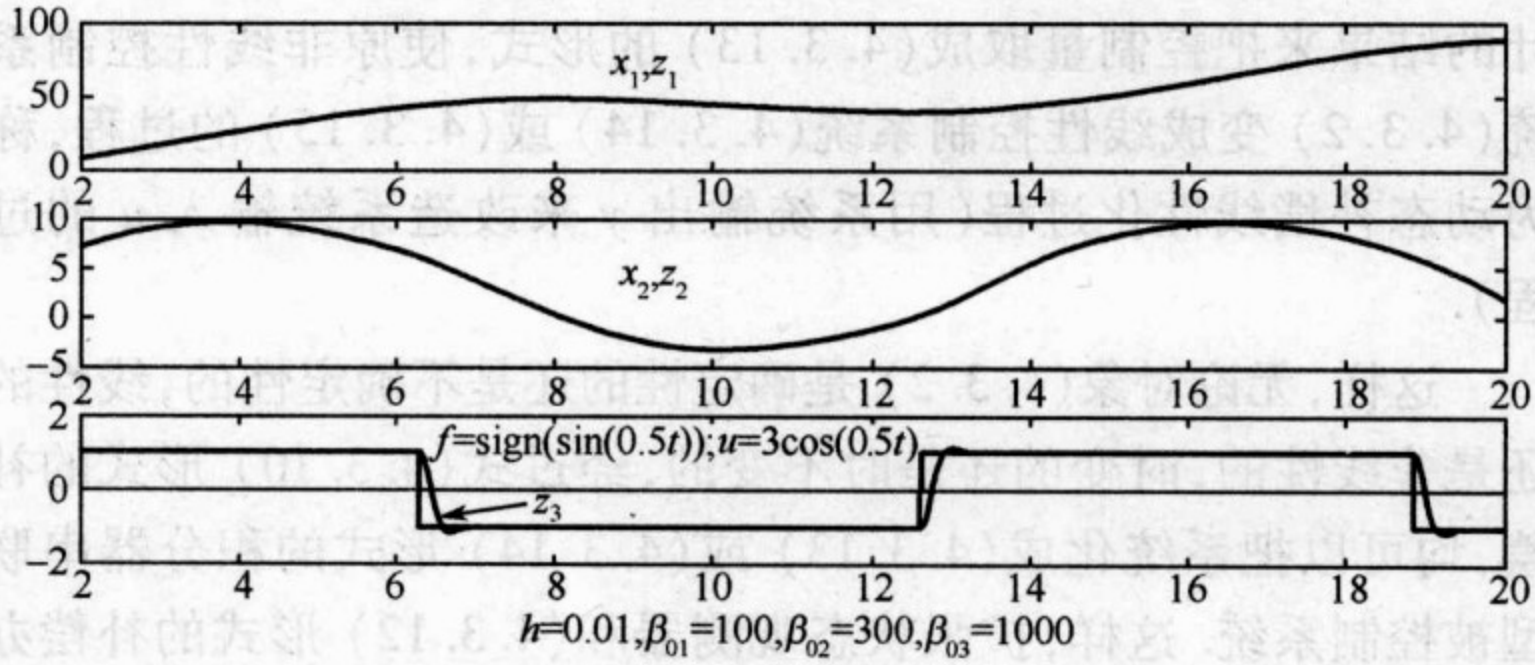


图 4.3.2

在进行数值仿真时,为了避免高频颤振现象的出现,我们把函数 $|e|^{\alpha}\mathrm{sign}(e)$ 改造成原点附近具有线性段的连续的幂次函数

$$\mathrm{fal}(e,\alpha,\delta) = \begin{cases} \dfrac{e}{\delta^{\alpha-1}}, & |e| \leqslant \delta \\ |e|^{\alpha}\mathrm{sign}(e), & |e| > \delta \end{cases}$$

式中:δ 为线性段的区间长度,如图 4.3.3 所示. 利用符号函数,函数 $\mathrm{fal}(e,\alpha,\delta)$ 也可以写成

$$s = \frac{\mathrm{sign}(e+\delta) - \mathrm{sign}(e-\delta)}{2};$$

$$\mathrm{fal}(e,\alpha,\delta) = \frac{e}{\delta^{1-\alpha}}s + |e|^{\alpha}\mathrm{sign}(e)(1-s)$$

式中:2δ 为 $\mathrm{fal}(e,\alpha,\delta)$ 函数中线性段区间长度.

在上面例子中我们是在参数 $b=3$ 和信号 $u=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ 为已知的假定下所作的仿真结果. 如果参数 $b=3$ 和信号 $u=\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ 未知,那么在扩张状态观测器中不能用这个参数和信号,扩张状态观测器只能建成

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}\left(e,\frac{1}{2},\delta\right), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}\left(e,\frac{1}{4},\delta\right) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe}) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.3.18}$$

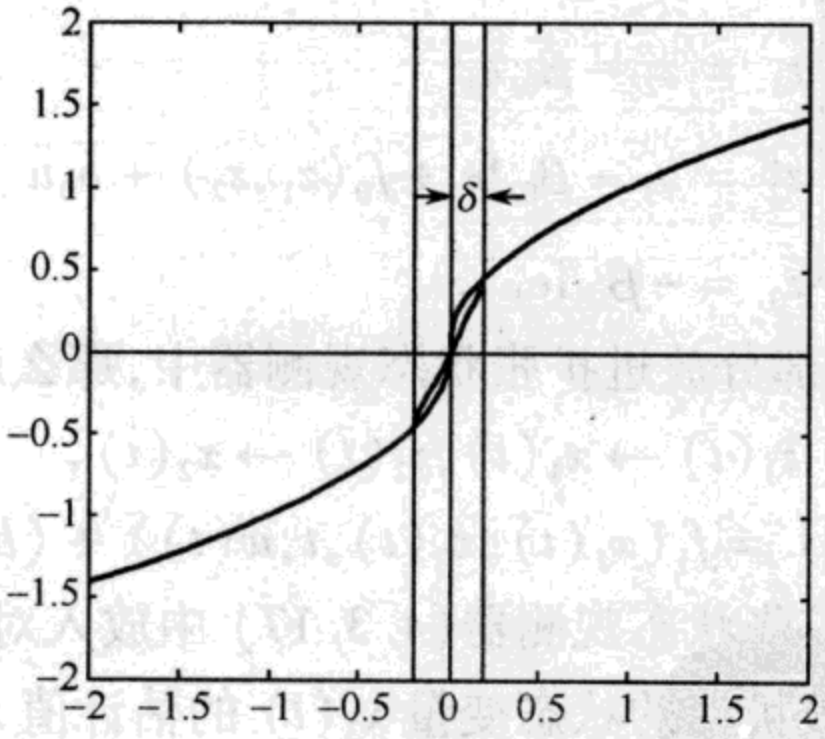


图 4.3.3

用这个扩张状态观测器不仅很好地跟踪系统状态 x_1, x_2,还很好地跟踪系统中的未知函数 $a\mathrm{sign}(\sin(\omega t)) + 3\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. 跟踪系统(4.3.13)的仿真结果如图 4.3.4 所示.

如果系统(4.3.2)的函数 $f(x_1,x_2)$ 可分解为

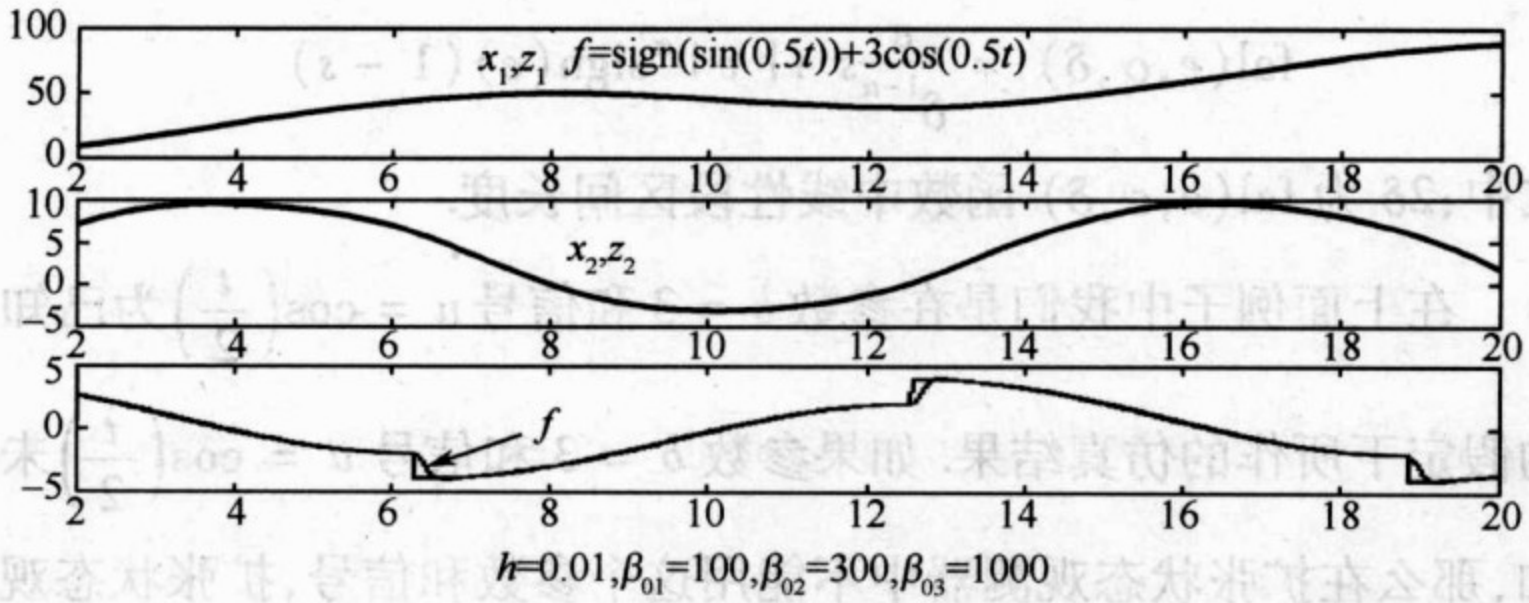


图 4.3.4

$$f(x_1,x_2) = f_0(x_1,x_2) + f_1(x_1,x_2,t,w(t))$$

而控制项部分被分解为

$$bu = (b - b_0)u + b_0u$$

其中,函数$f_0(x_1,x_2)$和参数b_0是系统中确知的部分. 这时只要把扩张状态观测器(4.3.5)改造成

$$\begin{cases} e_1 = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}e_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + f_0(z_1,z_2) + b_0u \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}\mathrm{fe}_1 \end{cases} \tag{4.3.19}$$

即把系统的已知部分放进扩张状态观测器中,那么就有

$$z_1(t) \to x_1(t), z_2(t) \to x_2(t),$$

$$z_3(t) \to x_3(t) = f_1(x_1(t),x_2(t),t,w(t)) + (b - b_0)u(t)$$

就是说,只要在扩张状态观测器(4.3.17)中放入对象模型的完全已知部分,那么被扩张的状态变量$x_3(t)$的估计值$z_3(t)$估计的是作用于系统的所有未知的加速度部分.

在系统(4.3.2)的加速度作用$f(x_1,x_2,t,w(t))$中通常包含三部分加速度:系统已建模动态,即确知的加速度部分$f_0(x_1,x_2)$、系统的未建模动态,即不确定的加速度部分$f_1(x_1,x_2,t)$和外扰作用部分$w(t)$. 我们把这三种加速度的“总和”作用看作作用于积分器串联型系统(4.3.11)的“总和扰动”作用. 那么扩张状态观

测器(4.3.5)估计的就是这个“总和扰动”力,而扩张状态观测器(4.3.16)估计的却是系统中未知的作用力.所谓被扩张的状态就是系统的“总和扰动”力或“未知扰动”力.

扩张状态观测器的大量仿真研究表明参数 b 即便是状态的函数或时变参数,但其变化范围不很大,仿真时只假定它的近似估计值为常值 b_0,那么扩张状态观测器将把控制力中未知部分 $(b-b_0)u(t)$ 也作为总和扰动量的部分来进行估计,但是相对误差 $(b-b_0)/b_0$ 较大时,如大于0.5,那么 $z_3(t)$ 的估计就会差一些.

例2 设有对象

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = \text{sign}(\sin(0.05t)) + (1.5 + 0.5\text{sign}(\sin(0.03t)))\cos(0.02t)\\ y = x_1\end{cases}$$

这里把函数 $b = 1.5 + 0.5\text{sign}(\sin(0.03t))$ 估计成常值 $b_0 = 1.5$ 并假定信号 $\cos(0.02t)$ 已知.于是可建立如下扩张状态观测器

$$\begin{cases}e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, \delta), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, \delta)\\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e)\\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\text{fe} + 3/2\cos(0.02t))\\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1)\end{cases}$$

这里被扩张的状态为 $x_3(t) = \text{sign}(\sin(0.05t)) + 0.5\text{sign}(\sin(0.03t))\cos(0.02t)$,$z_3(t)$ 跟踪的就是这个量(图4.3.5).

实际上,对象模型中的控制量放大系数 b 未知时,把 b 的近似估计值 b_0 当作扩张状态观测器的可调参数来进行调整是完全可以的.

以上讨论的是对象为二阶的情形.对于高阶的对象,上述扩张状态观测器形式也是很容易推广,例如,对三阶对象

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \dot{x}_3 = f(x_1, x_2, t) + bu\\ y = x_1\end{cases} \tag{4.3.20}$$

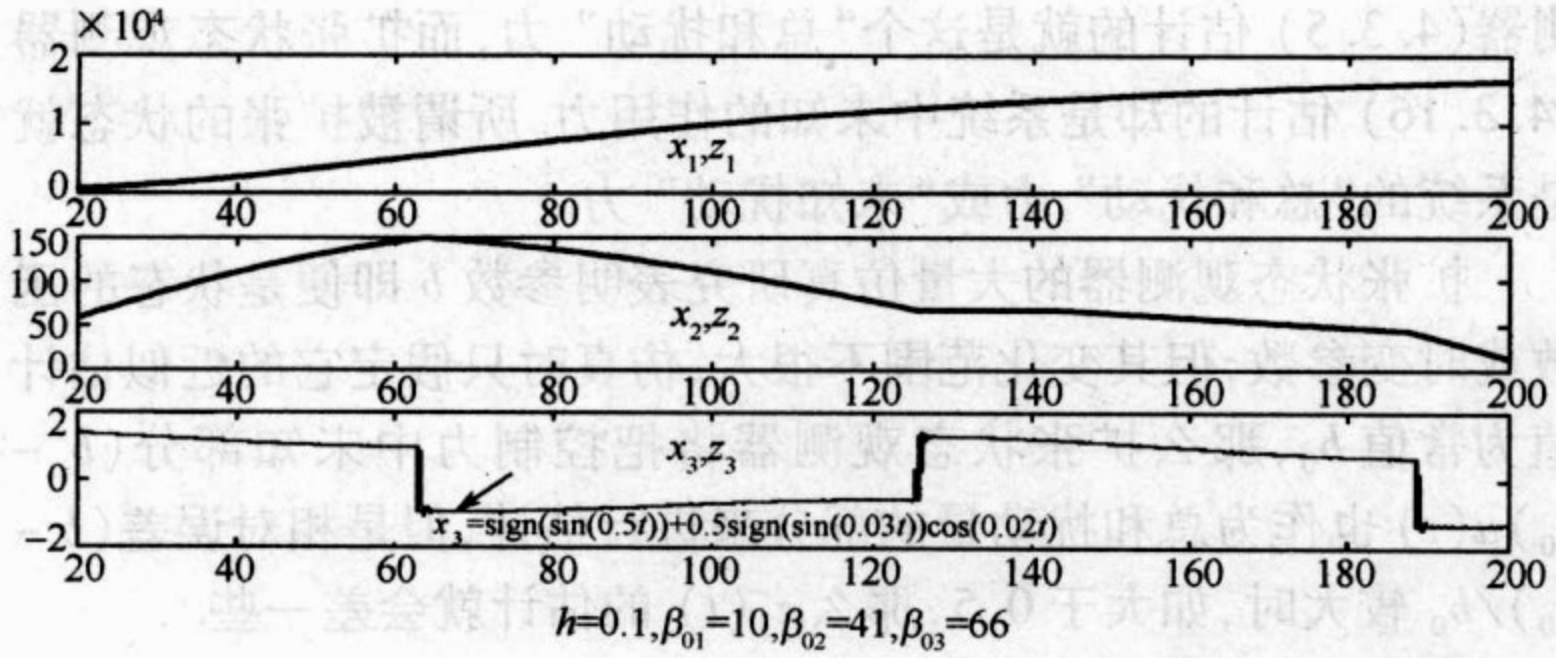


图 4.3.5

可以建立如下扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} g_1(e) \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} g_2(e) \\ \dot{z}_3 = z_4 - \beta_{03} g_3(e) + bu \\ \dot{z}_4 = -\beta_{04} g_4(e) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} \mathrm{fal}(e, 0.5, \delta) \\ \dot{z}_3 = z_4 - \beta_{03} \mathrm{fal}(e, 0.25, \delta) + bu \\ \dot{z}_4 = -\beta_{04} \mathrm{fal}(e, 0.125, \delta) \end{cases} \tag{4.3.21}$$

用这个扩张状态观测器来观测对象

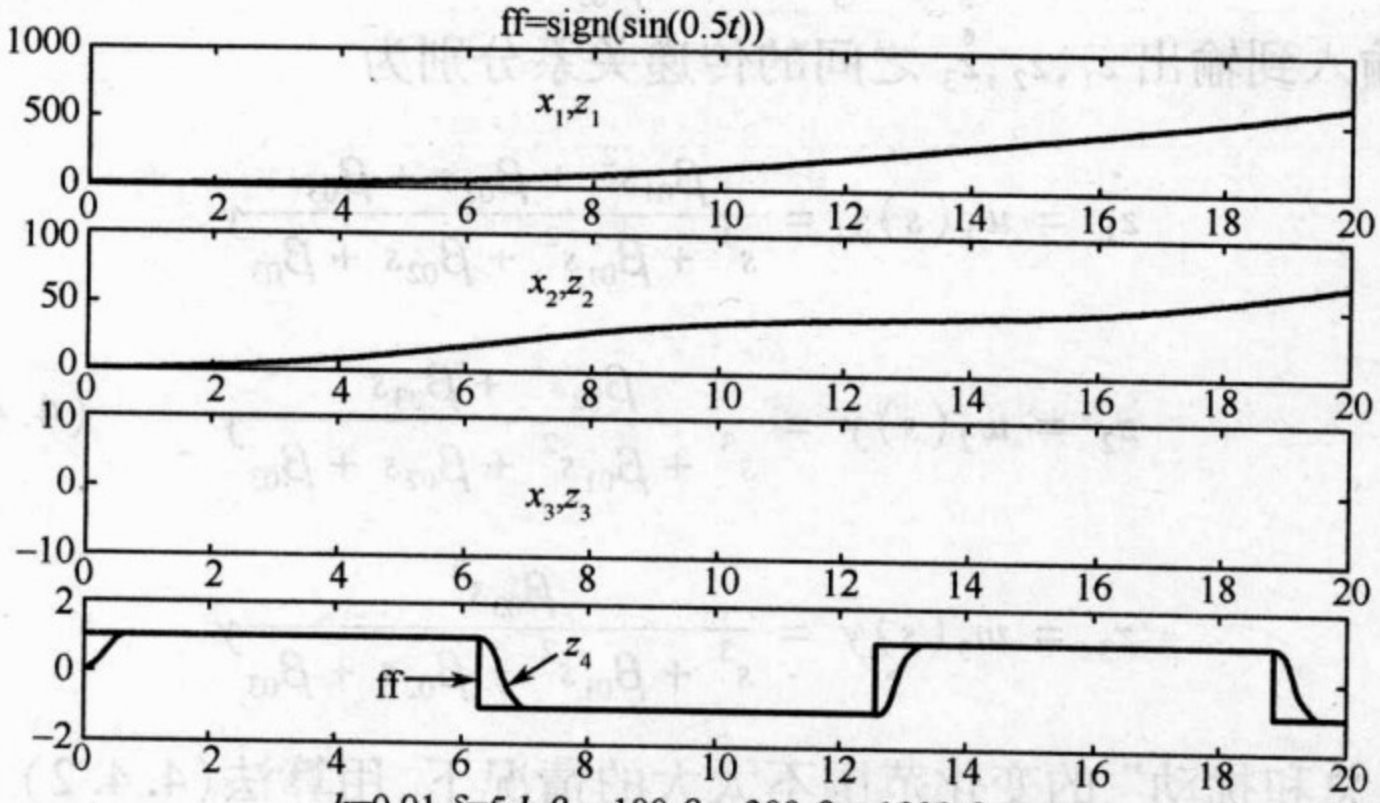
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \mathrm{sign}(\sin(t/2)) \\ y = x_1 \end{cases}$$

的状态和被扩张的状态的仿真结果如图 4.3.6 所示. 这里取了如

下参数：

$h = 0.01, \delta = 5h, \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000, \beta_{04} = 1800.$

有意思的是在前一例子中用过的前三个参数$\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000$照样可以在这个例子中使用. 这种现象称作扩张状态观测器参数对系统阶的“继承性”.



h=0.01,δ=5 h,β_{01}=100,β_{02}=300,β_{03}=1000,β_{04}=1800

图 4.3.6

4.4 其他形式的扩张状态观测器

上面讨论的是固定形式的如下扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, \delta), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, \delta) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + bu) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.4.1}$$

实际上，这里的函数 $\mathrm{fal}(e,\alpha,\delta)$ 可以取别的形式，如线性函数 $\mathrm{fal}(e,1.0,\delta) = e$，也可以取别的非线性函数形式，如 $\mathrm{fal}(e,0.0,\delta) = \mathrm{sat}(e,\delta)$. 从大的方面分类就是线性和非线性两大类.

在线性情况下扩张状态观测器的方程变成

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}e + bu) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}e) \end{cases} \tag{4.4.2}$$

其输入到输出 z_1, z_2, z_3 之间的传递关系分别为

$$z_1 = w_1(s)y = \frac{\beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03}}{s^3 + \beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03}}y$$

$$z_2 = w_2(s)y = \frac{\beta_{02}s^2 + \beta_{03}s}{s^3 + \beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03}}y \tag{4.4.3}$$

$$z_3 = w_3(s)y = \frac{\beta_{03}s^2}{s^3 + \beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03}}y$$

在“总和扰动”的变化范围不太大的情况下,用算法(4.4.2)进行估计的效果也不错.但要保证一定的估计精度,需要取比较大的增益,即系数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 就要取得大一些,这就是所谓的“高增益状态观测器”形式.

例 对三阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \gamma \mathrm{sign}(\sin(t/2)) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.4.4}$$

用线性扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}e) \\ z_3 = z_3 + h(z_4 - \beta_{03}e + bu) \\ z_4 = z_4 + h(-\beta_{04}e) \end{cases} \tag{4.4.5}$$

进行估计的仿真结果如图 4.4.1 所示.

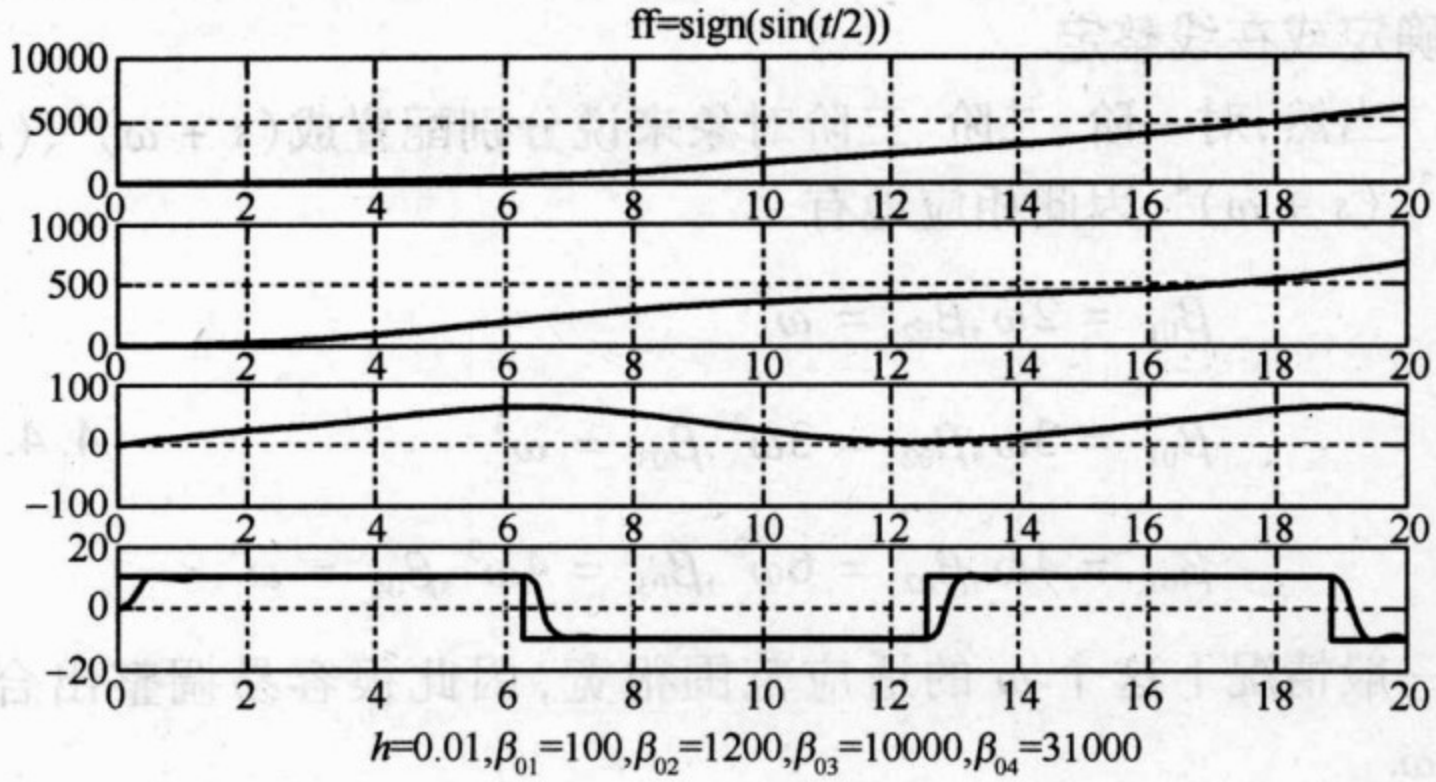


图 4.4.1

与 4.3 节的图 4.3.6 比较来看,这两个的跟踪精度相当. 但这里的扩张状态观测器增益 β_{02} ,β_{03} ,β_{04} 比前者高很多,前者的增益为 $\beta_{01}=100,\beta_{02}=300,\beta_{03}=1000,\beta_{04}=1800$,而后者的增益却是 $\beta_{01}=100,\beta_{02}=1200,\beta_{03}=10000,\beta_{04}=31000$ 相差一个数量级,这再一次说明适当的非线性函数的效率比线性函数高得多,也说明在一些情况下“高增益”观测器也是可以使用的有效工具.

美国克里夫兰州立大学高志强博士给出了用带宽概念确定线性扩张状态观测器参数的简便方法. 我们知道线性扩张状态观测器

$$\begin{cases}\dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01}z_1 + \beta_{01}x_1 \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}z_1 + \beta_{02}x_1 + b_0u \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}z_1 + \beta_{03}x_1\end{cases} \tag{4.4.6}$$

的特征方程为

$$s^3 + \beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03}$$

为了估计好对象的状态和“总和扰动”,应该选取参数 β_{01} ,β_{02} ,β_{03} 使上述特征方程稳定的比较理想. 一般的,稳定的比较好且能给出较好过渡过程的特征方程形式为 $(s+\omega)^3$,于是把参数 β_{01} ,β_{02} ,β_{03}

配置成 $3\omega, 3\omega^2, \omega^3$ 形式，至于取什么样的 ω 是根据系统带宽的要求确定或在线整定.

当然，对一阶、二阶、三阶对象来说分别配置成 $(s+\omega)^2$、$(s+\omega)^3$、$(s+\omega)^4$，因此相应地有

$$\begin{aligned} &\beta_{01} = 2\omega, \beta_{02} = \omega^2 \\ &\beta_{01} = 3\omega, \beta_{02} = 3\omega^2, \beta_{03} = \omega^3 \\ &\beta_{01} = 4\omega, \beta_{02} = 6\omega^2, \beta_{03} = 4\omega^3, \beta_{04} = \omega^4 \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

在一般情况下这个 ω 的适应范围很宽，因此很容易调整出合适的 ω.

按这种方法确定了参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 之后，跟踪系统

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + h\gamma \operatorname{sign}(\sin(\omega t)) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.4.8}$$

的“总和扰动”——$\gamma \operatorname{sign}(\sin(\omega t))$，几乎不受扰动幅度 γ 的限制.

受如下形式

$$w(t) = \gamma \operatorname{sign}(\sin(\omega t)), \omega = 0.001/h \tag{4.4.9}$$

方波扰动的受扰对象

$$\begin{cases} f = \gamma \operatorname{sign}\left(\sin \dfrac{0.00055}{h} t\right) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + hf \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.4.10}$$

用扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02} e) \\ z_3 = z_3 + (-\beta_{03} e) \end{cases} \tag{4.4.11}$$

来进行跟踪时，跟踪好坏的指标定为

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T | f - z_3 | \, \mathrm{d}\tau \tag{4.4.12}$$

式中，$T = 20000\mathrm{h}$ 是整个计算时间. 不管采样间隔多大，只计算 20000 步.

对系统(4.4.10) 进行仿真计算结果概括如下：步长在 $h = 1000000 \sim 0.000001$ 范围内随便取定，扰动幅度 γ 也在这个范围随便确定，用扩张状态观测器(4.4.11) 来进行跟踪，其跟踪扰动的误差指标 J 均在 0.0013 ~ 0.0015 之间. 跟踪一阶对象

$$\begin{cases} f = \gamma \mathrm{sign}\left(\sin\left(\dfrac{0.00055}{h}t\right)\right) \\ x_1 = x_1 + hf \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.4.13}$$

的结果是在上述步长和扰动幅度范围内跟踪扰动的误差指标 J 均在 0.00025 ~ 0.00026 之间. 不管一阶，二阶情形这些扩张状态观测器跟踪效果都是很好的.

4.5 系统输出被噪声污染时的扩张状态观测器

当系统输出被噪声污染时，要想用扩张状态观测器得到比较好的估计值，需要先滤波处理量测数据，但采用不同的滤波方法会得到不同的估计效果.

设被观测对象为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t, w(t)) \\ y = x_1 + n(t) \end{cases} \tag{4.5.1}$$

系统输出被一定强度的白噪声 $n(t)$ 所污染.

如果不采用任何滤波处理，那么用这个量测输出所作的扩张

状态观测器方程为

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02} \mathrm{fe}) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03} \mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.5.2}$$

采用最简单的惯性滤波处理量测输出时的扩张状态观测器方程变为

$$\begin{cases} y_0 = y_0 - h\alpha(y_0 - y) \\ e = z_1 - y_0, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02} \mathrm{fe}) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03} \mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.5.3}$$

采用跟踪微分器来进行噪声滤波并用微分信号来进行预测所得到滤波值来建立扩张状态观测器,得

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - y, v_2, r_0, h_1) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \\ y_0 = v_1 + k_0 h v_2 \\ e = z_1 - y_0, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02} \mathrm{fe}) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03} \mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{4.5.4}$$

我们在系统(4.5.1)中取$f(x_1,x_2,t,w(t)) = \gamma_1 \text{sign}(\sin(\omega t))$，$n(t) = \gamma_0 n_0(t)$，其中$n_0(t)$为$\pm 1$之间均匀分布的白噪声，然后分别用方程(4.5.2)，方程(4.5.3)，方程(4.5.4)所作的仿真结果如图4.5.1所示. 图4.5.1(a)是不作滤波处理的情形，图4.5.1(b)是一阶惯性滤波处理以后的情形，图4.5.1(c)图形显示的是跟踪微分器来进行滤波并加预测处理后所得的观测结果. 从图4.5.1中可以看出，用跟踪微分器来进行滤波并加预报处理的效果最好，惯性滤波处理的效果也可以，但信号的相位损失稍大一些.

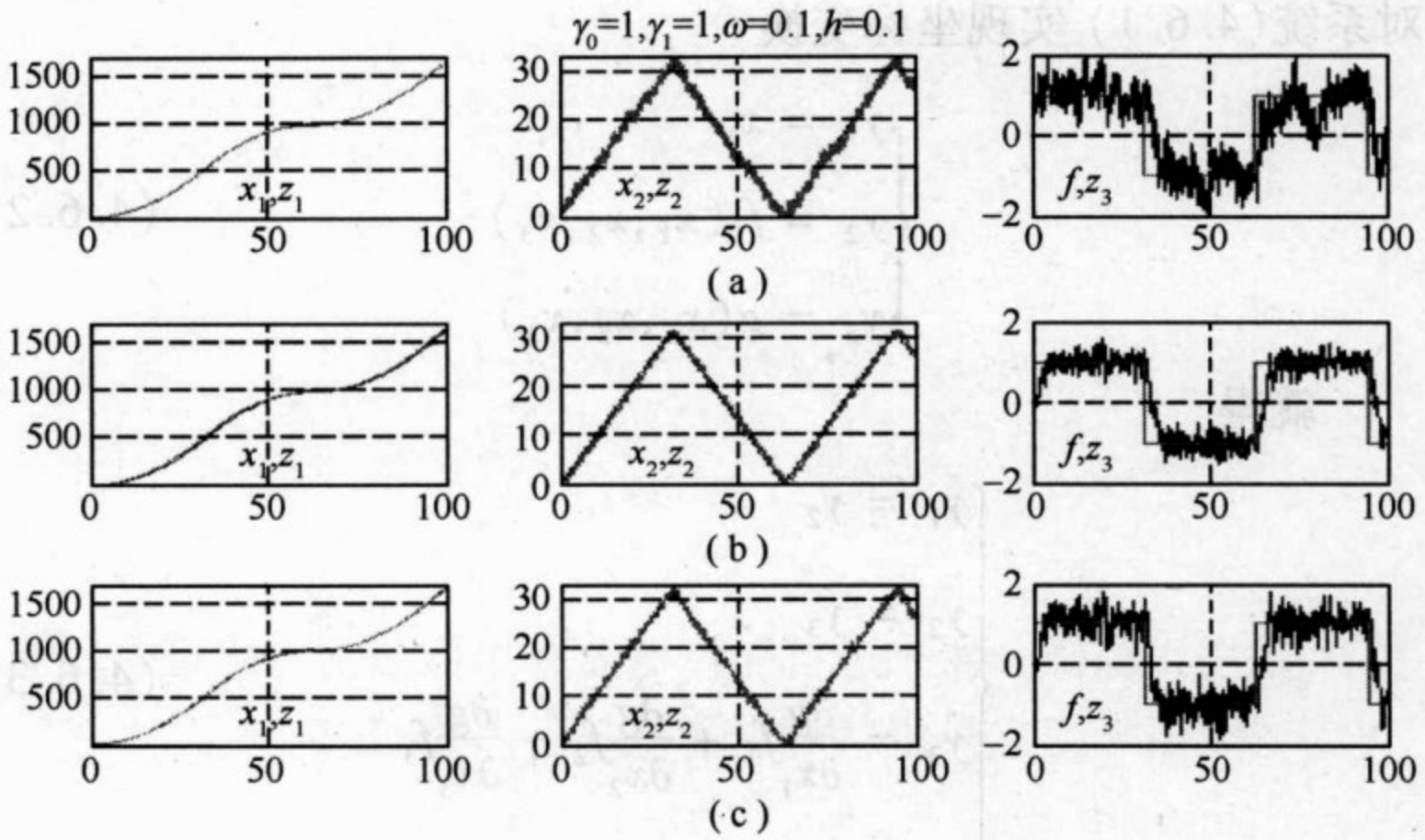


图4.5.1

4.6 一类混沌系统的扩张状态观测

混沌系统的运动虽然表现出“无序现象”，但其运动轨线始终在相空间中的有限区域里，即其状态变量是在有界范围内变化，因此这些状态变量变化的加速度变化范围是有界的. 这就有可能用扩张状态观测器来跟踪其运动.

设有混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.6.1}$$

假定其中的 $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$ 连续可微,系统能观测. 记

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3$$

对系统(4.6.1)实现坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = f_1(x_1, x_2, x_3) \\ y_3 = g(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{4.6.2}$$

就得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = \frac{\partial g}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} f_3 \\ y = y_1 \end{cases} \tag{4.6.3}$$

现在对这个系统用如下扩张状态观测器对状态和总和扰动进行估计.

如果对扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.5, \delta), \mathrm{fe}_2 = \mathrm{fal}(e, 0.25, \delta) \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02} \mathrm{fe}_1 \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03} \mathrm{fe}_2 \end{cases} \tag{4.6.4}$$

适当选取参数 $\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03}$，就能有

$$z_1 \to y_1, z_2 \to y_2, z_3 \to y_3 \tag{4.6.5}$$

1. 针对 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.6.6}$$

式中，$\sigma = 10, \rho = 28, b = \dfrac{8}{3}, x_1(0) = -4.47, x_2(0) = -0.505,$ $x_3(0) = 28.02$ 时产生混沌现象(图 4.6.1).

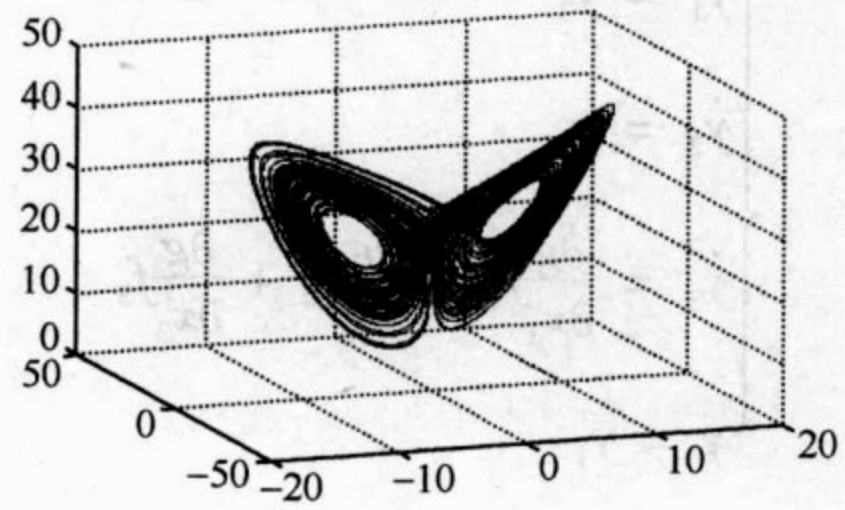


图 4.6.1

这里

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_2 - x_1) = 10x_2 - 10x_1 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 = 28x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = -bx_3 - x_1 x_2 = -\dfrac{8}{3}x_3 - x_1 x_2 \end{cases} \tag{4.6.7}$$

于是

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3 = -\sigma(\sigma(x_2 - x_1)) + \sigma(\rho x_1 - x_2 - x_1 x_3) =$$

$$\sigma[(\sigma + \rho)x_1 - (\sigma + 1)x_2 - x_1 x_3] =$$

$$380x_1 - 110x_2 - 10x_1 x_3$$

记

$$g(x_1,x_2,x_3) = 380x_1 - 110x_2 - 10x_1x_3 \tag{4.6.8}$$

则经过坐标变换(此变换是可逆的)

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = f_1(x_1,x_2,x_3) \\ y_3 = g(x_1,x_2,x_3) \end{cases} \tag{4.6.9}$$

得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}f_1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}f_2 + \dfrac{\partial g}{\partial x_3}f_3 \\ y = y_1 \end{cases} \tag{4.6.10}$$

式中:$\dfrac{\partial g}{\partial x_1}f_1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}f_2 + \dfrac{\partial g}{\partial x_3}f_3 = -6880x_1 + 3910x_2 + 236.67x_1x_3 - 100x_2x_3 + 10x_1^2x_2$.

对此系统用扩张状态观测器(4.6.4)进行估计. 取扩张状态观测器参数

$$h = 0.001, \beta_{01} = 1000, \beta_{02} = 30000, \beta_{03} = 800000 \tag{4.6.11}$$

所作的仿真结果如图 4.6.2、图 4.6.3 所示.

图 4.6.2 和图 4.6.3 分别表示扩张状态观测器(4.6.4)的状态 z_1, z_2 分别跟踪系统(4.6.9)的状态 y_1, y_2 的情形. 每个图的下半部是上半部图的跟踪误差. 跟踪的相对误差只有千分之几的程度, y_i 和 z_i 几乎是“同步”的.

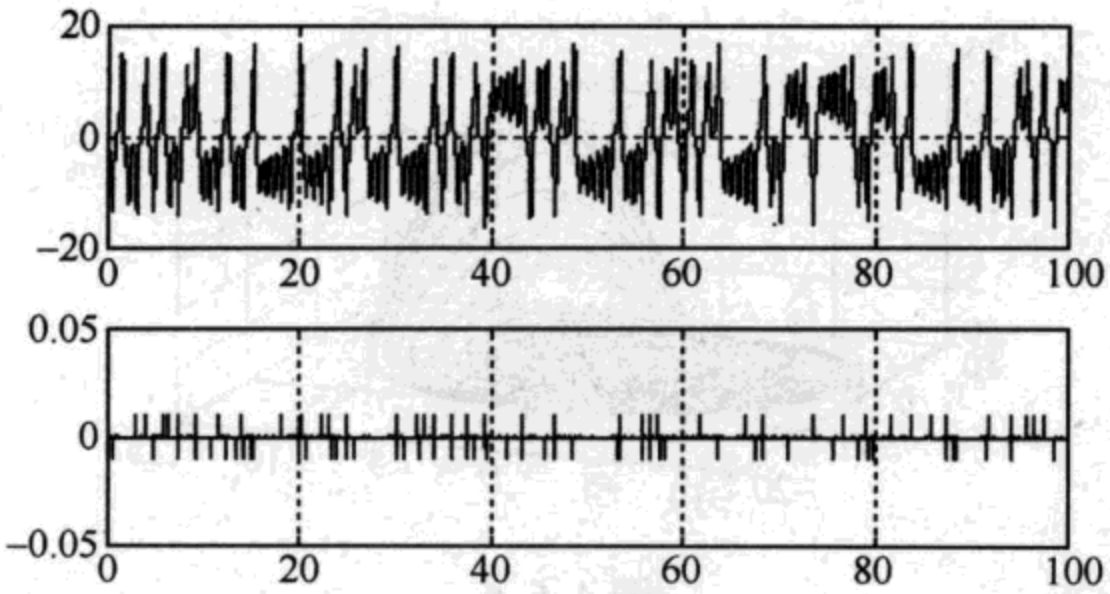


图 4.6.2

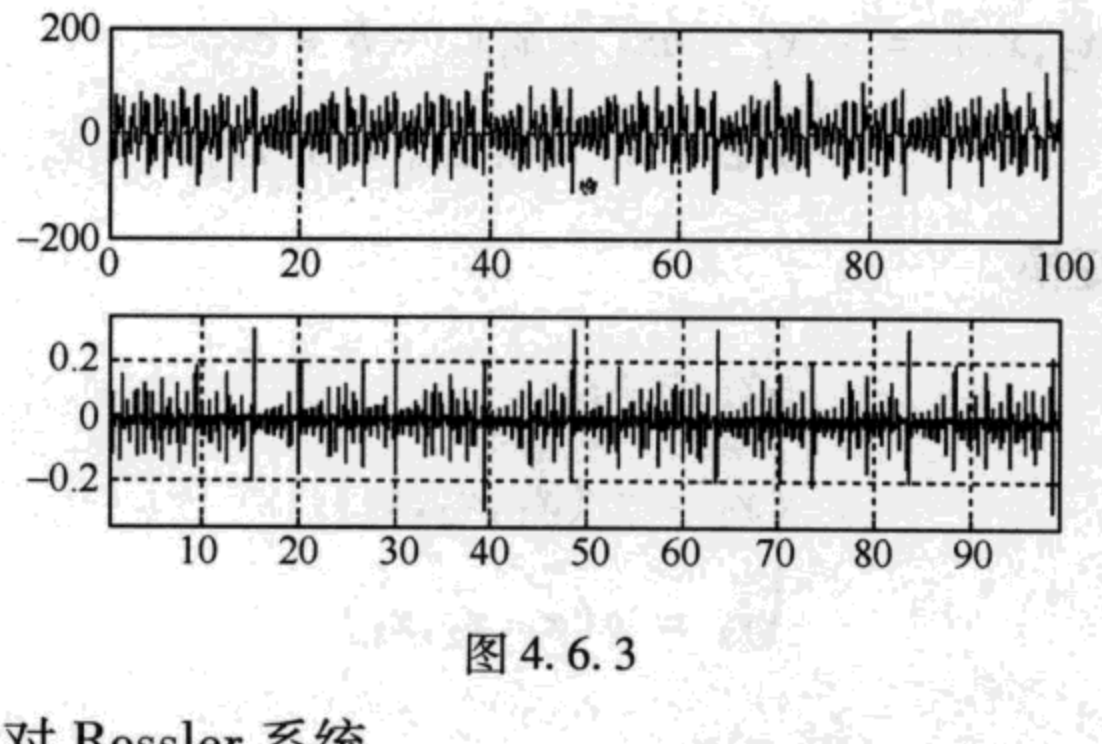


图 4.6.3

2. 针对 Rossler 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.6.12}$$

式中，$a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7, x_1(0) = -1, x_2(0) = -1,$ $x_3(0) = 0$ 时产生混沌(图 4.6.4).

这里，

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = -x_2 - x_3,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3 = -(x_1 + ax_2) - (b + x_3(x_1 - c))$$

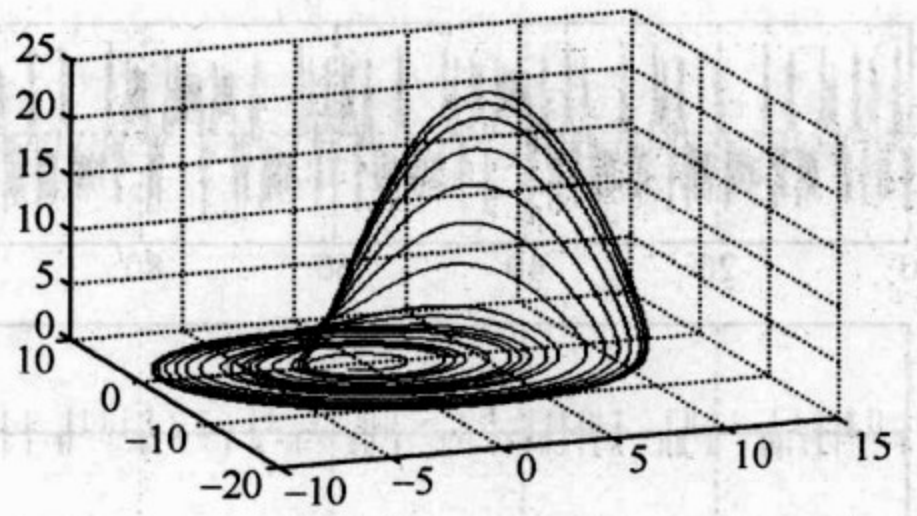


图 4.6.4

因此

$$g(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - ax_2 - x_1x_3 - b + cx_3 =$$

$$-0.2 - x_1 - 0.2x_2 + 5.7x_3 - x_1x_3$$

经过坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = f_1(x_1,x_2,x_3) \\ y_3 = g(x_1,x_2,x_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = \dfrac{\partial g}{\partial x_1}f_1 + \dfrac{\partial g}{\partial x_2}f_2 + \dfrac{\partial g}{\partial x_1}f_3 \\ y = y_1 \end{cases}$$

其中

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}f_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}f_2 + \frac{\partial g}{\partial x_1}f_3 = (1.14 + 0.4x_1 + 0.94x_2) -$$

$$(31.49 - 11.4x_1 + x_2 - x_1^2 + x_3)x_3$$

用扩张状态观测器(4.6.4),其参数仍取式(4.6.11) 给出的值. 所作的仿真结果中只显示扩展状态观测器的变量 z_1, z_2 分别跟

踪系统(4.6.9)的状态y_1,y_2的情形(图4.6.5和图4.6.6).同样,图4.6.6和图4.6.5的上图是对应轨线的第一坐标的情形,而下图是第一坐标跟踪误差曲线.

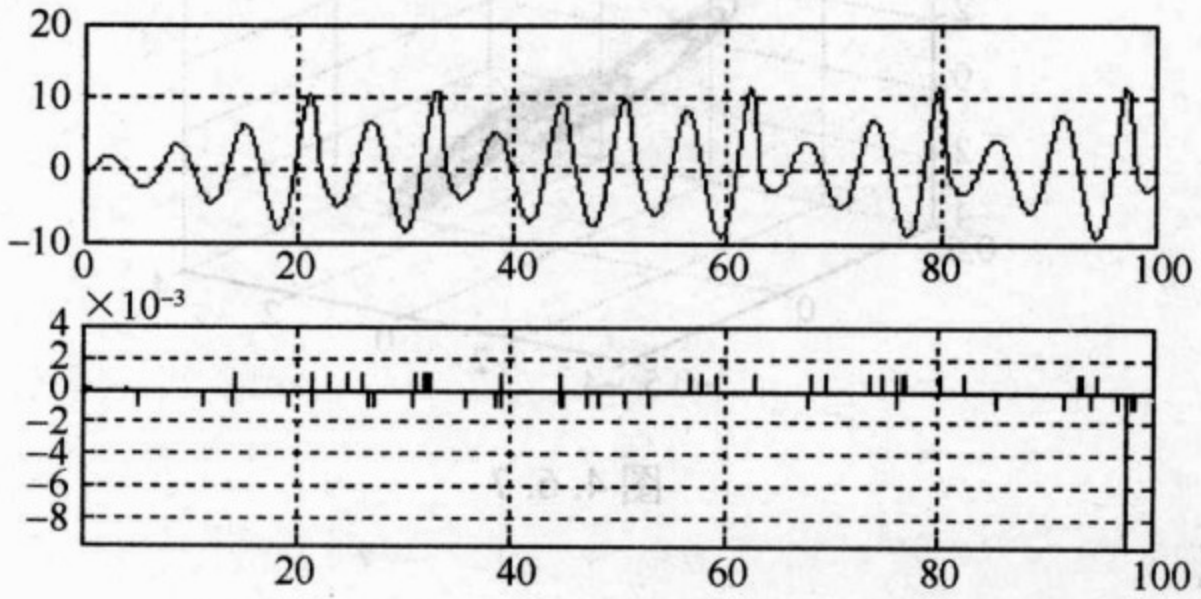


图4.6.5

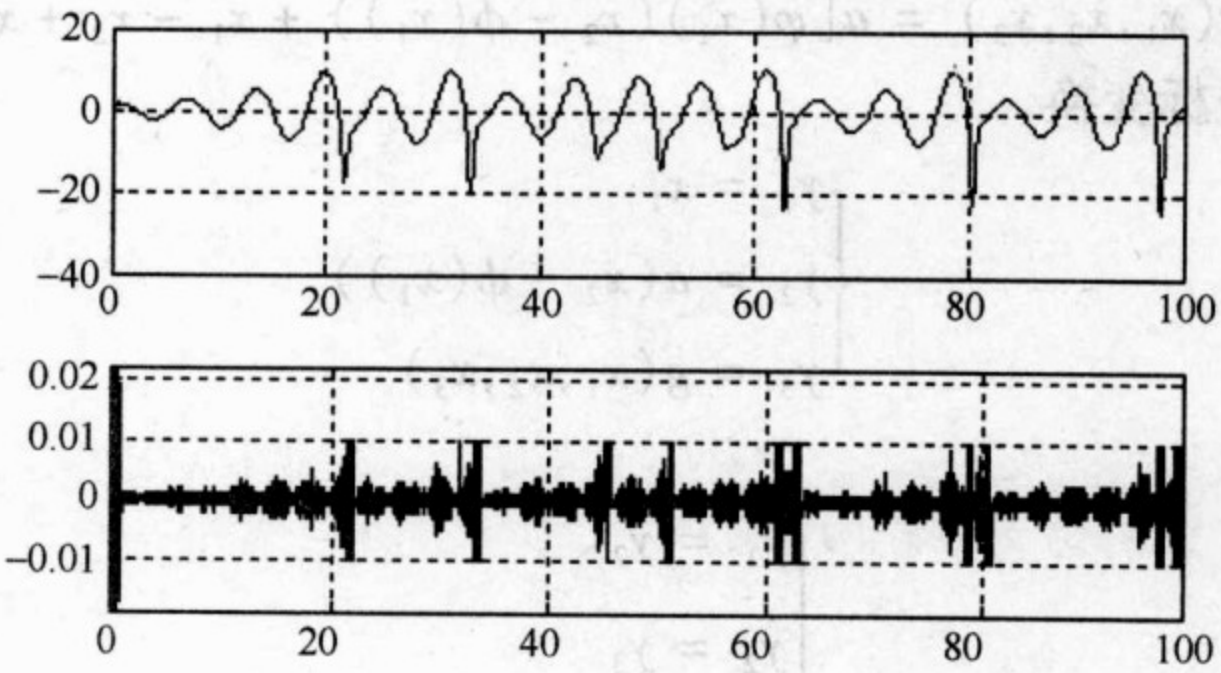


图4.6.6

3. Chua电路系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a[x_2 - \phi(x_1)] \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_2 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.6.13}$$

式中,$\phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+c| - |x-c|)$,$a = 9$,$b = 14.286$,$c = 1$,$m_0 = -\frac{1}{7}$,$m_1 = \frac{2}{7}$,$x_1(0) = 1$,$x_2(0) = 0$,

$x_3(0) = -1$ 时产生混沌(图 4.6.7).

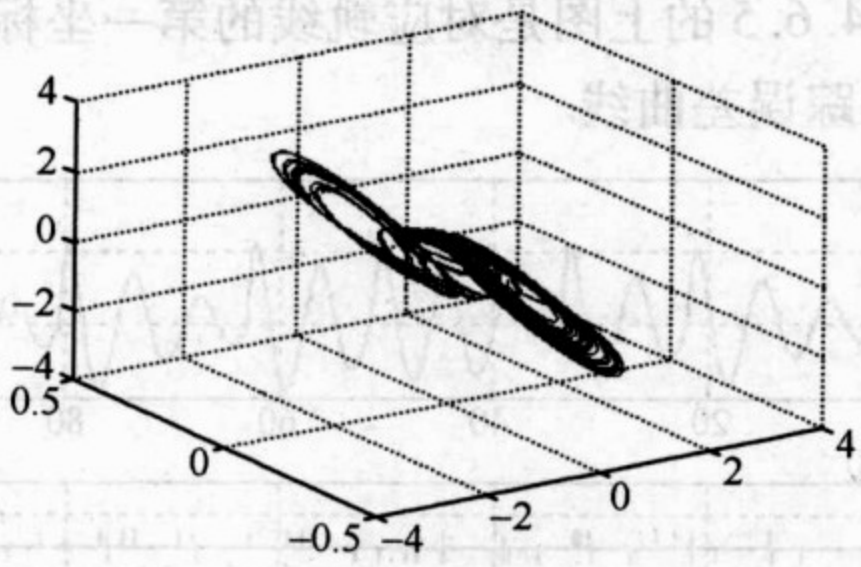


图 4.6.7

记

$$\varphi(x) = (\operatorname{sign}(x + c) - \operatorname{sign}(x - c))$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = a[\varphi(x_1)(x_2 - \phi(x_1)) + x_1 - x_2 + x_3]$$

并作坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = a(x_2 - \phi(x_1)) \\ y_3 = g(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \dot{y}_3 = g(x_1, x_2, x_3) \\ y = y_1 \end{cases}$$

用状态观测器(4.6.4),其参数还是取式(4.6.11)所给出的值.仿真计算得出的扩张状态观测器状态 z_1, z_2 分别跟踪系统(4.6.9)的状态 y_1, y_2 的情形(图 4.6.8 和图 4.6.9).

用一个状态变量的量测值,采用相同的扩张状态观测器(4.6.4)和相同的一组参数(4.6.11)来跟踪三个不同的混沌系统,原系统的所有状态变量都被跟踪得很好.用同一个扩张状态观测器实现了不同混沌系统的"同步".

这些事实说明,一个动态系统其轨线始终限制在一个有界范

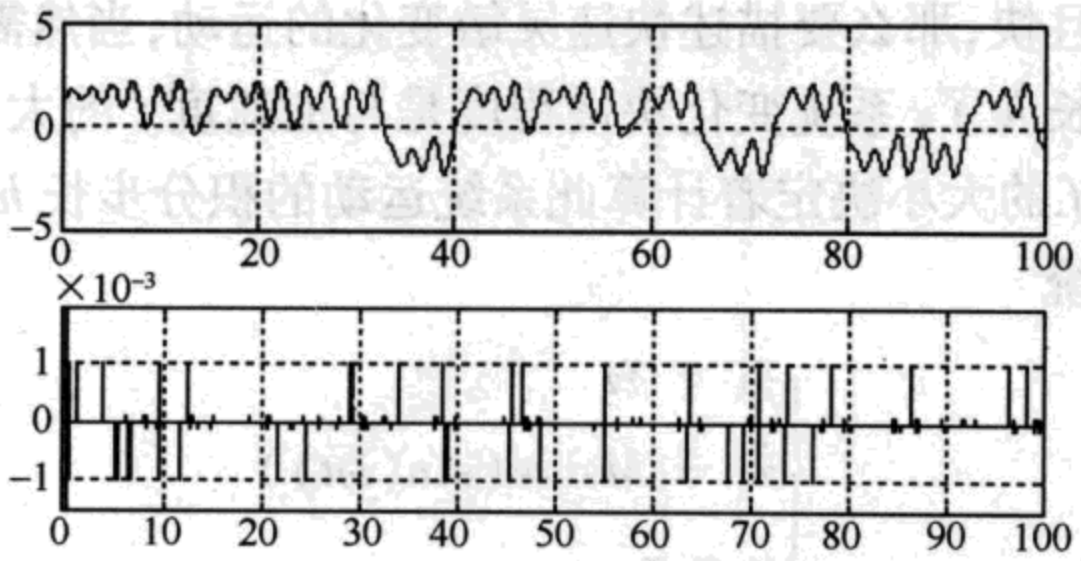


图 4.6.8

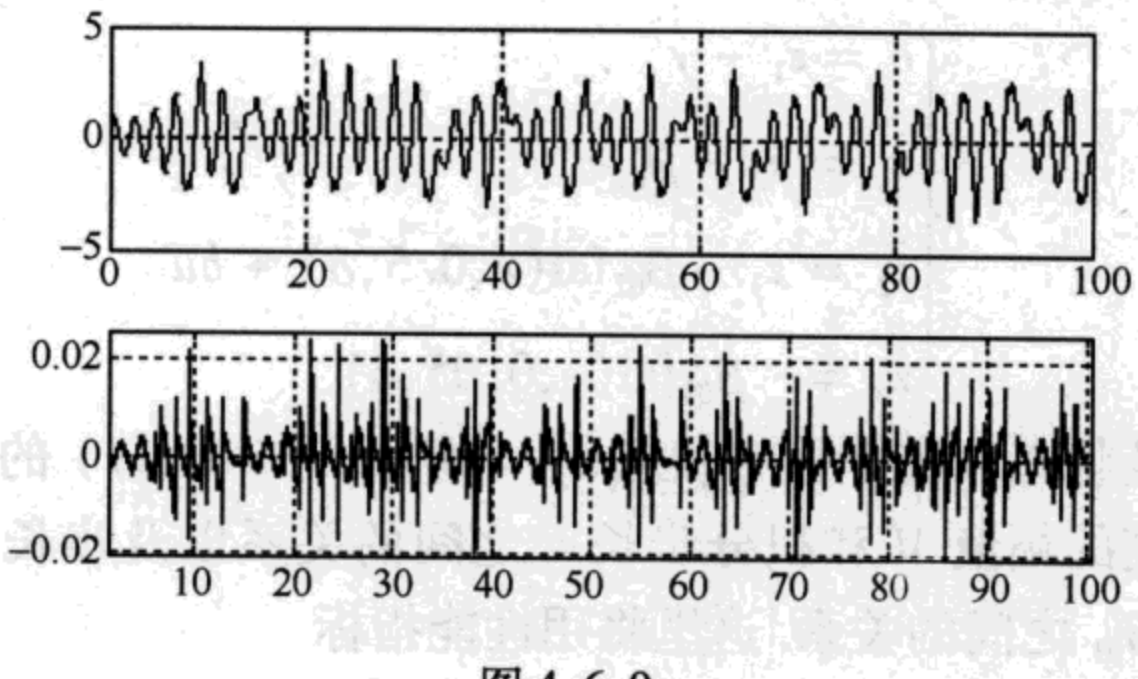


图 4.6.9

围内变,量测量是系统能观测的量测,那么可以用独立于系统动态模型的扩张状态观测器来跟踪系统的所有状态变量.

4.7 扩张状态观测器与系统的时间尺度

大量的数值仿真试验表明,对被观测的对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu \\ y = x_1 \end{cases}$$

来说,在估计它的状态和总和扰动的扩张状态观测器中,当非线性函数 $\mathrm{fal}(\varepsilon, \alpha_i, \delta)$ 中的参数 $\alpha_i = 1/2^{i-1}, \delta = h$ 确定时,参数 β_{0i} 基本上是与积分步长 h 有关,而积分步长 h 决定于被估计对象的函数 f 的作用范围,即加速度函数 f 的作用范围大小. 如果系统的变化比

较灵敏而且快,那么要描述快速灵敏变化的运动,当然需要比较小的积分步长 h 了. 系统变化快慢程度是与加速度 f 的大小有关,因而加速度 f 的大小决定着计算此系统运动的积分步长 h.

对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = M\text{sign}(\sin(\omega t)) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.7.1}$$

我们用扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \dot{z}_1 = z_2 - \beta_{01} e \\ \dot{z}_2 = z_3 - \beta_{02}\text{fal}(e,0.5,\delta) + bu \\ \dot{z}_3 = -\beta_{03}\text{fal}(e,0.05,\delta) \end{cases} \tag{4.7.2}$$

来跟踪其状态和被扩张的状态 $x_3 = M\text{sign}(\sin(\omega t))$ 的情况来探讨加速度的幅值 M 和积分步长 h 之间的关系以及步长 h 和参数 $\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03}$ 之间的关系. 这里将用性能指标

$$J = \frac{1}{M}\int_0^T | x_3(t) - z_3(t) | \, \mathrm{d}t \tag{4.7.3}$$

的大小来衡量跟踪的好坏.

在数字积分中采用最简单的微分近似

$$\dot{z}(t) = \frac{z(t+h) - z(t)}{h}$$

把它代到式(4.4.2),得扩张状态观测器如下递推公式

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \text{fe}_1 = \text{fal}(e,0.5,\delta), \text{fe}_2 = \text{fal}(e,0.25,\delta) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\text{fe}_1 + bu) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_2) \end{cases} \tag{4.7.4}$$

这是把微分方程(4.7.2) 用欧拉法积分的递推公式.

下面用扩张状态观测器(4.7.4)来跟踪系统(4.7.1)的状态 $x_1(t), x_2(t)$ 和被扩张的状态 $x_3(t) = M\text{sign}(\sin(\omega t))$ 的情况.

先固定 $\omega = 0.005$,fal 函数中的 $\delta = h$. 然后考察步长 $h = 1$ 时,扩张状态观测器(4.7.4)能跟踪多大 M 的系统(4.7.1)的轨线和被扩张的状态?能够跟踪这个轨线时的扩张状态观测器(4.7.4)的参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 是多少?

按上述性能指标优化的结果为

$$h = 1.0, \delta = h, \beta_{01} = 1.0, \beta_{02} = 0.55, \beta_{03} = 0.1.$$

而在这个参数下幅值 M 和指标 J 之间关系见表 4.7.1.

表 4.7.1

M	0.01	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
J	35.78	33.30	33.30	34.96	33.30	35.87	37.61	38.83	40.34	41.64	45.61

从表 4.7.1 看,当步长取 $h = 1.0$,而 $\beta_{01} = 1.0, \beta_{02} = 0.55$, $\beta_{03} = 0.1$ 时,跟踪 $M \leqslant 0.2$ 的范围的加速度系统(4.7.1),其跟踪性能指标 J 的值都比较小,但 $M > 0.2$ 时跟踪的误差性能指标急剧变大,跟踪效果变差. $M = 0.2$ 时加速度跟踪情形如图 4.7.1 所示.

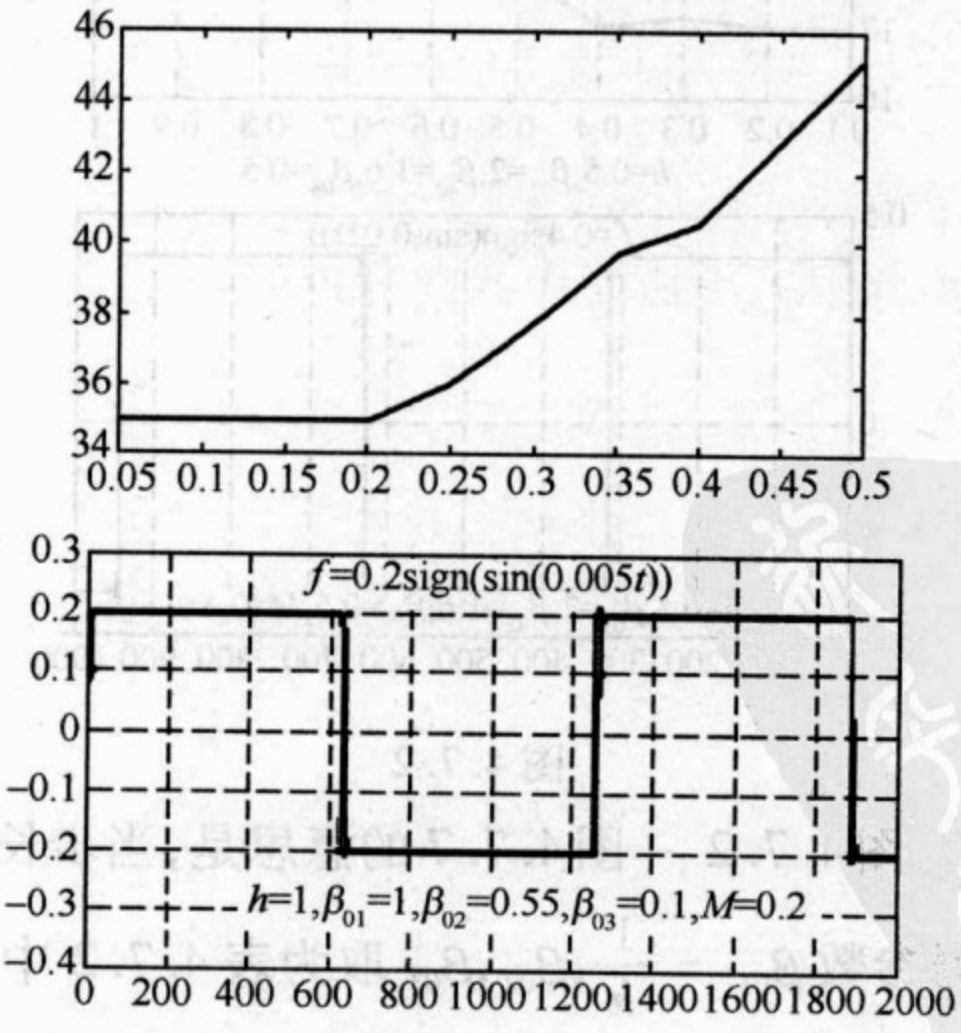


图 4.7.1

步长 h 分别取 0.5,0.25,0.1,0.05,0.01,0.005,0.001 时优化的结果列于表 4.7.2. 相应的优化指标值曲线和加速度跟踪曲线分别如图 4.7.2 ~ 图 4.7.7 所示.

表 4.7.2

h	M	β_{02}	β_{03}	J
0.5	0.4	1.6	0.5	16.99
0.25	1.4	5.6	3.0	9.47
0.1	2.4	20	21	3.53
0.05	5.0	52	88	1.67
0.01	26.0	540	3200	0.36
0.005	40.0	1300	12000	0.18
0.001	250.0	16000	500000	0.037

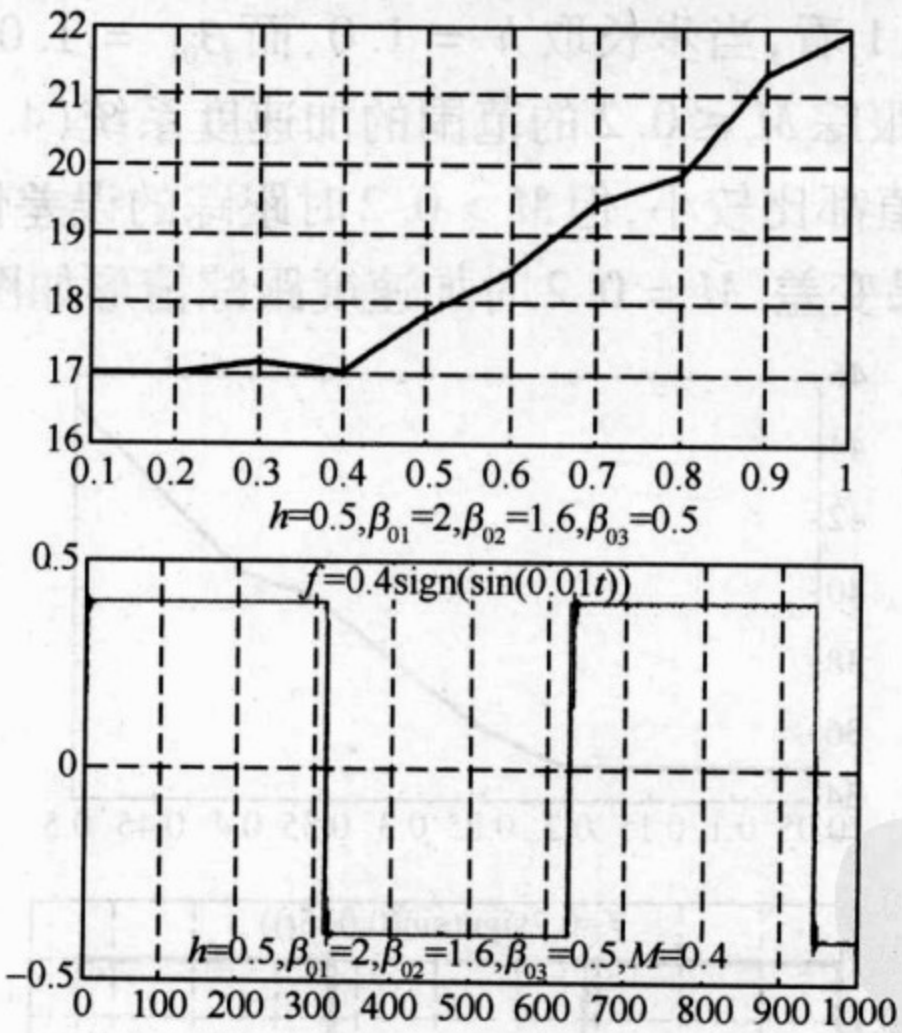
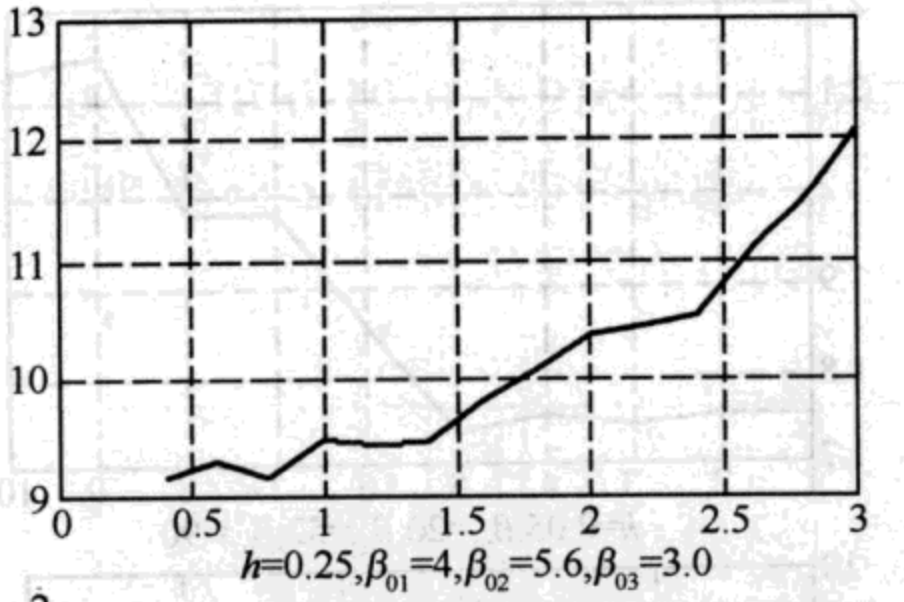


图 4.7.2

表 4.7.2,图 4.7.2 ~ 图 4.7.7 的意思是,当步长 h 给定,而扩张状态观测器参数 $\beta_{01} = \frac{1}{h}$,β_{02},β_{03} 取为表 4.7.2 中的值时,用扩张状态观测器(4.7.4)来估计加速度作用范围不超过 M 的二阶对


13
12
11
10
9
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
h=0.25,β01=4,β02=5.6,β03=3.0

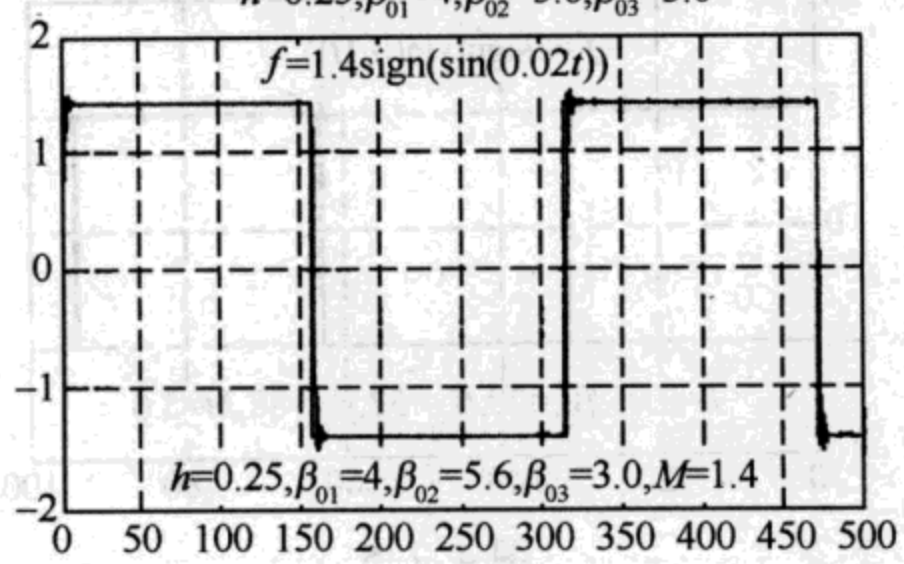
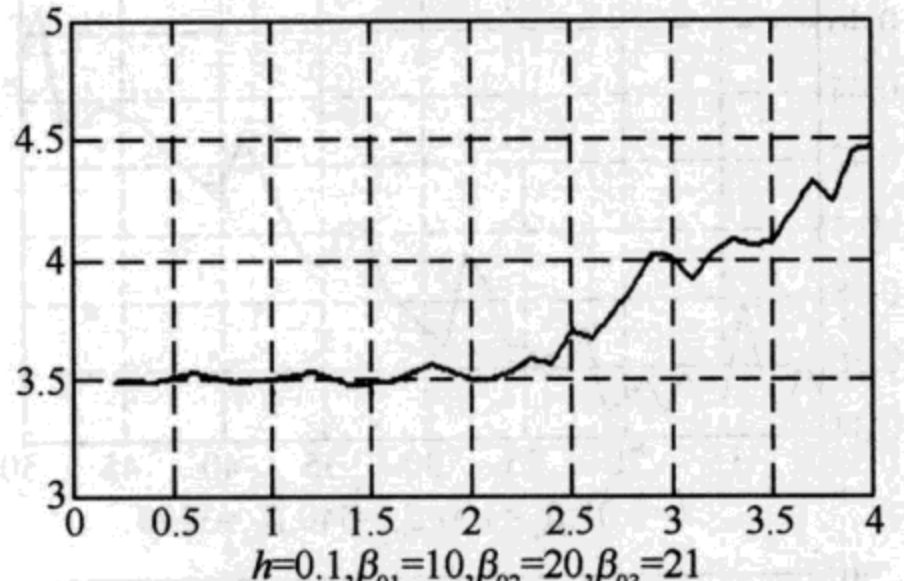

f=1.4sign(sin(0.02t))
2
1
0
−1
−2
h=0.25,β01=4,β02=5.6,β03=3.0,M=1.4
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

图 4.7.3


5
4.5
4
3.5
3
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
h=0.1,β01=10,β02=20,β03=21

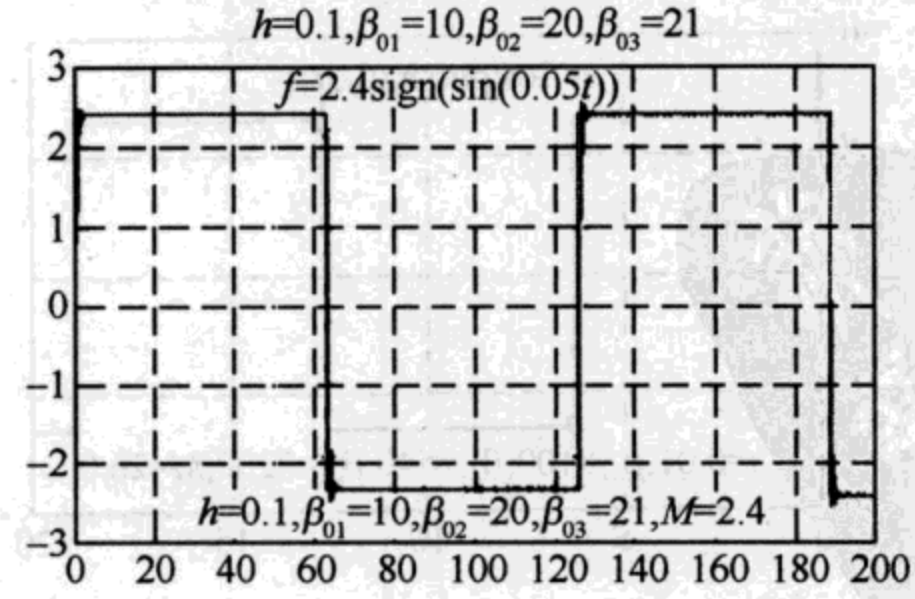

f=2.4sign(sin(0.05t))
3
2
1
0
−1
−2
−3
h=0.1,β01=10,β02=20,β03=21,M=2.4
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

图 4.7.4

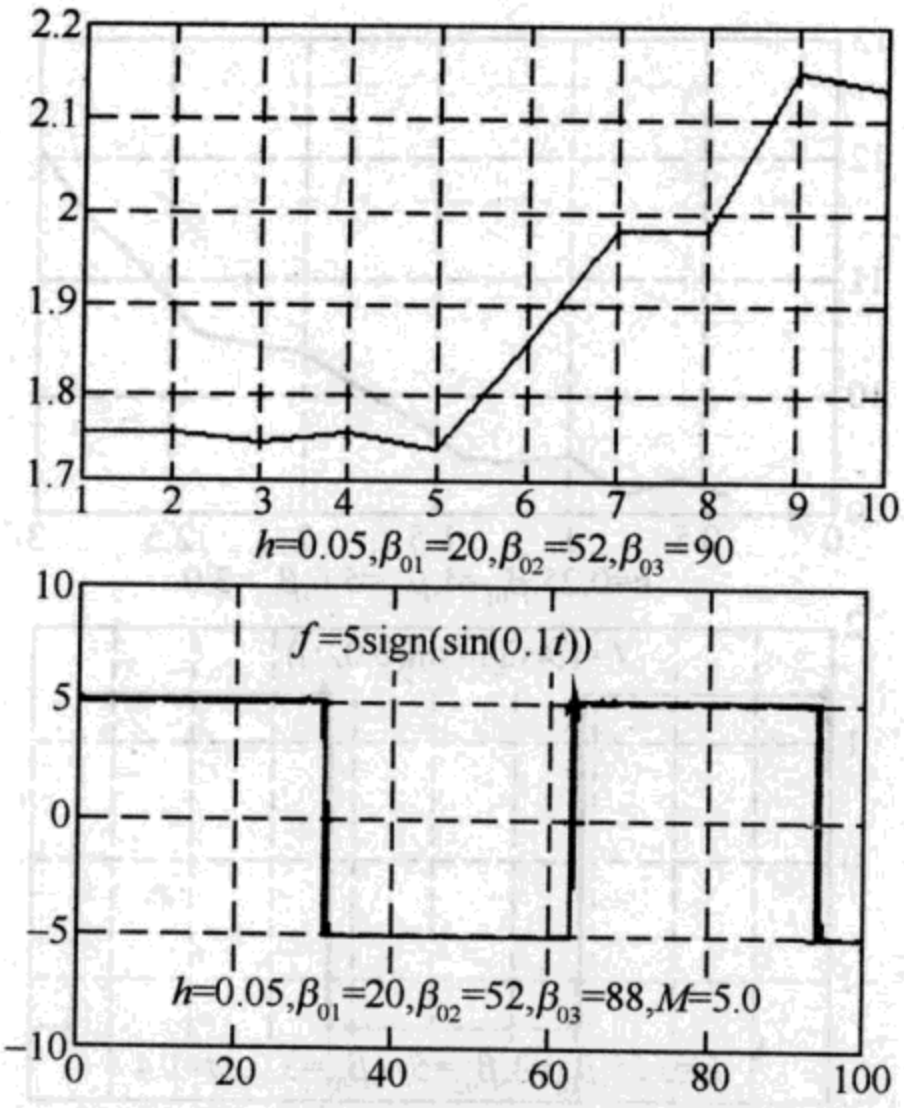

2.2
2.1
2
1.9
1.8
1.7
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
h=0.05,β01=20,β02=52,β03=90
10
5
0
−5
−10
f=5sign(sin(0.1t))
h=0.05,β01=20,β02=52,β03=88,M=5.0
0 20 40 60 80 100

图 4.7.5

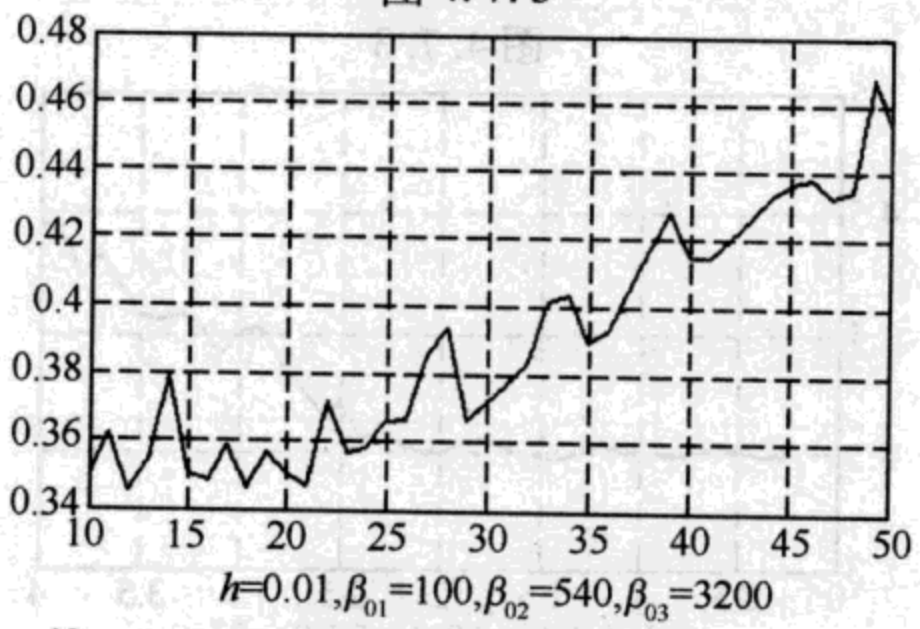

0.48
0.46
0.44
0.42
0.4
0.38
0.36
0.34
10 15 20 25 30 35 40 45 50
h=0.01,β01=100,β02=540,β03=3200
40
20
0
−20
−40
f=26sign(sin(0.5t))
h=0.01,β01=100,β02=540,β03=3200,M=26.0
0 5 10 15 20

图 4.7.6

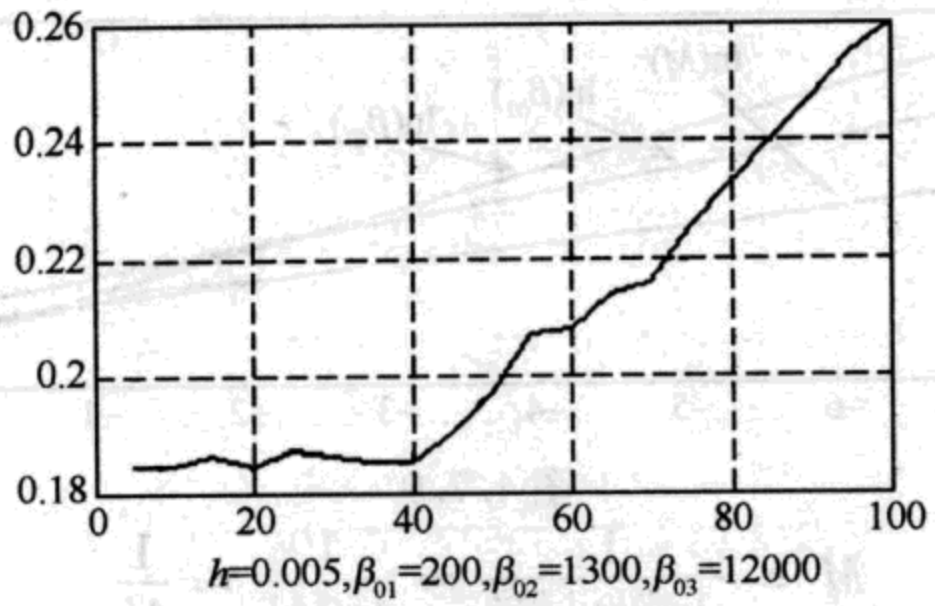


图 4.7.7

象的状态和扰动作用是最好的.

我们画出表4.7.2中的$\ln(h)$和$\ln(M)$,$\ln(\beta_{02})$,$\ln(\beta_{03})$之间的关系曲线几乎都是直线,如图4.7.8所示.

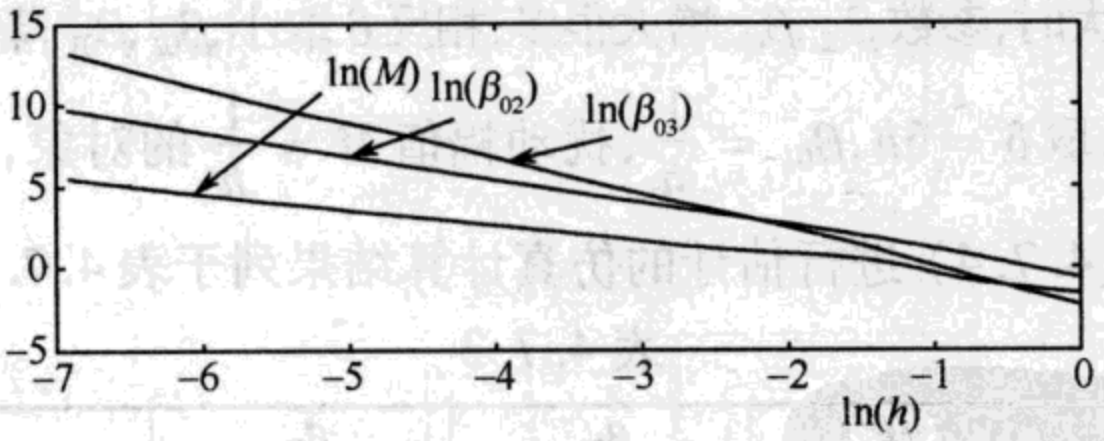


图 4.7.8

对这些曲线作最小二乘拟合得

$\ln(M)$ 的拟合为 $\ln(M) \approx -1.4451 - 1.0056\ln(h)$

$\ln(\beta_{02})$ 的拟合为 $\ln(\beta_{02}) \approx -0.4762 - 1.4673\ln(h)$

$\ln(\beta_{03})$ 的拟合为 $\ln(\beta_{03}) \approx -2.1537 - 2.2093\ln(h)$

因此有如下近似公式

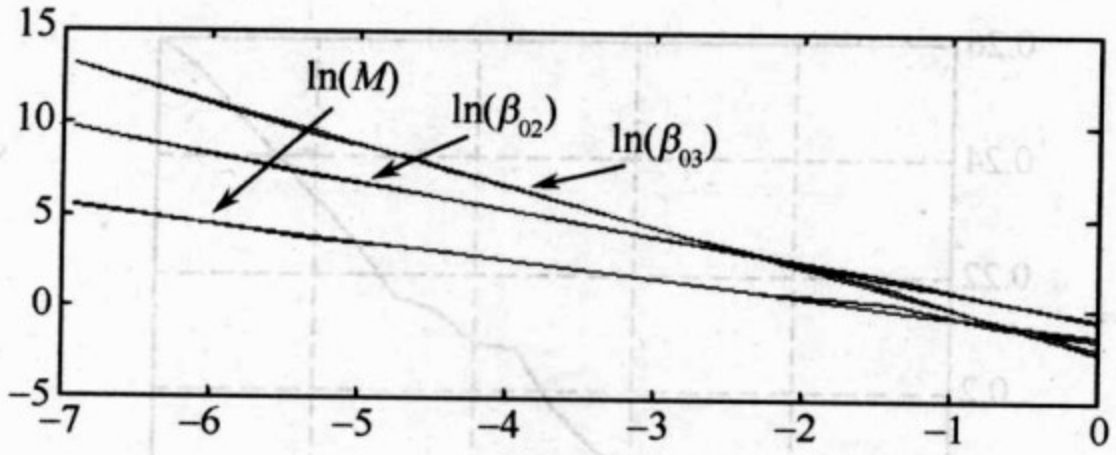


图 4.7.9

$$M = \frac{1}{e^{1.4451} h^{1.0056}} \approx \frac{1}{4.24h} \approx \frac{1}{4h}$$

$$\beta_{01} \approx \frac{1}{h}$$

$$\beta_{02} = \frac{1}{e^{0.4762} h^{1.4673}} \approx \frac{1}{1.6h^{1.5}}$$

$$\beta_{03} = \frac{1}{e^{2.1537} h^{2.2093}} \approx \frac{1}{8.6h^{2.2}}$$

这个近似公式是说当系统的采样步长 h 给定时，扩张状态观测器(4.7.4) 的参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 按上述公式确定，那么扩张状态观测器(4.7.4) 就能较好地估计出加速度不超出 M 范围的系统的状态和加速度.

在上述计算中线性区间 δ 的取法对扩张状态观测器的参数影响很大，如 δ 取大时，参数 β_{02}, β_{03} 增大很多，相反 δ 取小，β_{02}, β_{03} 降低很多.

例如，取 $\delta = 5h, \beta_{01} = \frac{1}{h}$，扰动幅值 $M = \frac{1}{h}$ 的对象，用扩张状态观测器(4.7.4) 进行估计的仿真计算结果列于表 4.7.3.

表 4.7.3

h	M	β_{02}	β_{03}	J
1	0.2	0.55	0.1	33.31
0.5	0.5	1.6	0.51	19.83
0.25	1.2	5.5	3.2	11.44
0.1	2.5	31	41	5.10
0.05	5	150	410	2.22
0.01	20	3600	55000	0.44
0.005	40	15000	460000	0.21
0.001	200	390000	58000000	0.042

以 $\lg(h)$ 为自变量,以 $\lg(\beta_{02})$,$\lg(\beta_{03})$ 为函数值的曲线和用最小二乘法逼近的直线图如图 4.7.10 所示.

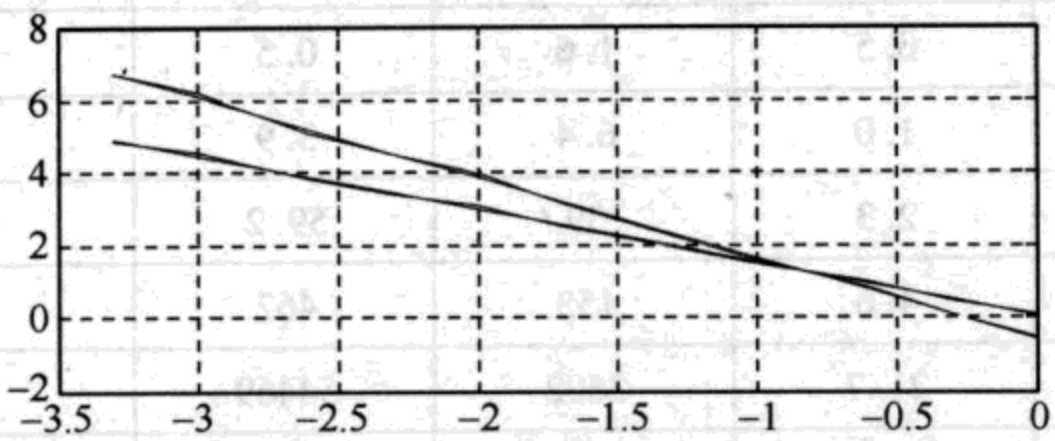


图 4.7.10

逼近直线给出的公式为

$$\lg(\beta_{02}) = \lg\left(\frac{10^{0.0741}}{h^{1.4686}}\right), \beta_{02} = \frac{1.186}{h^{1.47}};$$

$$\lg(\beta_{03}) = \lg\left(\frac{1}{10^{0.5483} h^{2.2079}}\right), \beta_{03} = \frac{0.283}{h^{2.21}}$$

由上式可得表 4.7.4.

表 4.7.4

h	1.0	0.5	0.25	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
β_{02}	1.2	3.2	10	30	85	350	1300	2700	6800	36000	80000
β_{03}	0.3	1.3	7	38	180	1500	10000	33000	120000	1600000	5000000

如果把扩张状态观测器方程(4.7.4)变成线性扩张状态观测器

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = z_2 - \beta_{01} e \\ \dfrac{dz_2}{dt} = z_3 - \beta_{02} e + bu \\ \dfrac{dz_3}{dt} = -\beta_{03} e \end{cases} \tag{4.7.5}$$

那么和上述同样的方法优化出如表 4.7.5 所示.

表 4.7.5

h	M	β_{02}	β_{03}	J
0.5	0.5	1.6	0.5	6.66
0.25	1.0	6.4	3.9	3.37
0.1	2.3	39	59.2	1.37
0.05	4.6	153	462	0.70
0.001	21.7	3692	54469	0.14
0.005	42.4	14530	424890	0.072
0.001	201.0	35000	50090000	0.015

对这些数据画出 $\ln(h)$ 和 $\ln(M)$, $\ln(\beta_{02})$, $\ln(\beta_{03})$ 之间关系曲线及最小二乘拟合直线示于图 4.7.11.

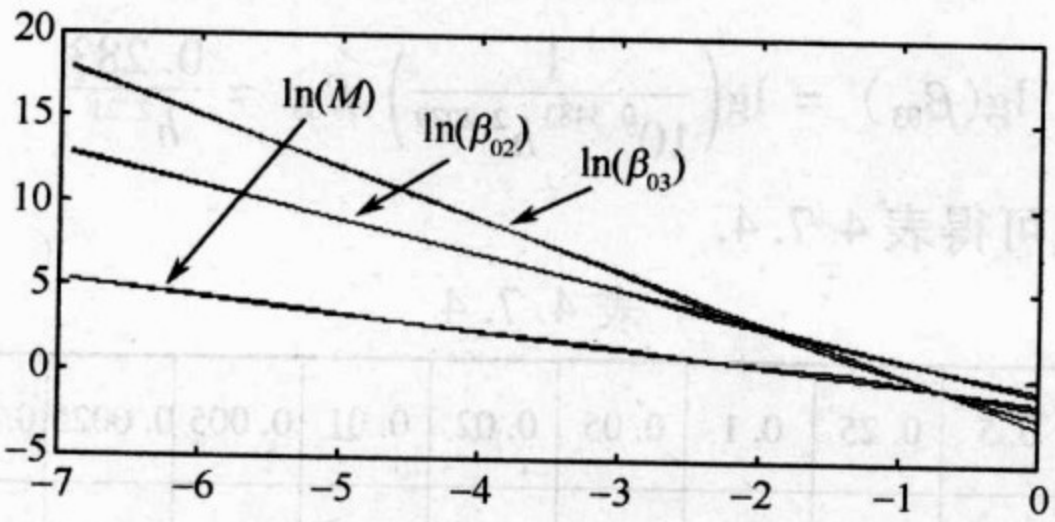


图 4.7.11

最小二乘拟合的数值结果为

$$M = \frac{1}{e^{1.3743} h^{0.9667}} \approx \frac{1}{3.95h} \approx \frac{1}{4h}$$

$$\beta_{01} \approx \frac{1}{h}$$

$$\beta_{02} = \frac{1}{e^{0.8896} h^{1.9768}} \approx \frac{1}{2.4h^2} \approx \frac{1}{3h^2}$$

$$\beta_{03} = \frac{1}{e^{2.7425} h^{2.9636}} \approx \frac{1}{15.5h^3} = \frac{1}{20h^3}$$

当然,这些拟合公式只能作为参考,实际需要用的参数是在这

些公式给出的参数附近仔细寻找才能最后确定.

另一方面,对线性扩张状态观测器(4.7.5)实行“时间尺度”变换

$$\rho t = \tau \tag{4.7.6}$$

就得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{z_2}{\rho} - \dfrac{\beta_{01}}{\rho}e \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{z_3}{\rho} - \dfrac{\beta_{02}}{\rho}e + \dfrac{b}{\rho}u \\ \dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\beta_{03}}{\rho}e \end{cases} \tag{4.7.7}$$

再实行坐标变换

$$\bar{z_1} = z_1, \bar{z_2} = \frac{z_2}{\rho}, \bar{z_3} = \frac{z_3}{\rho^2} \tag{4.7.8}$$

就得

$$\bar{z_1} - \bar{y} = z_1 - y = e$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_1}{\mathrm{d}\tau} = \bar{z}_2 - \dfrac{\beta_{01}}{\rho}e \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_2}{\mathrm{d}\tau} = \bar{z}_3 - \dfrac{\beta_{02}}{\rho^2}e + \dfrac{b}{\rho^2}u \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{z}_3}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{\beta_{03}}{\rho^3}e \end{cases}$$

去掉变量表示中的“一横”,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\tau} = z_2 - \dfrac{\beta_{01}}{\rho}e \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\tau} = z_3 - \dfrac{\beta_{02}}{\rho^2}e + \dfrac{b}{\rho^2}u \\ \dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}\tau} = -\dfrac{\beta_{03}}{\rho^3}e \end{cases} \tag{4.7.9}$$

这说明,在系统中实施“时间尺度”变换

$$\rho t = \tau$$

和坐标变换$\bar{z_1} = z_1, \bar{z_2} = \frac{z_2}{\rho}, \bar{z_3} = \frac{z_3}{\rho^2}$时，扩张状态观测器的参数

$$\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$$

将分别变成

$$\frac{\beta_{01}}{\rho}, \frac{\beta_{02}}{\rho^2}, \frac{\beta_{03}}{\rho^3} \tag{4.7.10}$$

在这里，如果 t 的量纲为“秒”，τ 的量纲为“分”，那么 ρ 就等于 60；如果 t 的量纲为“分”，τ 的量纲为“秒”，那么 ρ 就等于 1/60.

这里有如下几个问题：

(1) 对给定的对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.7.11}$$

如何选取步长 h 来积分扩张状态观测器(4.7.4)？

(2) 对给定的对象(4.7.11)，如何确定其“时间尺度”ρ？

(3)“时间尺度”ρ 和步长 h 的关系又是什么？

(4) 相应于“时间尺度”$\rho = 1$ 的系统的扩张状态观测器参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 又是什么？

关于前两个问题，先考察用欧拉法积分一阶常微分方程(4.7.11)时的误差分析.

设有一阶常微分方程

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x^0 \tag{4.7.12}$$

其解可表示成

$$x(t) = x^0 + \int_0^t f(x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

但用欧拉法积分 m 步的值为

$$x(t) = x^0 + h\sum_{i=0}^{m} f(x(ih))$$

其第 m 步时的误差为

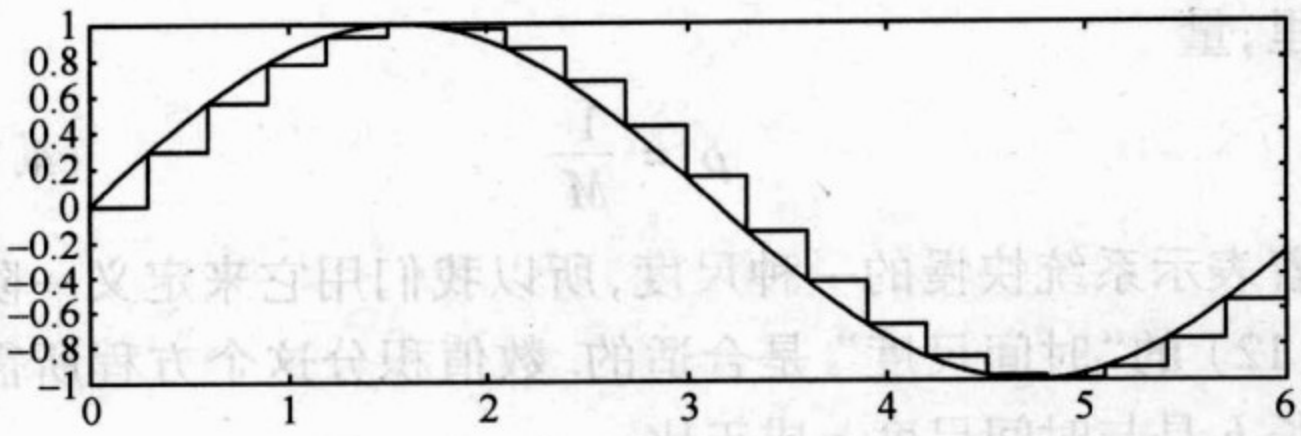


图 4.7.12

$$\int_0^{mh} f(t)\mathrm{d}t - h\sum_0^m f(ih) \approx h\sum_0^m [\max_{\tau\in I_i} f(x(\tau)) - \min_{\tau\in I_i} f(x(\tau))] \leqslant$$

$$2mh\max | f(x(\tau)) | < e$$

这就是说,以固定步长 h,用欧拉法积分引出的误差要小于给定的误差 e,步长 h 要满足

$$h < \frac{e}{2mM}, M = \max | f(x(\tau)) |$$

是与 $\max | f(x) |$ 成反比. 当 $\boldsymbol{x}$ 为向量时,也有

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_0^t f(\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau \quad \text{与近似值} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + h\sum_{i=0}^m f(\boldsymbol{x}(ih))$$

它们之间的误差也是

$$h[\max f(\boldsymbol{x}(\tau)) - \min f(\boldsymbol{x}(\tau))] < 2mh\max f(\boldsymbol{x}(\tau)) < \begin{bmatrix} e \\ e \\ \vdots \\ e \end{bmatrix}$$

其中, $\max \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \max f_1 \\ \max f_2 \\ \vdots \\ \max f_n \end{bmatrix}, \min \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \min f_1 \\ \min f_2 \\ \vdots \\ \min f_n \end{bmatrix},$

令

$$M = \max\{\max | f_1 |, \max | f_2 |, \cdots, \max | f_n |\},$$

那么

$$2mhM < e, h < \frac{e}{2mM}$$

在这里,量

$$\rho = \frac{1}{M} \tag{4.7.13}$$

决定着表示系统快慢的一种尺度,所以我们用它来定义一阶系统(4.7.12)的“时间尺度”是合适的. 数值积分这个方程所需的积分步长 h 是与时间尺度 ρ 成正比

$$h = k\rho \tag{4.7.14}$$

对二阶系统的初值问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_1^0 \\ \dot{x}_2 = f(t), & x_2(0) = x_2^0 \end{cases} \tag{4.7.15}$$

考察 x_1, x_2 的有界区域 G 内有限步数的数值积分问题. 不妨假定 $x_1^0 = x_2^0 = 0$.

系统(4.7.15)的精确积分为

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ x_2(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t \int_0^\tau f(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \int_0^t (t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ x_2(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{cases}$$

而欧拉近似积分公式为

$$\begin{cases} x_1((i+1)h) = x_1(ih) + hx_2(ih) \\ x_2((i+1)h) = x_2(ih) + hf(ih) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1((i+1)h) = x_1(ih) + hx_2((i-1)h) + h^2 f((i-1)h) \\ x_2(ih) = x_2((i-1)h) + hf((i-1)h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(nh) = x_{10} + h\sum_0^{n-1} x_2(ih) + h^2 \sum_0^{n-1} f(ih) \\ x_2(nh) = x_{20} + h\sum_0^{n-1} f(ih) \end{cases}$$

由于从速度 x_2 向前积分一步的过程中速度值的改变不会超出 $h\max|f(t)|$,那么在时间区间 $[0,T]$ 内的积分过程中速度分量 $x_2(t)$ 始终不会超出 $T\max|f(t)|$,从而步长 h 要对某一常数 K,满足不等式

$$K\left(\frac{h}{2}\right)^2 \max|f(x_1,x_2)| < e$$

$$h < 2\sqrt{\frac{e}{K}}\frac{1}{\sqrt{\max\limits_{(x_1,x_2)\in G}|f(x_1,x_2)|}}$$

这样,步长 h 是与 $|f(x_1,x_2)|$ 的最大值的开放成反比,而且这个最大值也可以表示系统在区域 G 范围内运行时动作的“快慢”程度.于是我们定义

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\max\limits_{(x_1,x_2)\in G}|f(x_1,x_2)|}} \tag{4.7.16}$$

为系统(4.7.9)在 G 范围内的“时间尺度”.这样,计算步长 h 应与系统的“时间尺度”成正比,即对某一常数 k,有

$$h = k\rho \tag{4.7.17}$$

关于第三个问题:“时间尺度”ρ 和步长 h 的关系,关系式(4.7.14),(4.7.17)给出了“正比”关系,但这里的比例系数应该取多少?而第四个问题:$\rho = 1$ 时的扩张状态观测器参数 $\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03}$ 又是什么?这些问题都是相互关联的.

如果记 $M = \max\limits_{(x_1,x_2)\in G}|f(x_1,x_2)|$,那么根据式(4.7.15),(4.7.16),有

$$k = h\sqrt{M} \tag{4.7.18}$$

这说明,对给定的步长 h,只要确定了扩张状态观测器(4.7.4)能够跟踪的系统(4.7.11)的加速度范围 M,就能确定出比例系数 k.

比例系数 k 和 $\rho = 1$ 时的参数 $\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03}$,我们只能用数字仿真方法来确定.

扩张状态观测器的数值仿真研究表明,参数 β_{01} 是与采样步长 h 成反比,而 β_{02},β_{03} 分别与 $\frac{1}{h^2},\frac{1}{h^3}$ 成反比.大量数字仿真研究表明,

步长 h 有一个阈值 h_0，使得当 $h > h_0$ 时，β_{02}，β_{03} 都小于 β_{01}，当 $h < h_0$ 时，β_{02}，β_{03} 却大于 β_{01}，而当 $h = h_0$ 时，β_{02}，β_{03} 几乎与 β_{01} 相当.

如果扩张状态观测器能够跟踪如下幅值为 M 的方波型加速度系统(4.7.2)，那么这个扩张状态观测器也能很好地跟踪满足 $|f(x_1,x_2)| \leqslant M$ 的系统(4.7.11)，因此我们的仿真研究就对这样的方波型加速度系统进行.

通过仿真可以确定，当扩张状态观测器(4.7.2) 中的参数 $\delta = \dfrac{h}{10}$ 时，阈值步长为 $h_0 = 0.01$. 而此时的参数值为

$$\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 100, \beta_{03} = 100 \tag{4.7.19}$$

这时扩张状态观测器所能跟踪的系统(4.7.11) 的加速度范围约为 $M \leqslant 2$.

于是可以确定，当 $M = 2$ 时(图 4.7.13)，有

$$k = h_0\sqrt{M} = h_0\sqrt{2} \tag{4.7.20}$$

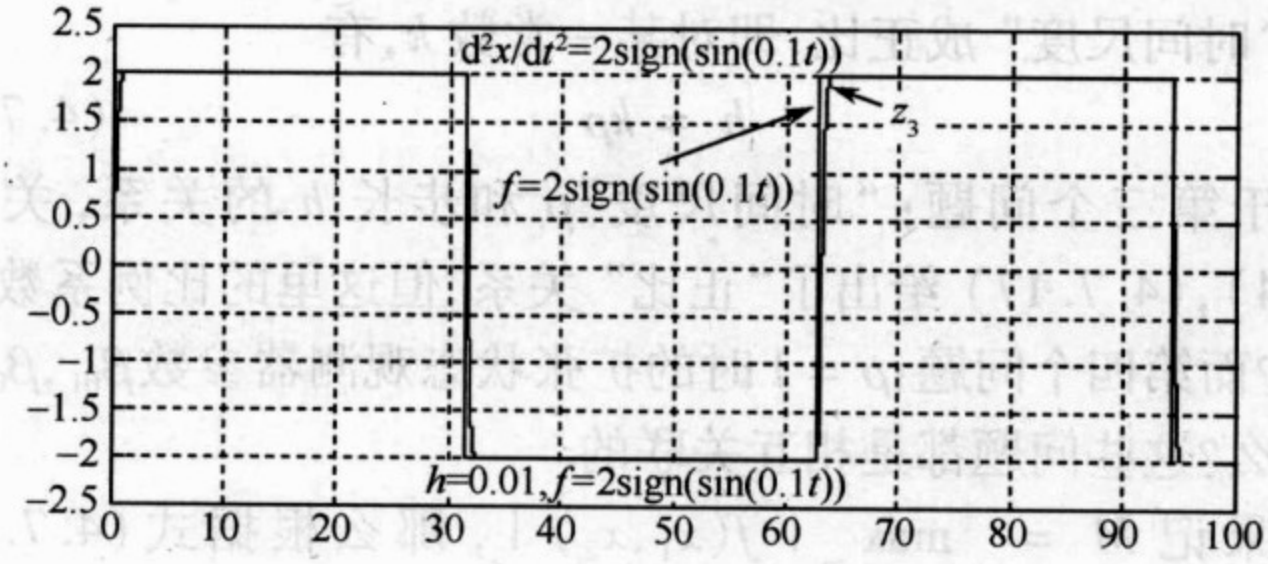


图 4.7.13

由此有

$$M = \left(\frac{k}{h}\right)^2 = \left(\frac{h_0\sqrt{2}}{h}\right)^2 = 2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \tag{4.7.21}$$

这个关系式给出了给定的步长 h 所能跟踪的对象(4.7.11) 的加速度范围为

$$|f(x_1,x_2)| \leqslant 2\left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \tag{4.7.22}$$

对系统(4.7.11)来说,有$\rho = \frac{1}{\sqrt{M}}$,因此以步长$h_0 = 0.01$和参数$\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = 100$来跟踪的系统的"时间尺度"$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$,当然,以$h_0$为步长$\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = 100$为参数的扩张状态观测器完全能够跟踪$|f(x_1, x_2)| \leqslant 2$的系统.

如果我们把$\rho = 1$时的步长$h^* = h_0\sqrt{2} \approx 0.014$和这时的参数$\beta_{01}^*, \beta_{02}^*, \beta_{03}^*$做标准步长和参数,那么根据关系式(4.7.20),就有

$$100 = \frac{\beta_{01}^*}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\beta_{02}^*}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\beta_{03}^*}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} \tag{4.7.23}$$

$$\beta_{01}^* = \frac{100}{\sqrt{2}} = 71, \beta_{02}^* = \frac{100}{2} = 50, \beta_{03}^* = \frac{100}{2\sqrt{2}} = 35 \tag{4.7.24}$$

4.8 扩张状态观测器参数与菲波娜奇数列

4.7节我们一般地讨论了如何确定扩张状态观测器参数β_{01}, β_{02}, β_{03}的原则和具体办法. 下面具体考察线性扩张状态观测器跟踪一阶,二阶,三阶对象的总和扰动问题时的参数选取问题.

实际上,我们可以用如下简便公式来确定参数$\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$, $\beta_{04}\cdots$. 当系统的数值计算采样步长h给定时,就用这个步长h来确定,有

$$\beta_{01} = \frac{1}{h}, \beta_{02} = \frac{1}{3h^2}, \beta_{03} = \frac{2}{8^2h^3}, \beta_{04} = \frac{5}{13^3h^4}, \cdots \tag{4.8.1}$$

这组参数对四阶以下对象是有"继承性"的,即用于估计一阶对象的扩张状态观测器参数β_{01}, β_{02}仍然可以用于估计二阶对象的扩张状态观测器参数$\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$中;估计二阶对象的扩张状态观测器参数$\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$仍然可以用于估计三阶对象的扩张状态观测器参数$\beta_{01}$,

β_{02},β_{03},β_{04} 中. 而且这组参数不受被估计扰动幅度 γ 的限制.

用于四阶以上对象的扩张状态观测器参数 β_{01},β_{02},β_{03},β_{04},β_{05} 等,有没有这种具有“继承性”的公式?尚不清楚,是值得探索的有兴趣的问题.

通过大量计算机数字仿真研究我们发现著名的菲波纳奇数列与线性扩张状态观测器系数之间有很有意思的规律.

我们知道菲波纳奇数列是如下数列

$$f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots \quad (4.8.2)$$

把这个数列并排两行,从第一行去掉 0 ,3 , 21,从第二行去掉 0 ,1 ,2 ,5 后再排两行,得

1,1,2,5,8,13,34,55,…;

1,3,8,13,21,34,55,89,144,…

由此再利用采样步长 h 可以构造出如下数列

$$\frac{1}{1^0},\frac{1}{(3h)^1},\frac{2}{(8h)^2},\frac{5}{(13h)^3},$$

$$\frac{8}{(21h)^4},\frac{13}{(34h)^5},\frac{34}{(55h)^6},\frac{55}{(89h)^7},\cdots$$

对每个数同除步长 h,得新数列

$$\begin{array}{cccc} \beta_{01}, & \beta_{02}, & \beta_{03}, & \beta_{04}, \\ \dfrac{1}{1^0h}, & \dfrac{1}{(3h)^1h}, & \dfrac{2}{(8h)^2h}, & \dfrac{5}{(13h)^3h}, \\ \beta_{05}, & \beta_{06}, & \beta_{07}, & \beta_{08} \\ \dfrac{8}{(21h)^4h}, & \dfrac{13}{(34h)^5h}, & \dfrac{34}{(55h)^6h}, & \dfrac{55}{(89h)^7h},\cdots \end{array} \quad (4.8.3)$$

这些数列就是我们要找的具有“继承性”的扩张状态观测器的参数序列. 当系统阶次 $m \leqslant 7$ 时,扩张状态观测器的最后一个状态基本上跟得上作用于对象的扰动作用,但系统阶次大于 4 次时,跟踪速度就变慢了.

有没有具有“继承性”的任意阶次对象都能适应的扩张状态

观测器参数序列

$$\beta_{01},\beta_{02},\beta_{03},\cdots?$$

如果存在,又如何去找出来?是很有兴趣的问题.

4.9 扩张状态观测器用于动态补偿线性化

在4.3节我们已指出扩张状态观测器估计出来的对象加速度的补偿能使对象变成积分器串联型线性控制系统. 估计补偿对象总和扰动来使对象变成纯积分器串联型对象的过程叫做动态补偿线性化过程. 这个动态估计补偿总和扰动的技术是整个自抗扰控制技术中的最关键,最核心的技术. 有了这个技术,才有可能构造出不依赖于对象模型并具有强抗扰能力的自抗扰控制器. 如果对对象成功地实现了动态补偿线性化,那么剩下的问题就是如何对纯积分器串联型对象设计好误差反馈的问题,而且这个误差反馈的特征就决定着闭环的动静态特性.

下面讨论对被动态补偿线性化了的系统采用误差反馈来改善闭环动静态特性的问题.

对二阶对象

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2,t,w(t)) + bu_0\\ y = x_1\end{cases} \tag{4.9.1}$$

采用扩张状态观测器

$$\begin{cases}e = z_1 - y,\mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e,0.5,\delta),\mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e,0.25,\delta)\\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e)\\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + bu)\\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1)\end{cases} \tag{4.9.2}$$

来估计其状态和总和扰动作用 $x_3(t) = f(x_1(t),x_2(t),t,w(t))$.

这里取 $\delta = 5h$. 选择适当的 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$, 就能得

$$z_3(t) \to x_3(t) = f(x_1(t), x_2(t), t, w(t)) \tag{4.9.3}$$

于是,只要取对象的控制量为如下形式

$$u = \frac{u_0 - z_3(t)}{b} \tag{4.9.4}$$

那么对象(4.9.1) 就变成积分器串联型线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_0 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.9.5}$$

我们要考察对这个系统实施状态反馈所形成的闭环系统的单位阶跃响应.

为此先安排合适的过渡过程 $v_1(t)$ 并获取其微分信号 $v_2(t)$. 这时 $e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2$ 是系统的状态误差,现在取这些误差的线性反馈

$$u_0 = r^2(e_1 - 1.0) + 2re_2 \tag{4.9.6}$$

那么,加上扰动补偿项之后的实际的误差反馈控制量为

$$u = \frac{r(re_1 + 2e_2) - z_3}{b} \tag{4.9.7}$$

从而闭环系统变成

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1 \\ e_2 = v_2 - z_2 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = r(re_1 + 2e_2) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{4.9.8}$$

我们假定系统(4.9.1) 中的总和扰动项为 $f(x_1, x_2, t, w(t)) = \text{sign}(\cos(t))$. 并取 $v_2(t) = \begin{cases} \sin(t)/2, & t < \pi \\ 0, & t \geqslant \pi \end{cases}, v_1(t) =$

$\int_0^t v_2(\tau)\mathrm{d}\tau = (1-\cos(t))/2$ 作为安排的过渡过程的速度信号和过渡过程位置信号来所作的仿真结果如图 4.9.1 所示.

图 4.9.1 的上半部是安排的过渡过程和响应曲线,下半部是实际加速度和扩张状态观测器给出的加速度的估计曲线. 只有加速度发生跳变的瞬间和其后的一段时间,系统的响应才偏离设定值,其余时间都稳定在设定值上. 偏离设定值的原因是加速度发生跳变时扩张状态观测器的 $z_3(t)$ 没能及时跟上跳变而不能即时彻底补偿引起的.

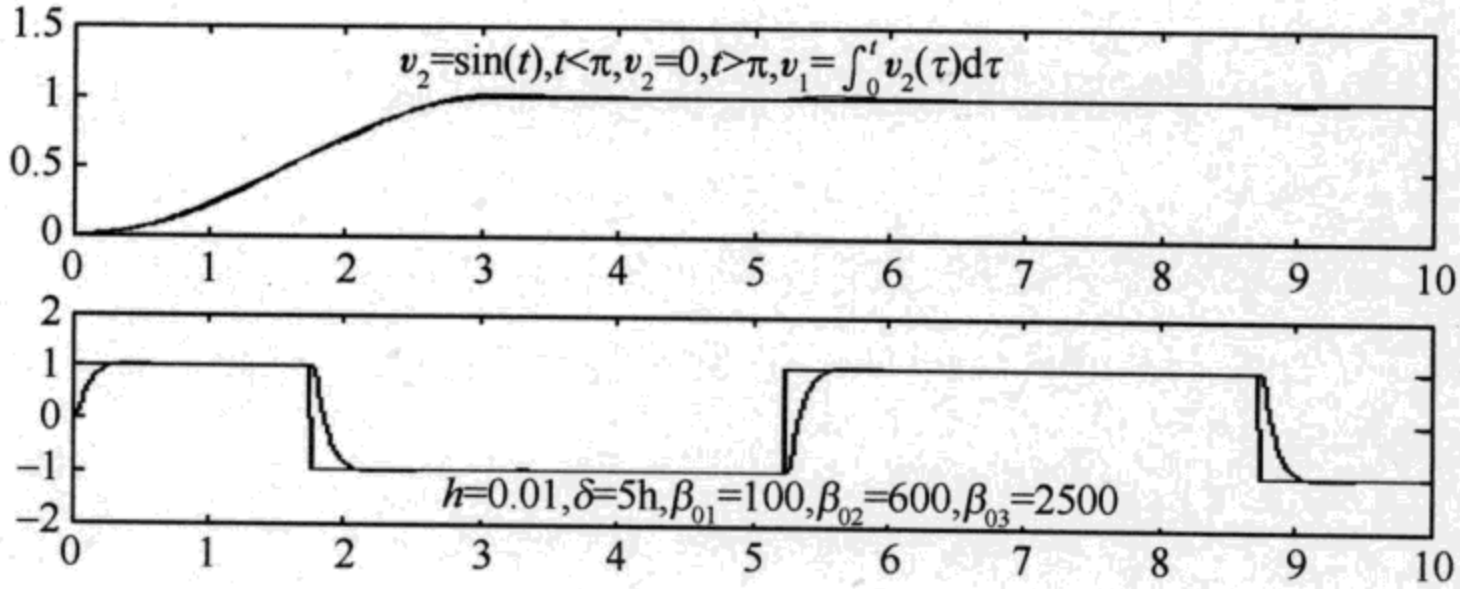


图 4.9.1

假定对象(4.9.1) 为不稳定的非线性时变对象. 其总和扰动假定为

$$f(x_1,x_2,t,w(t)) = \cos(0.7t)x_1^2 + \cos(0.6t)x_2^2 + \mathrm{sign}(\sin(1.3t))$$

照样用前述的扩张状态观测器(4.9.2) 来估计系统的总和扰动,并采用式(4.9.7) 形式的控制量进行仿真的结果如图 4.9.2 所示. 这些仿真结果说明,对于(4.9.4) 形式的补偿和式(4.9.7) 形式的反馈控制来说,开环对象是稳定还是不稳定,线性还是非线性,时变还是时不变,并不是要紧的事,重要的是扩张状态观测器的输出 $z_3(t)$ 能否跟得上对象的总和扰动 $x_3(t) = f(x_1(t),x_2(t),t,w(t))$ 的问题. 只要 $z_3(t)$ 能够跟上 $x_3(t)$,闭环系统的“抗扰” 能力大大增强. 这是扩张状态观测器用于控制系统设计的最大好处.

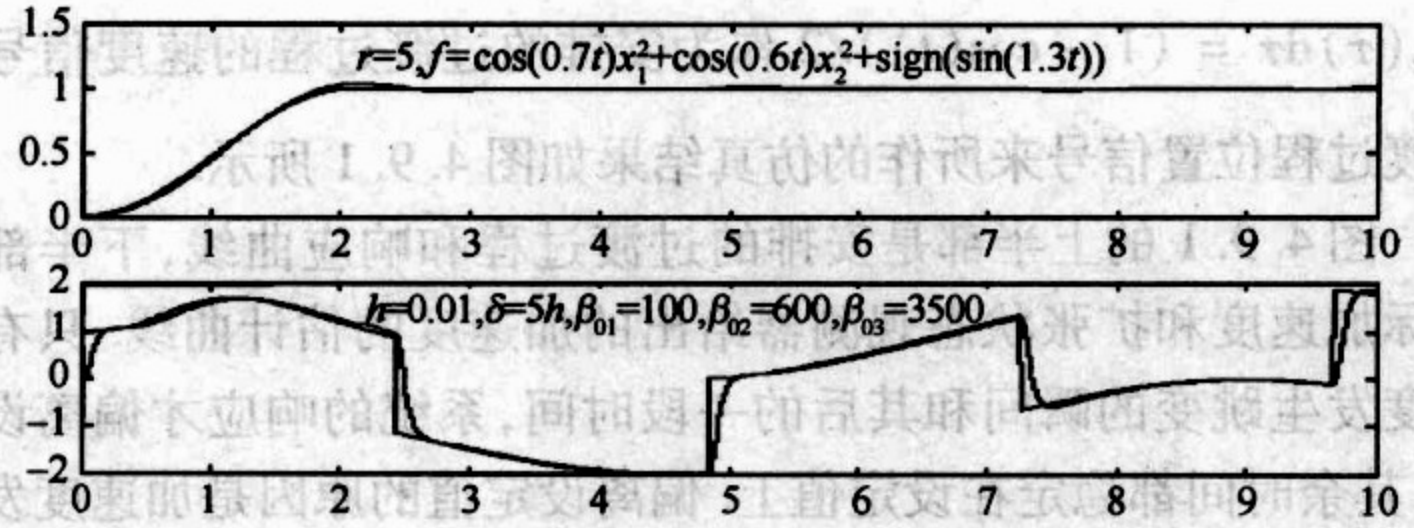

r=5,f=cos(0.7t)x1^2+cos(0.6t)x2^2+sign(sin(1.3t))
h=0.01,δ=5h,β01=100,β02=600,β03=3500

图 4.9.2

第五章　自抗扰控制器

本章将介绍用前几章介绍的跟踪微分器、扩张状态观测器及非线性组合等装置来组装出具有特殊功能的“非线性数字控制器”的方法．本章介绍的主要控制器形式有如下两大类：① 保留经典 PID 的基本框架而改进其局部功能而得的新型“非线性 PID 控制器”形式．它们是对经典 PID 作如下三个方面的改进：安排过渡过程，因此有生成安排的过渡过程的装置；用跟踪微分器来对被控输出提取微分信号，这里就有提取微分信号的装置；由误差的 P、I、D 的适当方式的非线性组合来生成控制量的装置．这三部分装置都有好几种可能的不同选择，因此会有几十种“非线性 PID 控制器”．② 具有扰动估计、补偿能力的自抗扰控制器形式，它们是由四个部分组成：安排过渡过程的装置；提取系统状态信息和扰动总和信息的扩张状态观测器装置；用状态误差信息来产生非线性误差反馈控制量的装置；依据扰动估计值对系统进行扰动补偿而生成最终控制量的补偿装置．在这里的四个部分都有好几种不同的选择，因此也有几十种自抗扰控制器.

本章先分别介绍几种非线性 PID 控制器．然后介绍自抗扰控制器结构及它们对一些典型的非线性、时变对象控制的仿真结果；并讨论控制器设计中“时间尺度”的作用.

5.1　非线性 PID 控制器

5.1.1　经典 PID 控制器的缺陷

先看看经典 PID 控制器结构及它所固有的一些缺陷．经典

PID 是实现“用误差反馈来消除误差”原理的最原始的控制器结构,其框图如图 5.1.1 所示.

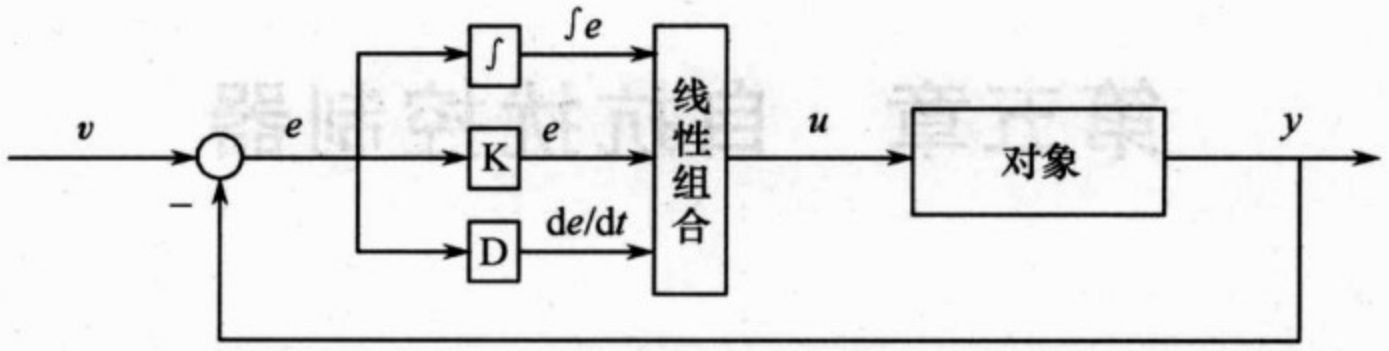


图 5.1.1

这是根据控制目标即设定值 v 与系统被控输出 y 之间的误差 e,这个误差信号的微分信号 $\dot{e}$ 及其积分信号 $\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的加权和来生成驾驭被控对象的控制量 u 的办法,是至今仍在控制工程实践中大量被应用的基本控制器结构. 但是,在大量的控制工程实践中,这种最简单的 PID 控制器结构逐渐显露出其固有的缺陷.

经典 PID 控制器结构的缺陷可归结为如下四个方面:

(1) 对象的被控输出 y 是动态环节的输出,有一定的惯性,其变化不可能跳变. 但是设定值 v 是由系统外部给定的,可以跳变. 直接采用它们之间的误差信息 $e = v - y$ 来消除这个误差,就意味着让不可能跳变的量 y 来跟踪可以跳变的量 v,这是一个不合理的要求.

(2)PID 控制中要用误差的微分信号 $\dot{e}$. 但是过去没有提取微分信号的合理办法和合适装置,因此不能充分发扬误差微分的反馈作用.

(3) 在 PID 中的误差反馈律是误差的现在(P)、过去(I)、将来(变化趋势(D)) 的加权和(线性组合). 显然这些量的线性组合不一定是最合适的组合形式,可以在非线性范围内寻求更合适、更有效率的组合形式.

(4) 大量控制工程实践表明,经典 PID 控制中的误差积分反馈的应用,对抑制常值扰动的作用是显著的,然而常常使闭环系统的反应迟钝、容易产生振荡和控制量饱和等的负作用.

对于这四个方面的缺陷，我们将采用如下四个方面的措施来加以改进：

（1）根据系统所能承受的能力、被控量变化的合理性和系统提供控制力的能力，由设定值 v，先安排合适的过渡过程，这是可以用跟踪微分器或适当的函数发生器来实现．实际上安排过渡过程的手法在某些控制工程实践中已被广泛采用，但是既使在这种场合也不太用安排的过渡过程的微分信号．我们这里安排过渡过程的手续不仅给出过渡过程本身，同时也给出过渡过程的微分信号.

（2）误差的微分信号是可以用噪声放大效应很低的跟踪微分器、状态观测器或扩张状态观测器来提取.

（3）在非线性领域寻找更合适的组合形式来形成误差反馈律.

（4）采用扩张状态观测器实时估计出作用于系统的扰动总和并给予补偿的办法替代误差积分反馈作用．这种扰动估计补偿办法不仅能够抑制常值扰动的影响，而且也能够抑制消除几乎任意形式的扰动影响.

先看看采用前三种办法来改进经典 PID 而得到的各种可能的非线性 PID 控制器结构（图 5.1.2）.

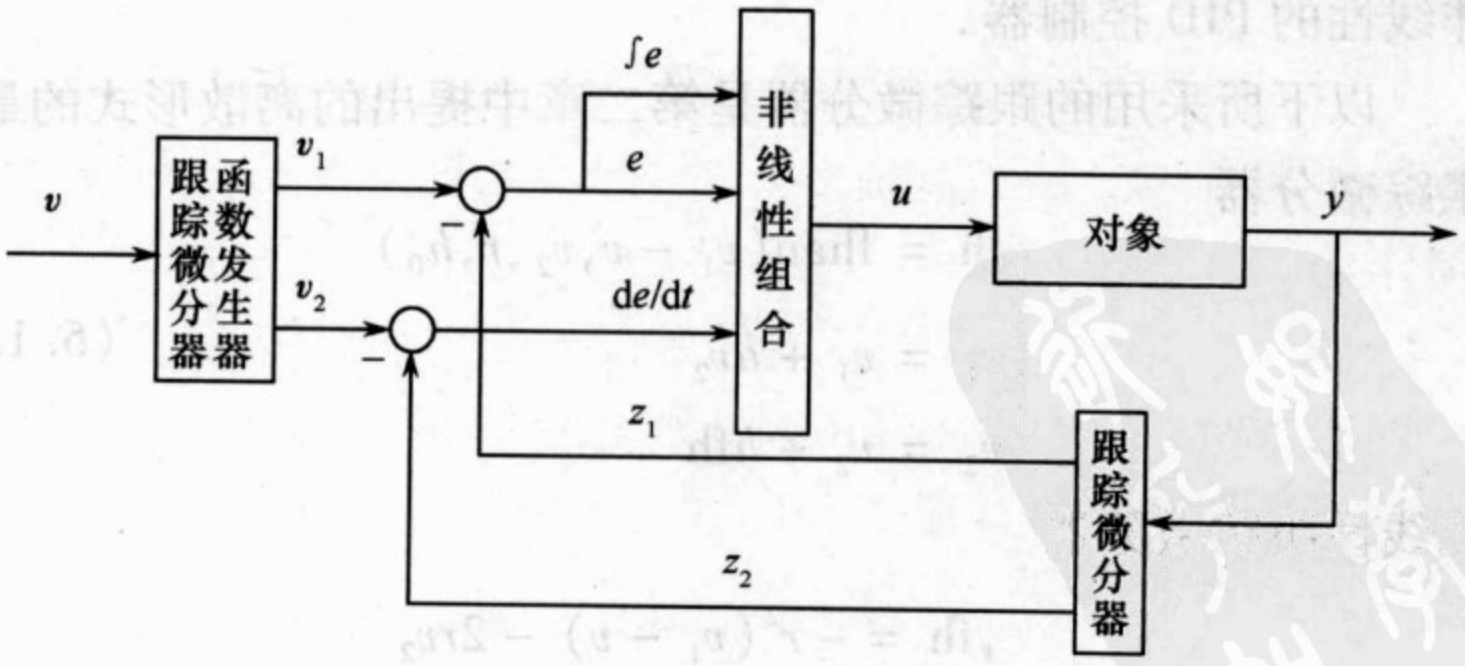


图 5.1.2

图 5.1.2 中，v_1，v_2 分别是安排的“过渡过程”及其“微分信

号”，z_1，z_2 分别是系统输出的跟踪值及其微分信号，因此 e，$\frac{de}{dt}$，$\int_0^t e(\tau)d\tau$ 分别是安排的过渡过程 v_1 与输出信号跟踪值 z_1 之间的误差、安排的过渡过程的微分信号 v_2 与输出信号微分的跟踪值 z_2 之间的误差信号和安排的过渡过程与输出信号跟踪值之间误差的积分信号．这三个量的适当组合来决定控制量 u.

这类控制器是由三个部分结构组合而成的：①“安排过渡过程”的装置；②“提取输出量微分信号”的装置；③“误差及其微分、积分信号的合理组合”来生成误差反馈律的装置．这三个装置都有好几种可能的选择．比如“安排过渡过程”可以用跟踪微分器，也可以用适当的函数发生器．用跟踪微分器可以用线性的或非线性的，还有按经典的办法事先不安排过渡过程等．这样，“安排过渡过程”至少有四种可能的选择；“提取输出微分信号”可以用跟踪微分器，也可以用状态观测器或扩张状态观测器．这两个装置也可以是线性的，也可以是非线性的，这样“提取输出微分信号”至少有六种可能的选择；“误差及其微分、积分信号的合理组合”形式也有线性的或两种非线性形式等至少三种不同的组合形式．这样，我们可以组合出至少 $4 \times 6 \times 3 = 72$ 种改进的线性的或非线性的 PID 控制器．

以下所采用的跟踪微分器是第二章中提出的离散形式的最速跟踪微分器

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - v, v_2, r, h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{5.1.1}$$

或线性跟踪微分器

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = -r^2(v_1 - v) - 2rv_2 \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{5.1.2}$$

也可以用如下状态观测器的形式

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e,\alpha,\delta),0 < \alpha < 1 \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(-\beta_{02}\mathrm{fe}) \end{cases} \tag{5.1.3}$$

或如下扩张状态观测器的形式

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e,0.5,h) \\ \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e,0.25,h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + b_0u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{5.1.4}$$

来提取输出信号 y 的微分信号.

5.1.2 两个跟踪微分器来实现的“非线性 PID”

(1) 根据设定值 v 安排合适的过渡过程.

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - v,v_2,r,h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{5.1.5}$$

选适当的参数 $r,h_0 = h$ 后,按上式给出安排的过渡过程 v_1 和其微分信号 v_2.

(2) 提取系统输出的微分信号. 再把系统的输出 y 送入跟踪微分器

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(z_1 - y,z_2,r_1,h_1) \\ z_1 = z_1 + hz_2 \\ z_2 = z_2 + h\mathrm{fh} \end{cases} \tag{5.1.6}$$

选适当的参数 r_1, h_1 后按上式给出输出信号的跟踪值 z_1 与其微分信号 z_2，即输出信号的近似微分.

(3) 产生误差信号

$$e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5.1.7}$$

(4) 产生误差反馈控制律

$$u = f(e_0, e_1, e_2) \tag{5.1.8}$$

这里，用公式(5.1.5) 来安排的过渡过程是无超调，无振荡地一次到位的过渡过程，其参数 r 与设定值的幅值 v_0，达到设定值的过渡过程时间 T_0 之间有如下关系

$$r\frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{2}\right)^2 = \frac{v_0}{2}, r = 4\left(\frac{v_0}{T_0^2}\right) \tag{5.1.9}$$

如果给了设定值的幅值 v_0，又给定了达到设定值的过渡过程时间 T_0，就可以按公式(5.1.9) 算出参数 r，至于参数 h_0 的选取是看输入信号的噪声情况来决定. 由于安排过渡过程所需的设定值一般没有什么噪声，可以取 $h_0 = h$. 对于跟踪输出信号的公式(5.1.6) 来说，为了尽可能好地提炼输出信号的微分，通常 r_1 取得大一些，但一般的系统输出均含有一定的噪声，因此取适当大的滤波因子 h_1 来加强信号滤波功能是必要的. 最后误差的组合形式 $u = f(e_0, e_1, e_2)$ 中的函数 $f(e_0, e_1, e_2)$ 的选择有很大的自由度：线性的，非线性的，光滑的，非光滑的，看哪一种形式的效率高，易实现且适合被控对象，就采用哪一种.

例 考察如下被控对象跟踪单位阶跃输入的控制效果. 设有被控对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a\mathrm{sign}(\sin(t)) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.1.10}$$

把设定值 $v_0 = 1$ 送入跟踪微分器来得到安排的过渡过程 v_1 及

其微分 v_2,把系统的被控输出 $y = x_1$ 送入另一个跟踪微分器得到跟踪 y 的信号 z_1 及其微分 z_2,即 y 的近似微分,然后取误差信号

$$e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$

最后控制量取成这些误差信号的线性组合

$$u = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

这样控制器的整个算法可以整理成

$$\begin{cases} \mathrm{fh}_0 = \mathrm{fhan}(v_1 - v_0, v_2, r, h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh}_0 \\ \mathrm{fh}_1 = \mathrm{fhan}(z_1 - y, z_2, r_1, h_1) \\ z_1 = z_1 + hz_2 \\ z_2 = z_2 + h\mathrm{fh}_1 \\ e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau \\ u = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases} \tag{5.1.11}$$

然后把这个控制量 u 作用于系统上,所作的仿真结果如图5.1.3和图5.1.4所示.

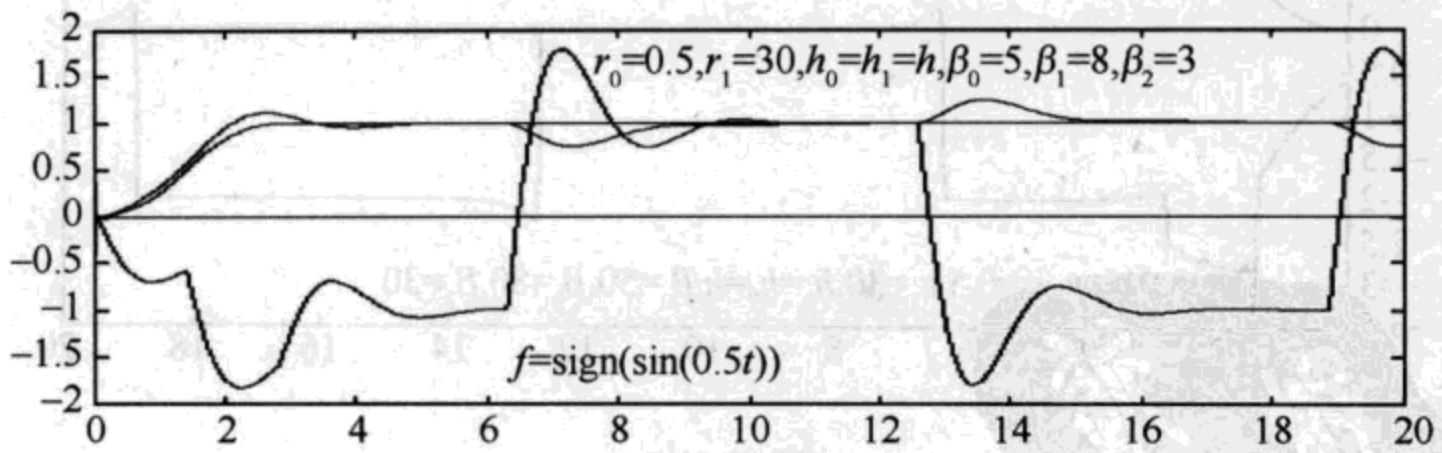


图 5.1.3

在这里,有意思的是这两个仿真(图5.13、图5.14)所用的误差反馈增益 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ 相差 10 倍,但控制效果都很好. 这在经典 PID 结构里是难以做到的.

对开环不稳定的对象

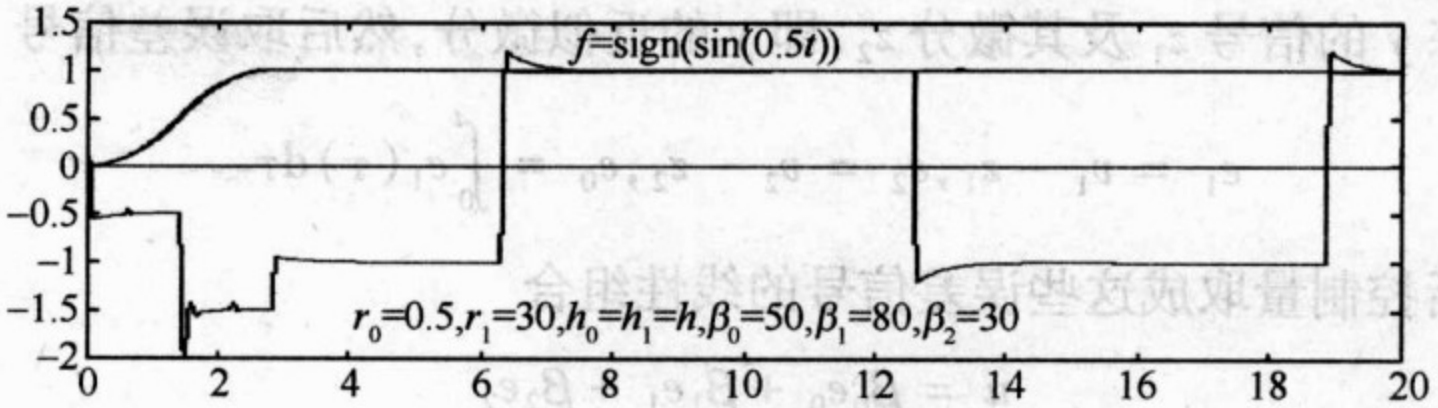


图 5.1.4

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + \operatorname{sign}\left(\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.1.12}$$

按式(5.1.11)算出的控制量 u 来进行控制的结果如图 5.1.5 所示. 在比较强的扰动作用下的不稳定对象也能控制好,这主要是事先安排合适的过渡过程和合理提取微分信号的结果. 在上述计算中参数 r_1 达不到一定程度,或输出的微分信号跟踪的不够好时,控制的效果是不会好的.

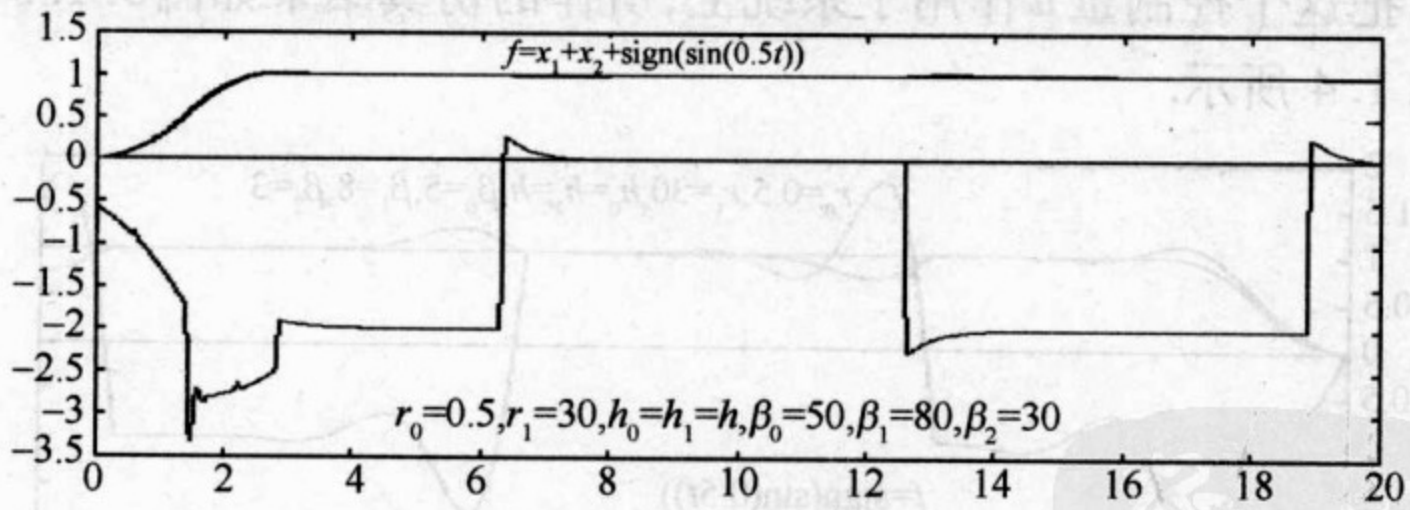


图 5.1.5

5.1.3 两个线性跟踪微分器来改造的“线性 PID”

在算法(5.1.11)中的非线性跟踪微分器改换成线性跟踪微分器来改造上述 PID 算法得

$$
\begin{cases}
\text{fh} = -r_0(r_0(v_1 - v) + \sqrt{3}v_2) \\
v_1 = v_1 + hv_2 \\
v_2 = v_2 + h\text{fh} \\
\text{fh} = -r_1(r_1(z_1 - v) + \sqrt{3}z_2) \\
z_1 = z_1 + hz_2 \\
z_2 = z_2 + h\text{fh} \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
u = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2
\end{cases}
\tag{5.1.13}
$$

现在取参数 $r_0 = 1.0, r_1 = 100$，误差反馈增益取成 $\beta_0 = 30, \beta_1 = 50, \beta_2 = 20$ 时，不稳定对象（5.1.12）的控制效果显示于图5.1.6.

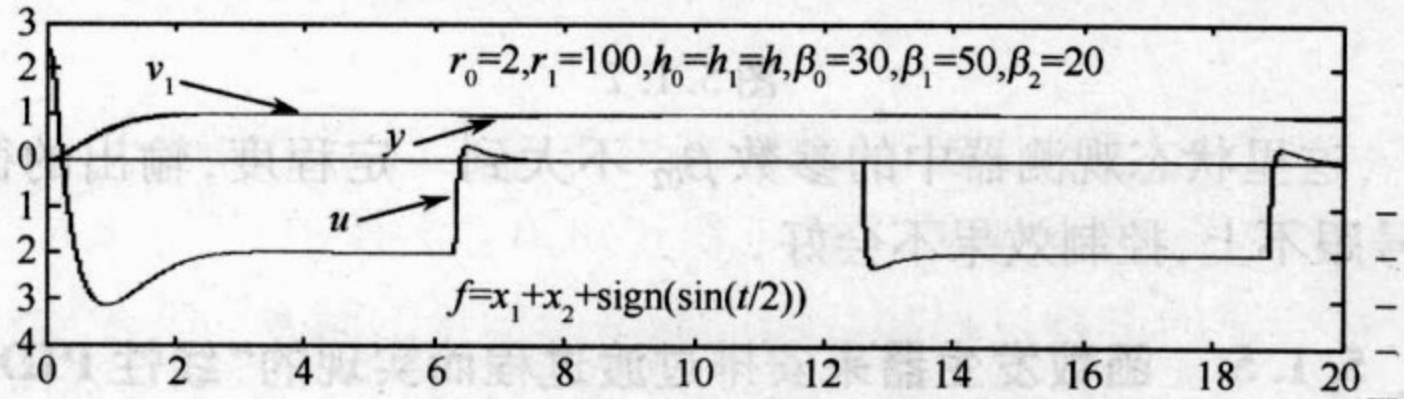


图 5.1.6

5.1.4 一个跟踪微分器和状态观测器实现的“线性 PID”

把上述处理系统输出信号 y 的部分改成状态观测器，得到计算控制量的如下公式：

$$
\begin{cases}
f_0 = -r_0(r_0(v_1 - v) + \sqrt{3}v_2) \\
v_1 = v_1 + hv_2 \\
v_2 = v_2 + hf_0 \\
e = z_1 - y \\
\text{fe} = \text{fal}\left(e, \dfrac{1}{2}, \delta\right) \\
z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\
z_2 = z_2 + h(-\beta_{02}\text{fe}) \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
u = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2
\end{cases}
\tag{5.1.14}
$$

用这个公式算出的控制量 u 来控制非线性对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2^2 + \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.1.15}$$

的仿真结果如图 5.1.7 所示.

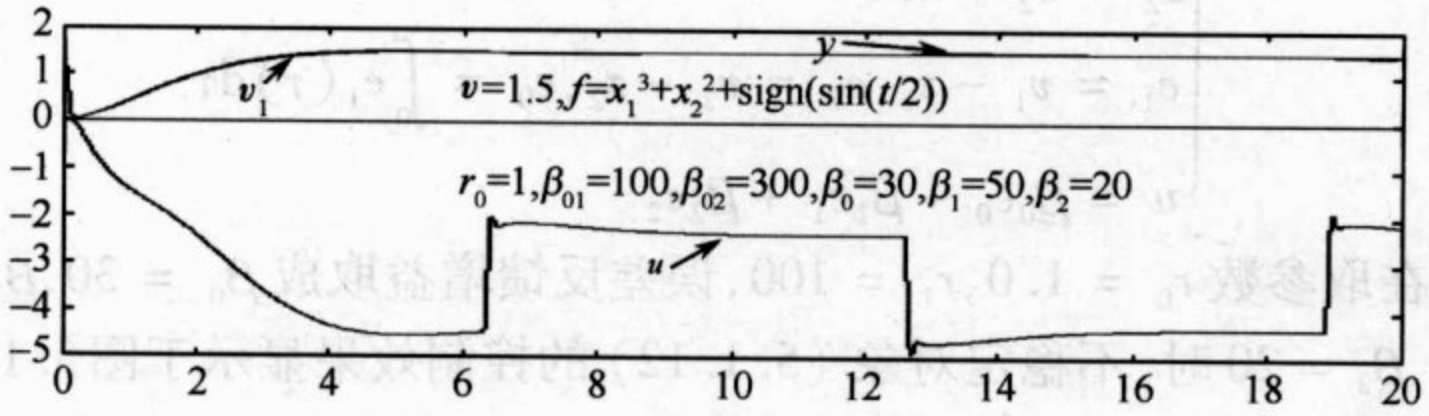


图 5.1.7

这里状态观测器中的参数 β_{02} 不大到一定程度,输出的微分信号跟不上,控制效果不会好.

5.1.5 函数发生器来安排过渡过程而实现的“线性 PID”

用跟踪微分器来安排过渡过程的部分改为用适当的函数发生器来直接安排过渡过程(先给出速度发生器,然后积分此速度函数得安排的过渡过程)得到如下算式

$$\begin{cases} v_2 = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{T_0}t\right)(1 - \operatorname{sign}(t - T_0)) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ e = z_1 - y \\ \mathrm{fe} = \mathrm{fal}\left(e, \frac{1}{2}, \delta\right) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(-\beta_{02}\mathrm{fe}) \\ e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2, e_0 = \int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau \\ u = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases} \tag{5.1.16}$$

从以上仿真结果来看,对经典 PID 结构,单单引入合理“安排过渡过程”和“微分信号提取”这两种手法,已经使 PID 控制器的功能大大提高.

5.1.6 不同误差组合方式所成的“非线性 PID”

在公式(5.1.9)、式(5.1.11)、式(5.1.12)、式(5.1.16)中只改变各误差量的“非线性组合”形式就能得到各种不同形式的非线性 PID 调节器. 我们推荐的可供选择的非线性组合方式为

$$\begin{cases} (1)u = \beta_0 \mathrm{fal}(e_0,\alpha_0,\delta) + \beta_1 \mathrm{fal}(e_1,\alpha_1,\delta) + \beta_2 \mathrm{fal}(e_2,\alpha_2,\delta) \\ \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2, \text{或} 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2 \\ (2)u = \beta_0 e_0 - \mathrm{fhan}(e_1,e_2,r_1,h_1) \\ (3)u = -\mathrm{fhan}(e_1,ce_2,r_2,h_2) \end{cases} \tag{5.1.17}$$

在(1)的组合方式中,参数 α_i,δ 事先可以确定,如:

$$\alpha_0 = -0.6,\alpha_1 = 0.6,\alpha_2 = 1.2 \text{ 或}$$

$$\alpha_0 = 0.25,\alpha_1 = 0.75,\alpha_2 = 1.5,\delta = h \text{ 或 } \delta = kh$$

这样,可调参数只有各误差的反馈增益 β_0,β_1,β_2 三个了;在(2)的组合方式中,可调参数也有三个:β_0,r_1,h_1;而(3)的组合方式中也是有三个可调参数 r_2,h_2,c. 总而言之,在上述三种不同的非线性组合形式,就像经典 PID 一样,可调参数只有三个 β_0,β_1,β_2,或 β_0,r_1,h_1,或 r_2,h_2,c.

例 我们考察用上述方法控制系统(5.1.10)时的阶跃响应. 这里状态误差量的非线性组合分别采用前述三种方法之一.

(1)采用非线性组合

$$u = \beta_0 \mathrm{fal}(e_0,\alpha_0,\delta) + \beta_1 \mathrm{fal}(e_1,\alpha_1,\delta) + \beta_2 \mathrm{fal}(e_2,\alpha_2,\delta)$$

时,先确定 $\alpha_0 = \frac{1}{4},\alpha_1 = \frac{3}{4},\alpha_2 = \frac{3}{2},\delta = 2h,h = 0.01$,然后调整出 β_0,β_1,β_2,得

$$\beta_0 = 10, \beta_1 = 5, \beta_2 = 100$$

用这组参数所作的仿真结果如图 5.1.8 所示.

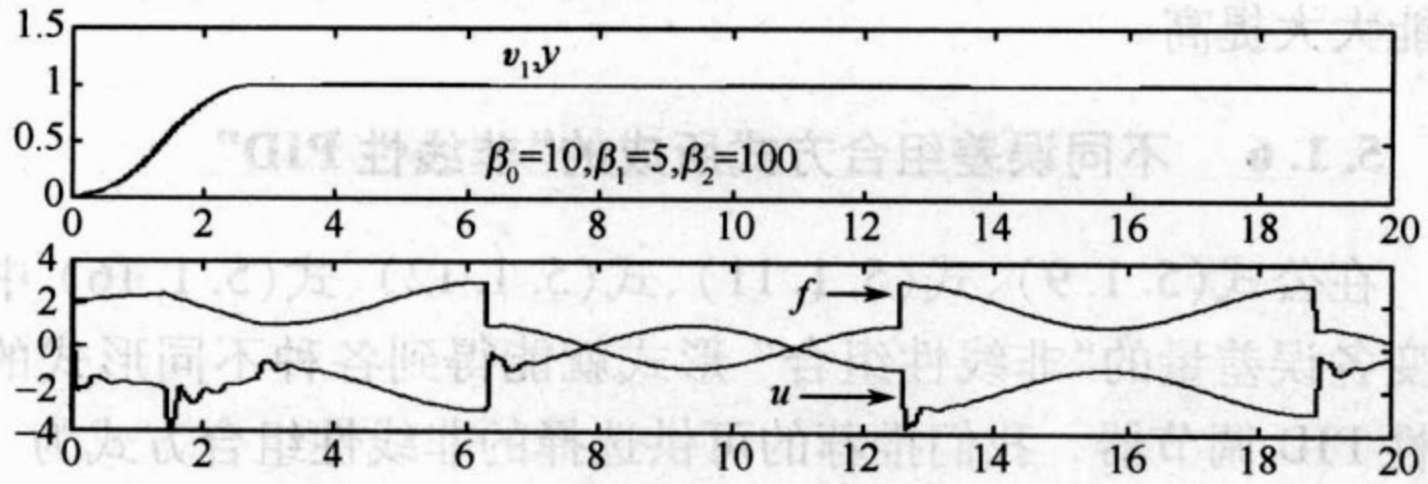


图 5.1.8

(2) 采用非线性组合

$$u = \beta_0 e_0 - \text{fhan}(e_1, e_2, r_1, h_1)$$

时,调整出参数 β_0, r_1, h_1,得

$$\beta_0 = 500, r_2 = 20, h_2 = 0.08$$

对应的仿真结果如图 5.1.9 所示.

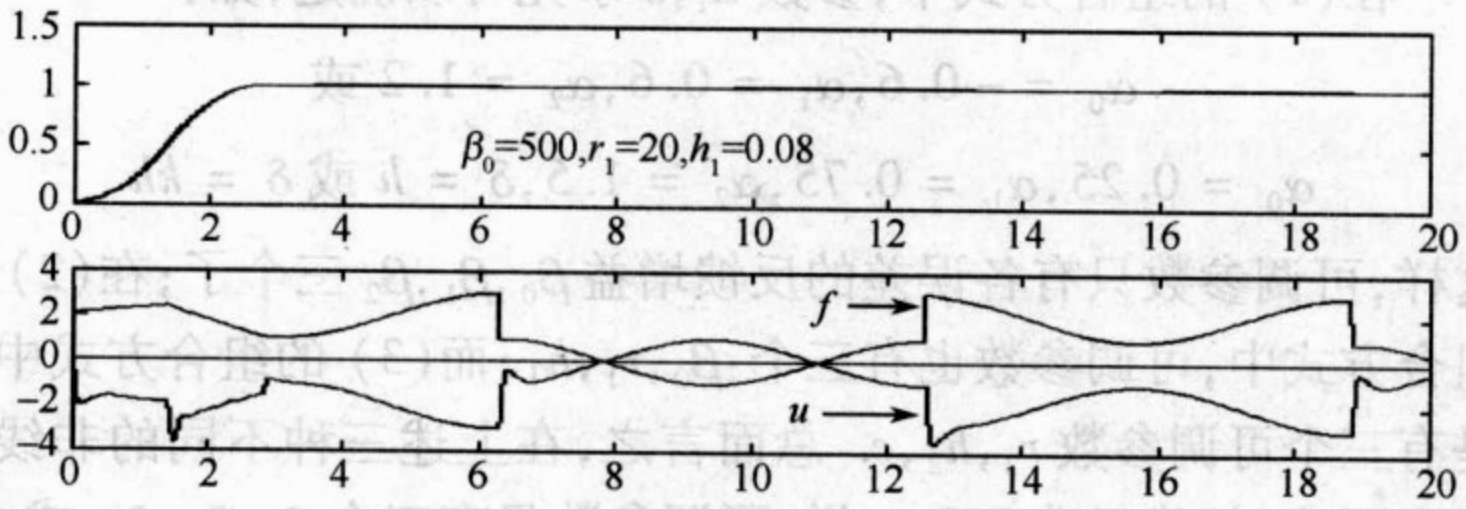


图 5.1.9

(3) 采用非线性组合

$$u = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r_2, h_2)$$

时,调整出参数 c, r_2, h_2,得

$$c = 1, r_2 = 30, h_2 = 0.08$$

对应的仿真结果如图 5.1.10 所示.

在第三个组合方式中没有用到误差积分信息. 说明即使在经典 PID 框架中适当采用非线性组合也是可以不用误差积分反馈

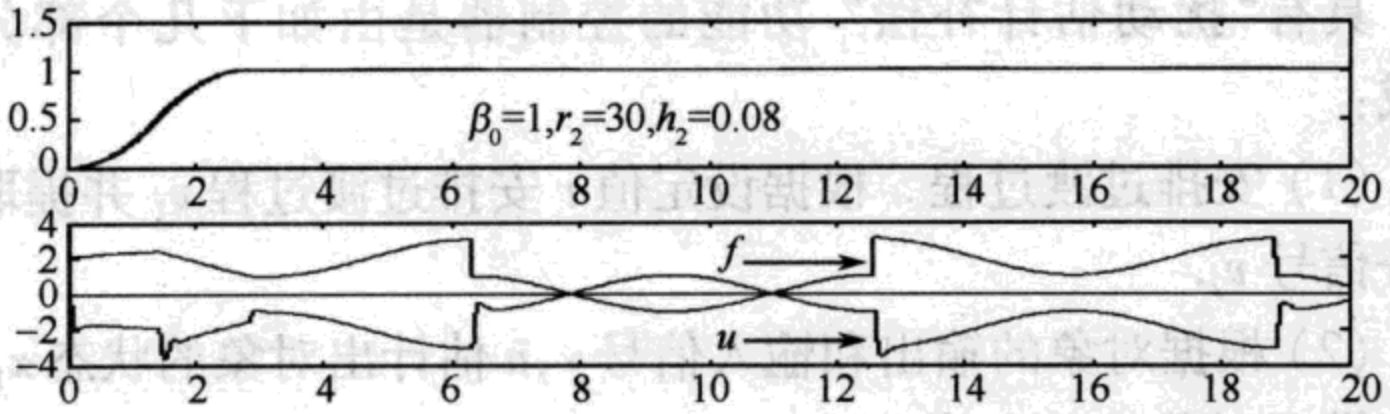


图 5.1.10

的,从而可以避免误差积分反馈的副作用.

以上讨论的是保留经典 PID 原始框架,采用安排过渡过程、合理提取微分信号及合适的组合方式来改造出新型 PID 控制器的基本办法.

这些控制器的信息流的基本框架如图 5.1.11 所示.

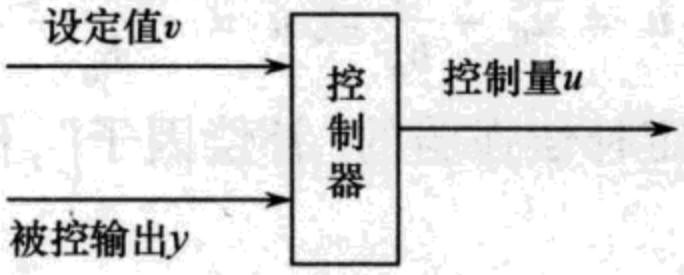


图 5.1.11

上述控制器都是以系统设定值与系统被控输出为其输入、输出控制量的装置.

下一节将介绍具有“自抗扰”能力的全新的实用控制器——各种“自抗扰控制器”.

5.2 自抗扰控制器

前一节讨论的是对经典 PID 框架中引入“安排过渡过程”和合理“提取微分信号”的手法及采用误差信号的“适当组合方式”来改善控制器功能和闭环系统品质的问题. 本节将讨论用“扩张状态观测器”对扰动进行实时估计与补偿来构造出具有“自抗扰功能”的新型实用控制器的办法,并考察它们对闭环系统品质的影响.

具有“扰动估计补偿”功能的控制器是由如下几个部分所组成：

(1) 安排过渡过程. 根据设定值 v 安排过渡过程 v_1 并提取其微分信号 v_2.

(2) 根据对象的输出和输入信号 y,u 估计出对象的状态 x_1,x_2 和作用于对象的总和扰动 x_3.

(3) 状态误差的非线性反馈律. 系统的状态误差是指 $e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2$, 误差反馈律是根据误差 e_1,e_2 来决定的控制纯积分器串联型对象的控制规律 u_0.

(4) 对误差反馈控制量 u_0 用扰动估计值 z_3 的补偿来决定最终控制量.

$$u = u_0 - \frac{z_3}{b_0} \text{ 或 } u = \frac{u_0 - z_3}{b_0}$$

这里, 参数 b_0 是决定补偿强弱的“补偿因子”, 作为可调参数来用(图 5.2.1).

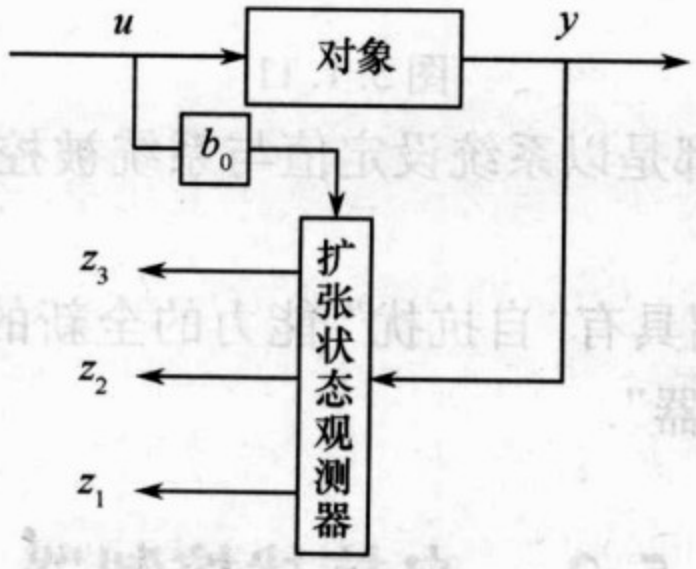


图 5.2.1

下面主要考察如下形式的误差反馈律

$$\begin{aligned}
&(1)\, u_0 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \\
&(2)\, u_0 = \beta_1 \mathrm{fal}(e_1,\alpha_1,\delta) + \beta_2 \mathrm{fal}(e_2,\alpha_2,\delta), 0 < \alpha_1 < 1 < \alpha_2 \\
&(3)\, u_0 = -\mathrm{fhan}(e_1,e_2,r,h_1) \\
&(4)\, u_0 = -\mathrm{fhan}(e_1,ce_2e_2,r,h_1)
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

其中，函数fal，函数fhan的形式已在前面给出过．当然还可以用其他形式的非线性组合．

由以上过渡过程的安排，扩张状态观测器，状态误差的反馈形式，扰动估计的补偿四个部分组合而成的控制器称为自抗扰控制器．自抗扰特性指的是实时估计扰动的功能及补偿的功能．扰动的估计补偿能力就是抗干扰功能．这个功能是自抗扰控制器的最本质的功能，因此具有这两个功能的控制器都可以称作自抗扰控制器．实际上，在这两个功能中最重要的还是“实时跟踪估计扰动”的功能．有了实时跟踪估计的结果才有可能进行补偿．

实时跟踪估计扰动可以有各种不同的具体办法，但对控制器设计中引入“实时跟踪估计扰动环节”本身有很重要的意义．某种意义上讲，控制器设计问题其本质就是采用什么样的措施来抑制各种扰动作用的问题．由于反馈本身具有抑制扰动的一定能力，在系统设计中，很多人致力于加强反馈的扰动抑制能力上下功夫来间接地改善控制器性能，所谓灵敏度分析方法的主要研究目的就在于此．

直接处理扰动来抑制其影响，历史上曾出现过两种办法：①苏联学者希巴诺夫在20世纪40年代提出的“绝对不变性原理”；②加拿大学者代维申和温纳模在20世纪年代提出的“内模原理”．它们都是直接认知扰动作用为基础的办法，如“绝对不变性原理”要求能直接测量外扰作用．设计控制器时必须遵守同时含有反馈稳定通道和扰动补偿通道的“双通道原理”．控制器设计中常用的前馈补偿办法就来源于此．“内模原理”则要求事先知道外扰作用的“模型”．设计控制器时必须要把扰动模型嵌入到控制器中．把积分反馈嵌入控制器中来消除常值扰动作用是内模原理的具体体现．但是这里引入的“实时跟踪估计扰动”的“扩张状态观测器”办法却是不用事先知道关于扰动本身的任何先验知识，只要其作用能够影响系统输出且其作用范围是有限的，就可以用扩张状态观测器来实时跟踪估计其作用，从而可以用补偿的办法消除其影响．

关于扰动抑制问题,如果作用于系统的某一种扰动影响不了系统被控输出,那么对被控输出的控制来说,这种扰动是用不着去抑制的,需要抑制的是能够影响被控输出的扰动作用,即能影响被控输出的扰动,或由被控输出能观的那种扰动. 由于从被控输出能观,在被控输出信号中必定包含关于扰动的信息,因此必能从被控输出提炼出系统的扰动作用. 这就是"扩张状态观测器"能够实时估计系统扰动作用的根本机理.

具有扰动跟踪补偿能力的自抗扰控制器的完整的算法为:

(1) 以设定值 v_0 为输入,安排过渡过程

$$\begin{cases} e = v_1 - v_0 \\ \text{fh} = \text{fhan}(e, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \end{cases} \tag{5.2.2}$$

(2) 以系统输出 y 和输入 u 来跟踪估计系统状态和扰动

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, \delta), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, \delta) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\text{fe} + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \end{cases} \tag{5.2.3}$$

式中,$\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$ 为一组参数.

(3) 状态误差反馈律

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u_0 = k(e_1, e_2, p) \end{cases} \tag{5.2.4}$$

式中,p 为一组参数.

(4) 扰动补偿过程

$$u = u_0 - \frac{z_3(t)}{b_0} \text{ 或 } u = \frac{u_0 - z_3(t)}{b_0} \tag{5.2.5}$$

自抗扰控制器的结构图为图 5.2.2.

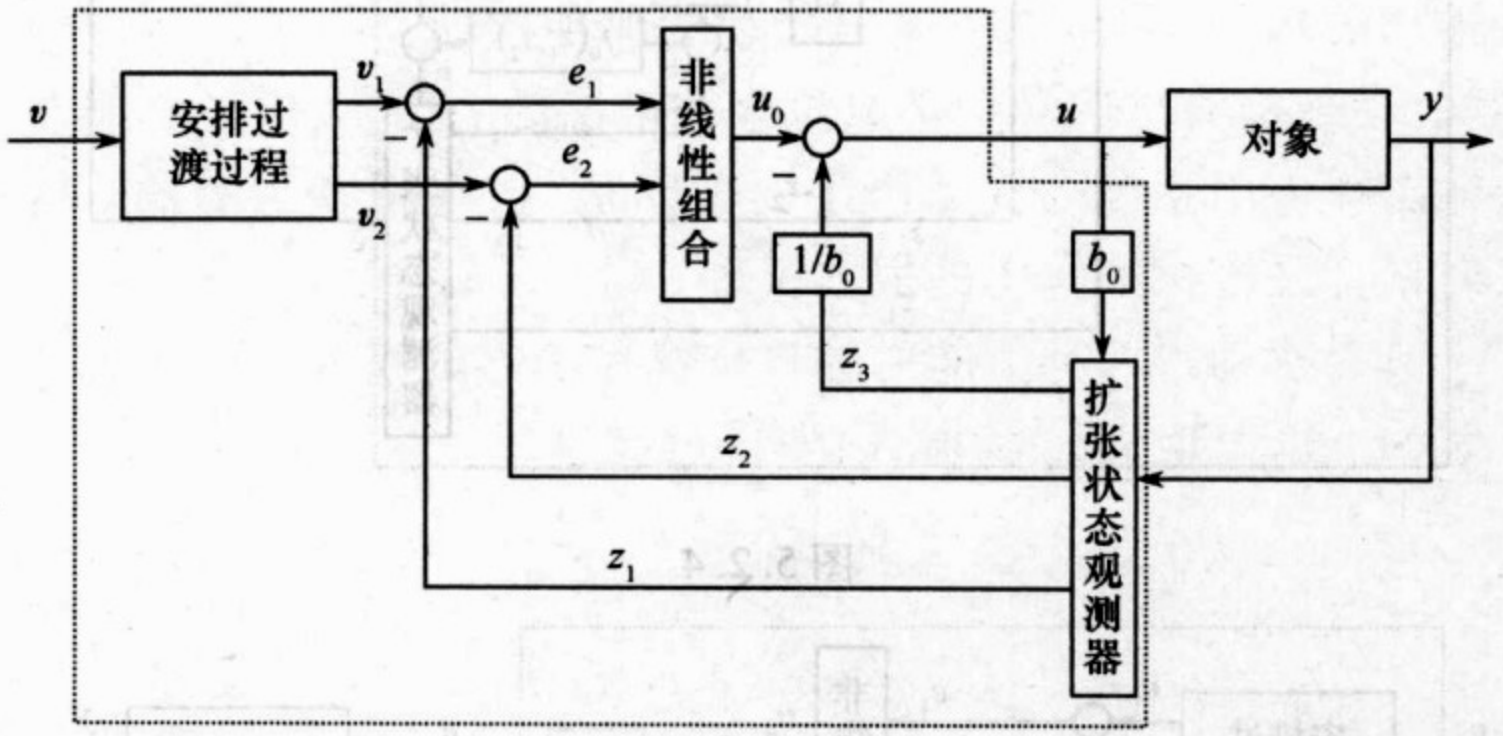


图 5.2.2

或者稍加改动上述框图,得图 5.2.3.

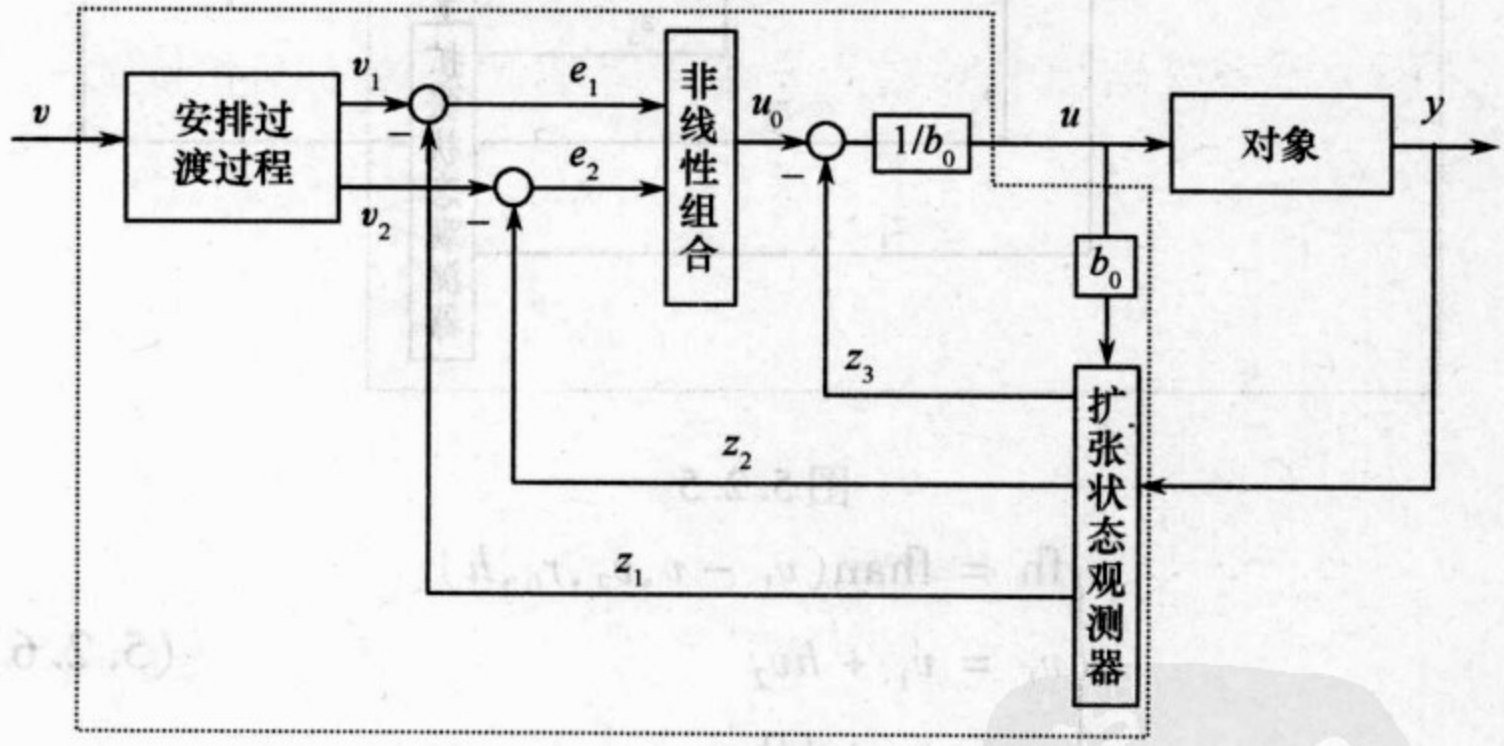


图 5.2.3

在图 5.2.3 中点线所框的部分为自抗扰控制器. 如果作用于对象的加速度中有已建模的确知部分 $f_0(x_1, x_2)$,那么扩张状态观测器中放入 $f_0(z_1, z_2)$,然后对结构图里补充一个函数 $f_0(z_1, z_2)$ 的发生器成图 5.2.4(或图 5.2.5) 形式.

相应的算法为

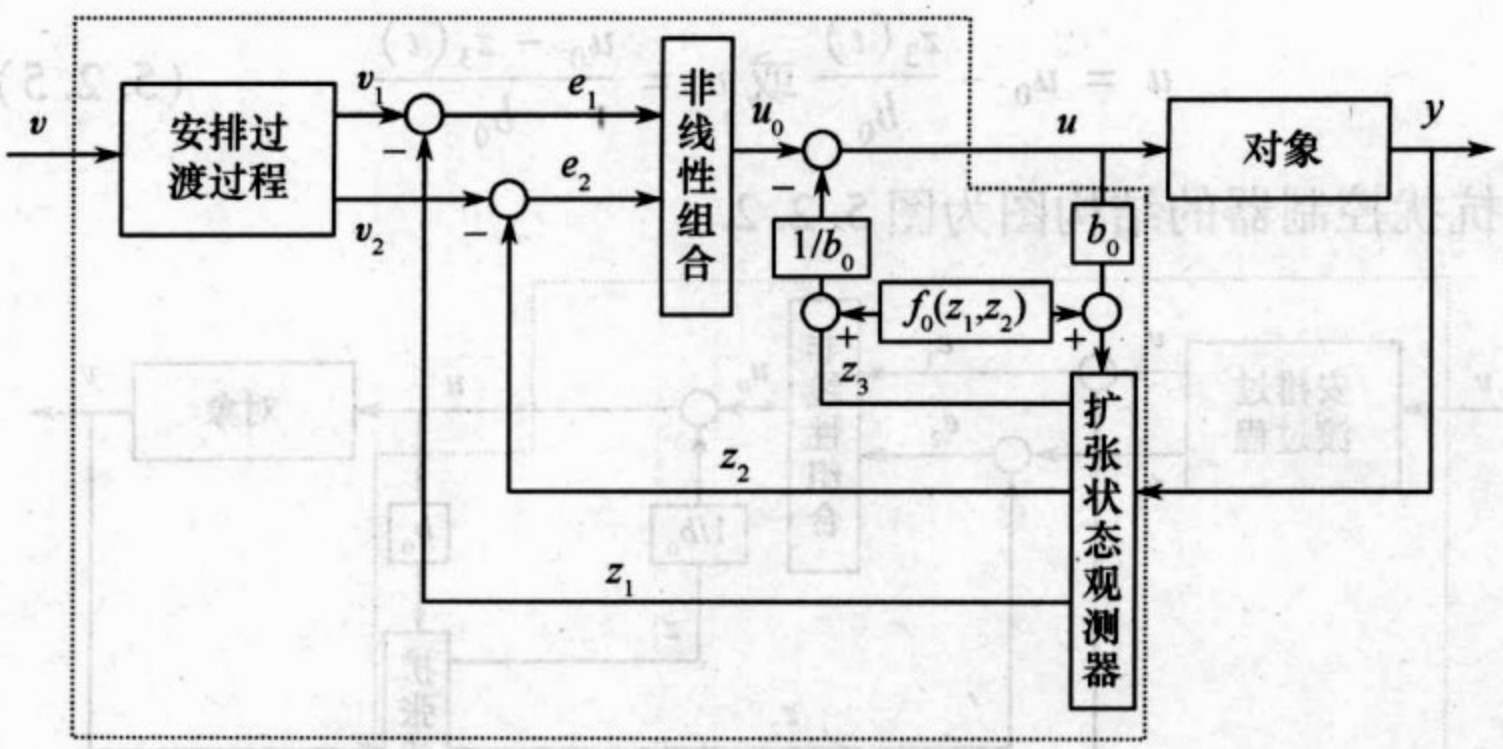


图 5.2.4

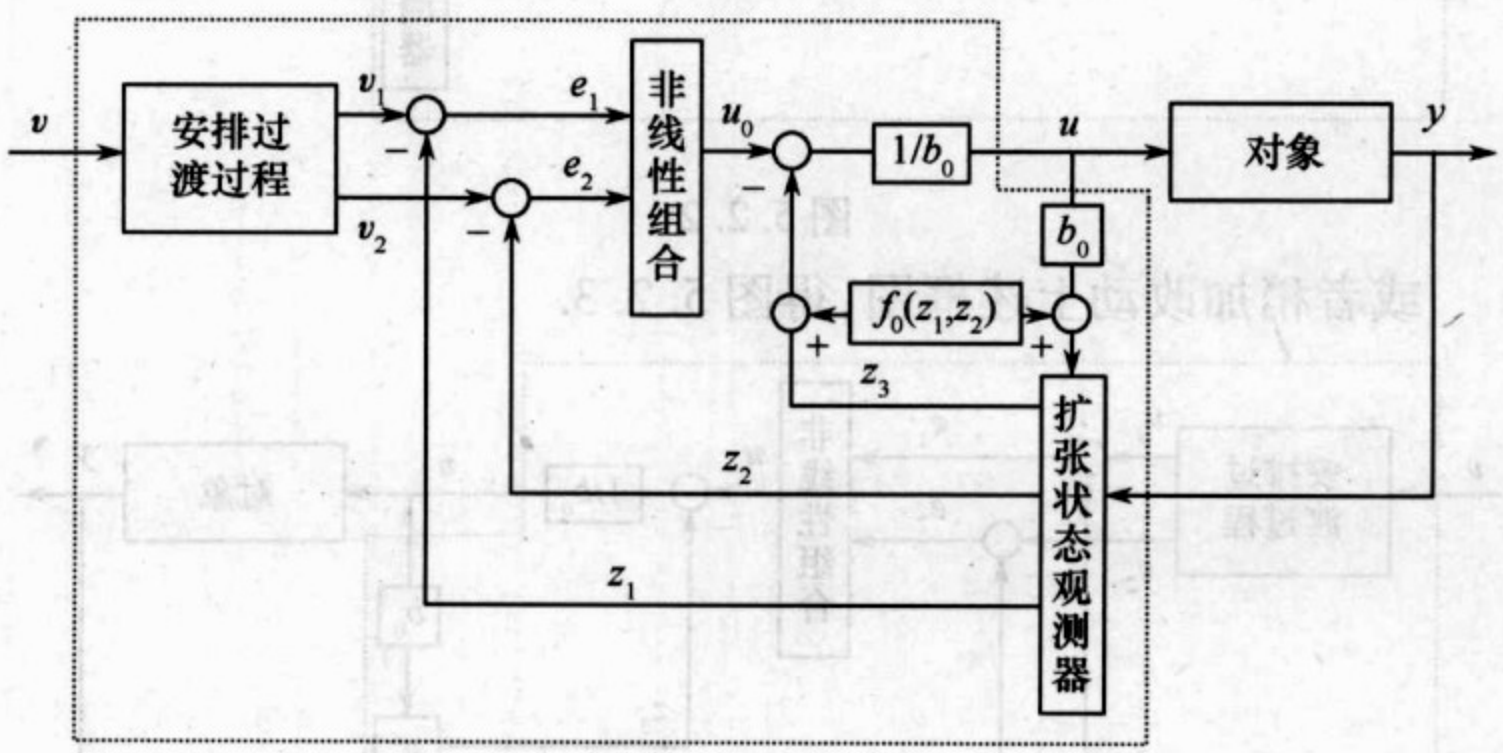


图 5.2.5

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \end{cases} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(f_0(z_1, z_2) + z_3 - \beta_{01}\text{fe} + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \end{cases} \tag{5.2.7}$$

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u_0 = k(e_1, e_2, p) \end{cases}$$

$$u = u_0 - \frac{f_0(z_1, z_2) + z_3(t)}{b_0} \tag{5.2.8}$$

或

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \end{cases} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(f_0(z_1, z_2) + z_3 - \beta_{01}\text{fe} + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \end{cases} \tag{5.2.10}$$

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u_0 = k(e_1, e_2, p) \end{cases}$$

$$u = \frac{u_0 - f_0(z_1, z_2) - z_3(t)}{b_0} \tag{5.2.11}$$

式中，p 为一组参数．函数 $k(e_1, e_2, p)$ 的具体形式，除式(5.2.1)给出的形式外，还可以有各种不同的取法．

这些自抗扰控制器信息流的基本框架如图 5.2.6 所示.

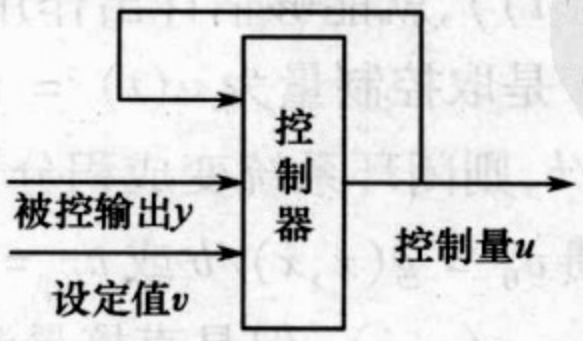


图 5.2.6

自抗扰控制器是以系统设定值 v、系统被控输出 y 和上一步算

出的控制量为其输入确定出新的控制量 u 的装置. 这里和上一节的信息流框图图 5.1.11 不同的是多了一个控制量的返回通道,正是这个通道的增添才有可能实现控制器的“自抗扰”能力.

5.3 动态补偿线性化

以二阶控制系统为例说明“动态补偿线性化”的基本思想.

设有控制系统

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},w(t)) + bu, b \neq 0 \tag{5.3.1}$$

我们希望闭环的行为具有如下动态特性

$$\ddot{x} = g(x,\dot{x}) \tag{5.3.2}$$

那么当函数 $f(x,\dot{x},w(t))$ 已知时,在控制量 u 中补偿 $f(x,\dot{x},w(t))$,把控制量取成 $u = u_0 - f(x,\dot{x},w(t))/b$,使系统变成积分器串联型 $\ddot{x} = bu_0$;如果取成 $u = (u_0 - f(x,\dot{x},w,t))/b$,那么系统变成 $\ddot{x} = u_0$. 然后对积分器串联型系统再实施状态反馈 $u_0 = g(x,\dot{x})/b$ 或取成 $u_0 = g(x,\dot{x})$,那么闭环最后变成期望的动态系统 $\ddot{x} = g(x,\dot{x})$. 在第三章中已论述过这种“直接反馈线性化”的基本思想.

但是当函数 $f(x,\dot{x},w(t),t)$ 未知时,又如何去实现闭环的期望动态特性?这是反馈系统设计要解决的基本问题.

假如有很好的加速度表能够获取在已知控制量 $u(t)$ 的作用之下变量 $x(t)$ 的二阶导数 $\ddot{x}(t) = a(t)$,那么就有 $a(t) - bu(t) \approx f(x(t),\dot{x}(t),w(t))$,就能够估计出作用于系统的除控制量之外的加速度部分,于是取控制量为 $u(t) = u_0 - a(t)/b$,或取为 $u(t) = (u_0 - a(t))/b$,则闭环系统变成积分器串联型 $\ddot{x} = bu_0$ 或 $\ddot{x} = u_0$,然后再取反馈 $u_0 = g(x,\dot{x})/b$ 或 $u_0 = g(x,\dot{x})$ 使闭环系统变成所期望的动态 $\ddot{x} = g(x,\dot{x})$. 但是直接量测出输出的二阶导数是件很困难的事情,除特殊情形之外一般无法采用这种方法.

但是根据信号 $u(t),x(t)$ 如果有办法能够估计出作用于系统

的加速度的实时作用量 $a(t) = f(x(t),\dot{x}(t),w(t))$，那么在控制量中实时“补偿”这个加速度的实时作用量，即取 $u(t) = u_0 - a(t)$，然后取反馈 $u_0 = g(x,\dot{x})$，就得所期望的闭环动态

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},w(t)) + g(x,\dot{x}) - a(t) = g(x,\dot{x}) \tag{5.3.3}$$

我们就是根据系统的输入 - 输出信号 $u(t)$ 和 $y(t) = x(t)$，利用特殊的非线性效应，有成效地实时估计出作用于系统的全部加速度（已建模的动态、未建模动态及未知外扰的总和的）作用 $a(t) = f(x(t),\dot{x}(t),w(t))$. 因而对系统进行加速度 $a(t)$ 的估计值 $z_3(t)$ 的补偿，即取 $u = u_0 - z_3/b$，或 $u = (u_0 - z_3)/b$，使系统变成

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},w(t)) + u = a(t) + b(u_0 - z_3/b) \approx bu_0 \text{ 或 } \ddot{x} = u_0 \tag{5.3.4}$$

即系统变成“线性积分器串联型”系统

$$\ddot{x} \approx bu_0, \text{或 } \ddot{x} \approx u_0 \tag{5.3.5}$$

利用扩张状态观测器进行实时估计补偿扰动作用，把原系统补偿成线性积分器串联型的过程叫做动态补偿线性化. 这样把系统化成线性积分器串联型之后就可以用一般的误差反馈办法再行设计（可以用线性误差反馈，也可以用效率更高的非线性误差反馈），使闭环具有满意的性能.

把非线性系统化为线性系统的办法，有经典的“状态反馈线性化”和所谓的“逆系统”方法，然而这些方法都要求对象模型为已知或能够辨识的假定为前提的. 但是确定系统模型是件很困难的事情，能够辨识确定的模型也是很有限的. 但上述动态补偿线性化办法不需要对象模型的任何先验知识（知道了更好，使扩张状态观测器的负担更轻，扰动估计更为精确）. 因此不能不说“动态补偿线性化”方法是对“反馈线性化”方法的根本性突破.

5.4 自抗扰控制器的仿真研究

用上面给出的自抗扰控制器算法对如下对象进行仿真研究.

对象形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + w(t) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.4.1}$$

式中,参数 b 假定已知 $b = 1.0$.

要采用的 ADRC 具体算法为

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v_0, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \quad \text{安排过渡过程,} \\ e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\text{fe} + u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \text{ 估计状态和扰动,} \\ e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u_0 = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) \quad \text{误差反馈,} \\ u = u_0 - z_3 \quad \text{扰动补偿,} \end{cases} \tag{5.4.2}$$

这里涉及两个非线性函数 $\text{fhan}(x_1, x_2, r, h)$ 和 $\text{fal}(x, \alpha, d)$,其定义已在前面给出.

假定作用于对象(5.4.1) 的未知加速度 $f(x_1, x_2, t)$ 有如下 10 种不同形式:

(1) $f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) x_1 + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) x_2 + \omega(t)$

(2) $f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) | x_1 | x_1 + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) | x_2 | x_2 + \omega(t)$

(3) $f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 (\cos(\omega_1 t) | x_1 | - 1) x_1 + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) x_2 + \omega(t)$

(4) $f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) x_1 + \gamma_2 \cos(\omega_2 t)(3 - x_1^2) x_2 + \omega(t)$

(5) $f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) \text{sign}(x_1) \sqrt{| x_1 |} + \gamma_2 \cos(\omega_2 t)$
$\text{sign}(x_2) \sqrt{| x_2 |} + \omega(t)$

$$(6) f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) |x_1|^{0.6} + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) |x_2|^{0.2} + \omega(t)$$

$$(7) f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \operatorname{sign}(x_1 + \gamma_2 \operatorname{sign}(x_2)) + \omega(t)$$

$$(8) f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) \frac{1}{1 + x_1^2} + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) x_1 |x_2| + \omega(t)$$

$$(9) f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) \frac{1}{(1 + |x_1|)^2} + \gamma_2 \exp\left(\cos(\omega_2 t) \frac{1 + |x_1|}{10}\right) + \omega(t)$$

$$(10) f(x_1, x_2, t) = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) \lg(1 + |x_1|) + \gamma_2 \cos(\omega_2 t) \lg(1 + |x_2|) + \omega(t)$$

而所加的外扰为 $w(t) = 0.5\operatorname{sign}(\sin(\omega t))$.

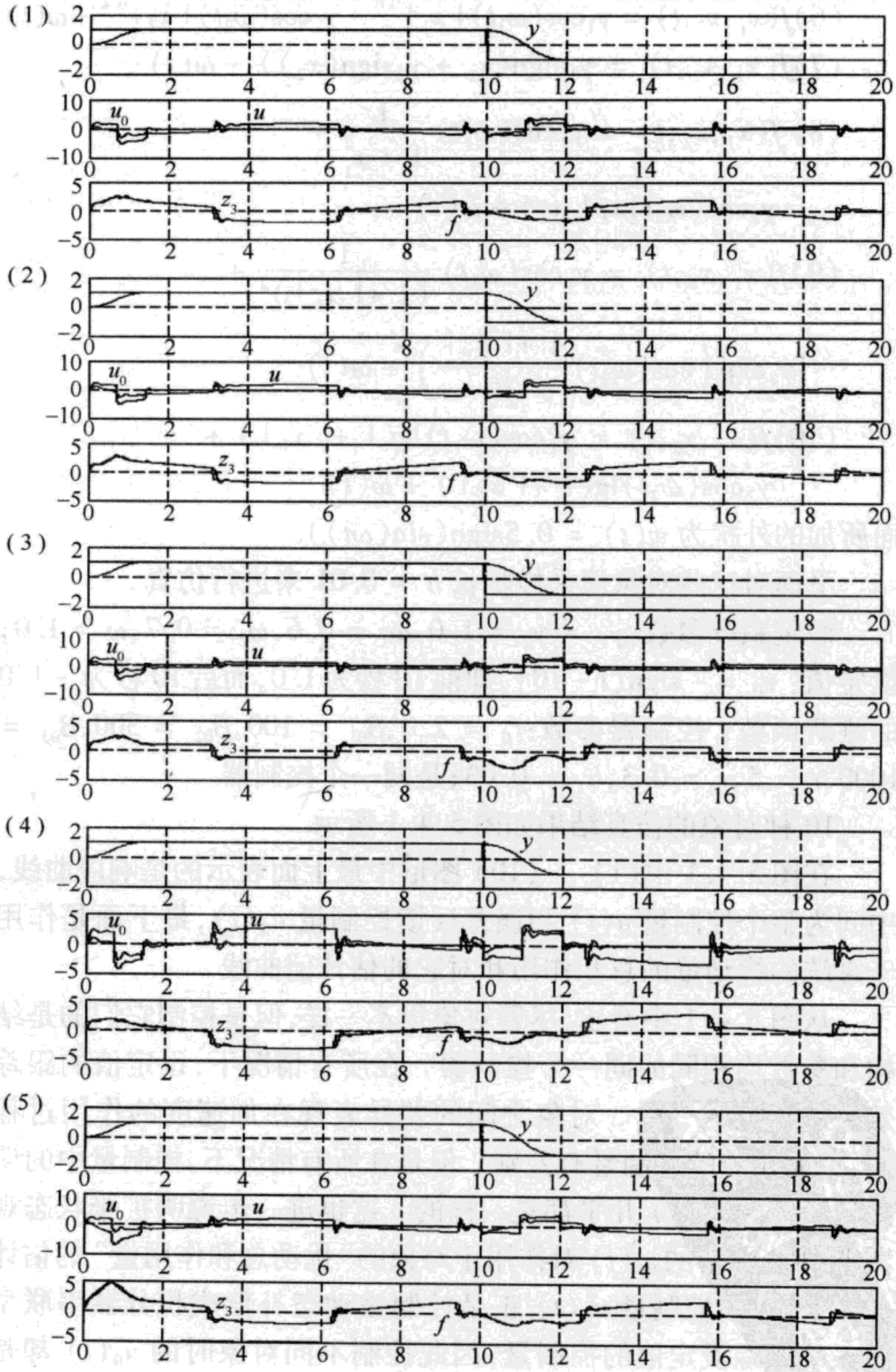
下面对这些对象用采样步长 $h = 0.01$ 来进行仿真.

假定系统参数:$\gamma_1 = \gamma_2 = 1.0, \omega_1 = 0.6, \omega_2 = 0.7, \omega = 1.0$;设定值:$v_0 = -\operatorname{sign}(t - 10)$,即前10秒为1.0,而后10秒为 -1.0 的跳跃函数;控制器参数:$r_0 = 2.0, \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000, r = 5, c = 0.3, h_1 = 0.03$;是同一个控制器.

10种对象的仿真结果如图5.4.1所示.

在图5.4.1中(1) ~ (10)图形中最上面表示的是响应曲线,中间为整个控制量 $u(t)$ 和误差反馈控制量 $u_0(t)$,最下面是作用于系统的扰动量的总和作用和对它的估计值曲线.

从图5.4.1中看出,尽管对象很不一样,但是控制它们的是结构和参数均相同的同一个控制器. 在所有情况下,设定值的跟踪效果几乎完全一样. 对象之间的差异表现在加速度的作用过程上,因而相应的控制量有差别. 但是在所有情况下,控制量中的误差反馈部分 $u_0(t)$ 几乎都是一样的. 这也进一步说明扩张状态观测器(ESO)中的 $z_3(t)$ 对作用于对象的"扰动总和作用量"的估计是很好的,而控制量 $u_0(t)$ 正是控制被动态补偿成积分器串联型的系统跟踪设定值的控制量,因此控制不同对象时的 $u_0(t)$ 却是几乎都一样.


(1)
y
u_0
u
z_3
f
(2)
y
u_0
u
z_3
f
(3)
y
u_0
u
z_3
f
(4)
y
u_0
u
z_3
f
(5)
y
u_0
u
z_3
f

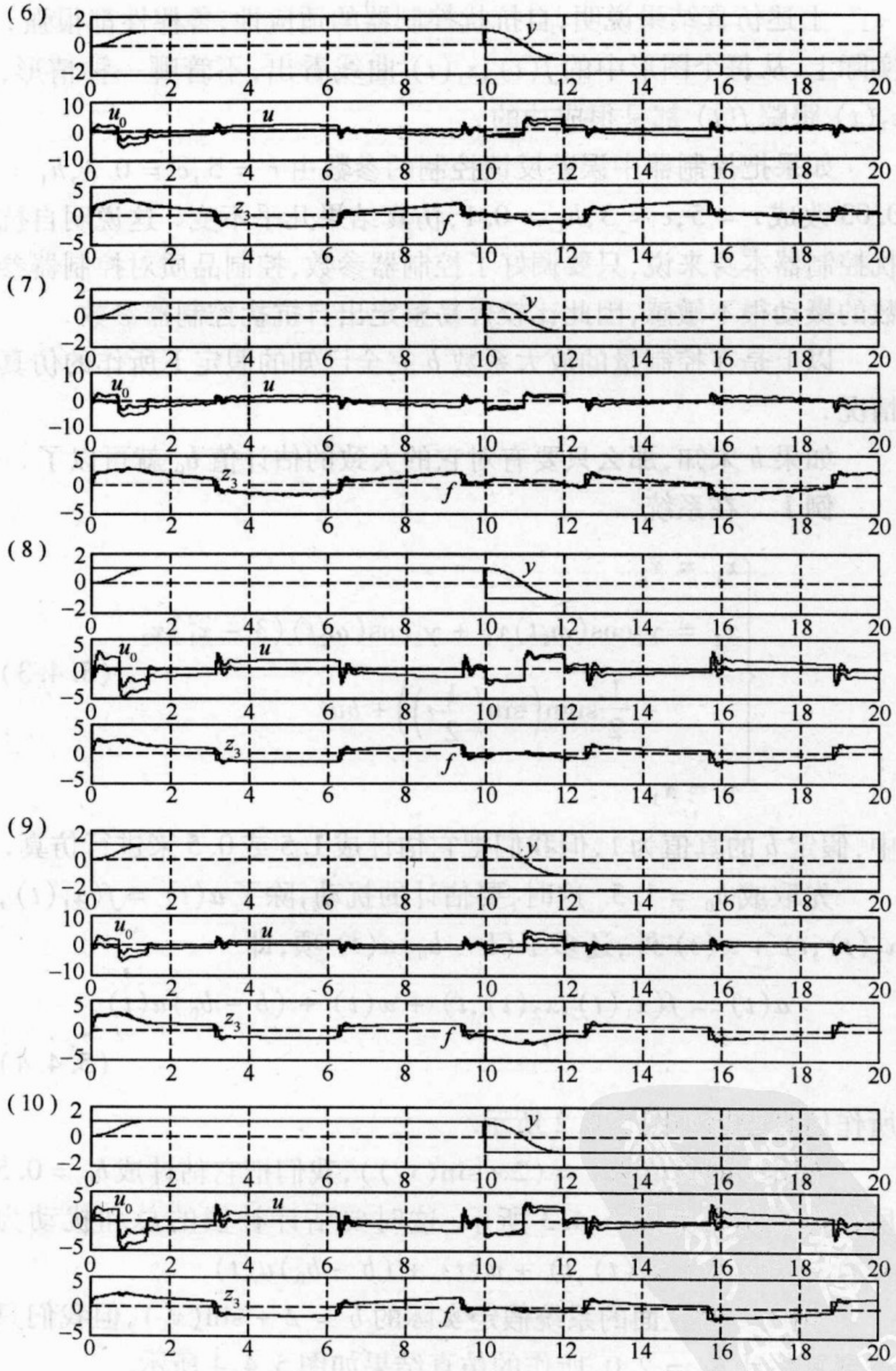


图 5.4.1

上述仿真结果说明,自抗扰控制器的适应性,鲁棒性都很强.实际上,从每个图形中的$f(t)$,$z_3(t)$ 曲线看出,不管哪一种情形,$z_3(t)$ 跟踪$f(t)$ 都是很成功的.

如果把控制器中误差反馈控制的参数由 $r = 5, c = 0.3, h_1 = 0.03$ 改成$r = 5, c = 3, h_1 = 0.1$,仿真结果几乎不变. 这说明自抗扰控制器本身来说,只要调好了控制器参数,控制品质对控制器参数的摄动很不敏感,因此比较容易整定出自抗扰控制器参数.

以上是在控制量的放大系数 b 完全已知的假定下所作的仿真情况.

如果 b 未知,那么只要有对它的大致的估计值 b_0 就可以了.

例 1　在系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma_1 \cos(\omega_1 t) x_1 + \gamma_2 \cos(\omega_2 t)(3 - x_1^2) x_2 \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\operatorname{sign}\left(\sin\left(\dfrac{1}{2}t\right)\right) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.4.3}$$

中,假定 b 的真值为1,但我们把它估计成1.5 或0.5 来进行仿真.

先取成 $b_0 = 1.5$. 这时,要估计的扰动,除了 $a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) + w(t)$ 外,还多了$(b - b_0)u(t)$ 项,即

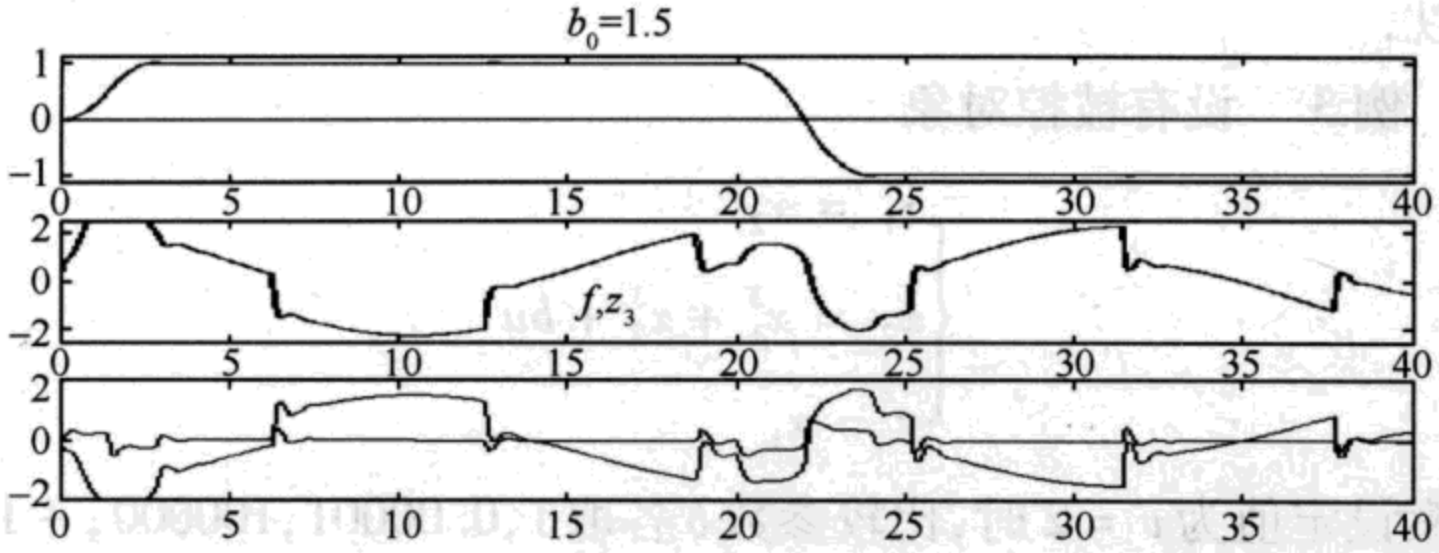
$$a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) + w(t) + (b - b_0)u(t) \tag{5.4.4}$$

所作仿真结果如图 5.4.2 所示.

假定b的真值为$b = (2 + \sin(x_1))$,我们把它估计成$b_0 = 0.5$所作仿真结果如图 5.4.3 所示. 这时要估计补偿的总和扰动为$a(t) = f(x_1(t), x_2(t), t) + w(t) + (b - b_0)u(t)$.

例 2　对上面的系统假定实际的 $b = 2 + \sin(x_1)$,但我们只得到其估计 $b_0 = 2.0$,所作的仿真结果如图 5.4.4 所示.

上述仿真结果说明,前述控制算法对b的估计精度要求很低,



$f=\gamma_1\cos(\omega_1 t)x_1+\gamma_2\cos(\omega_2 t)(3-x_1^2)x_2+1/2\text{sign}(\sin(0.5t))-0.5u$

图 5.4.2

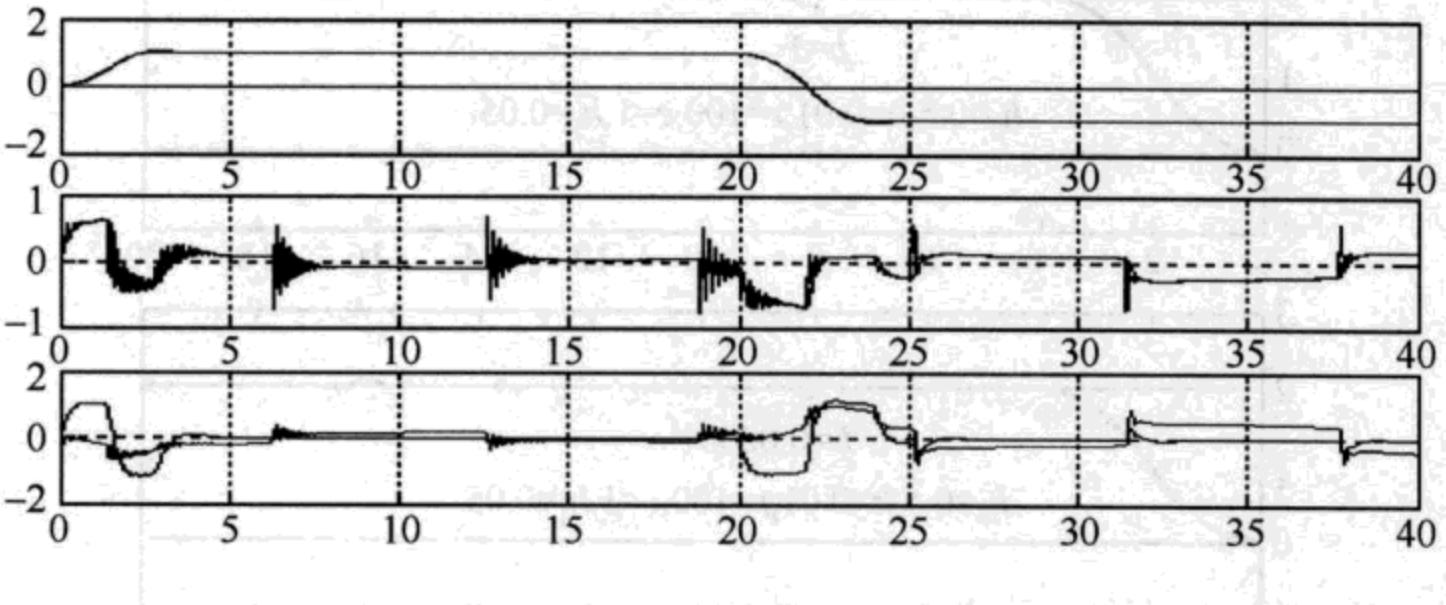


图 5.4.3

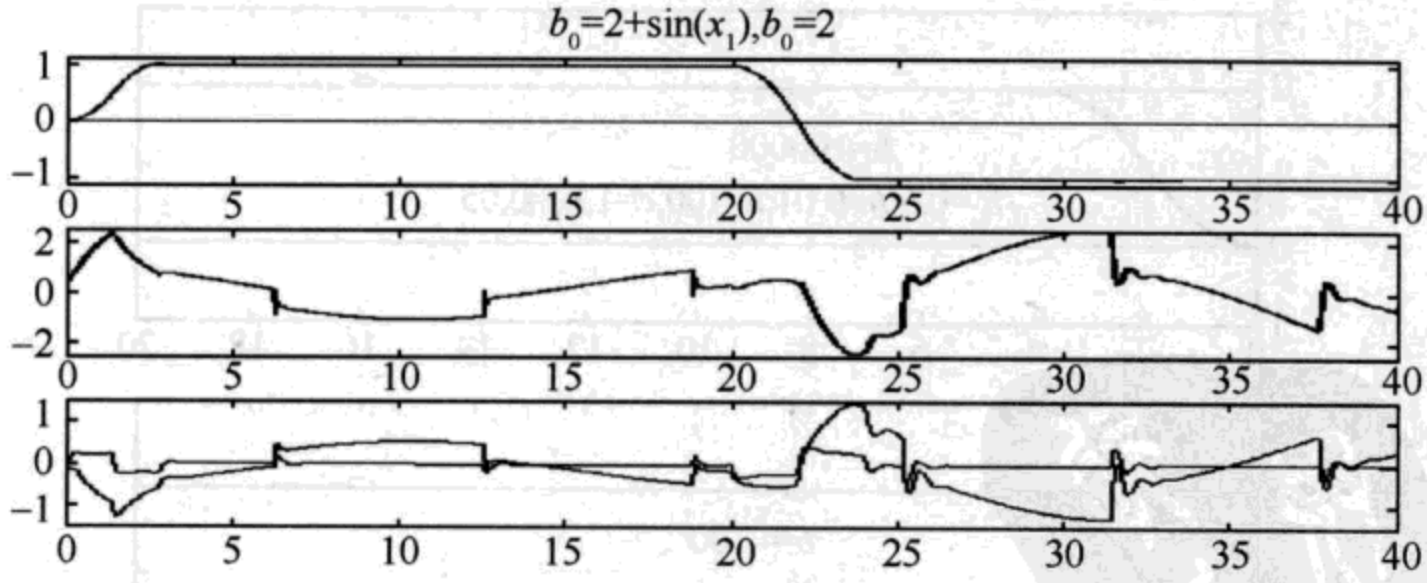


图 5.4.4

因此把它作为可调参数是很容易调出来的.

如果把图 5.2.2 对应的自抗扰控制器改造成图 5.2.3 对应的自抗扰控制器,那么误差反馈控制量 $u_0 = k(e_1, e_2, p)$ 中的参数 p

用不着随 b 大小而变化. 实际上,对 $b = 1$ 的情形调好了参数 p 就可以.

例 3 设有被控对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 + x_2^3 + bu \\ y = x_1 \end{cases}$$

考察设定值为 $v = 2$ 时,比较参数 b 各取 1,0.00001,100000,-100 时的阶跃响应(图 5.4.5).

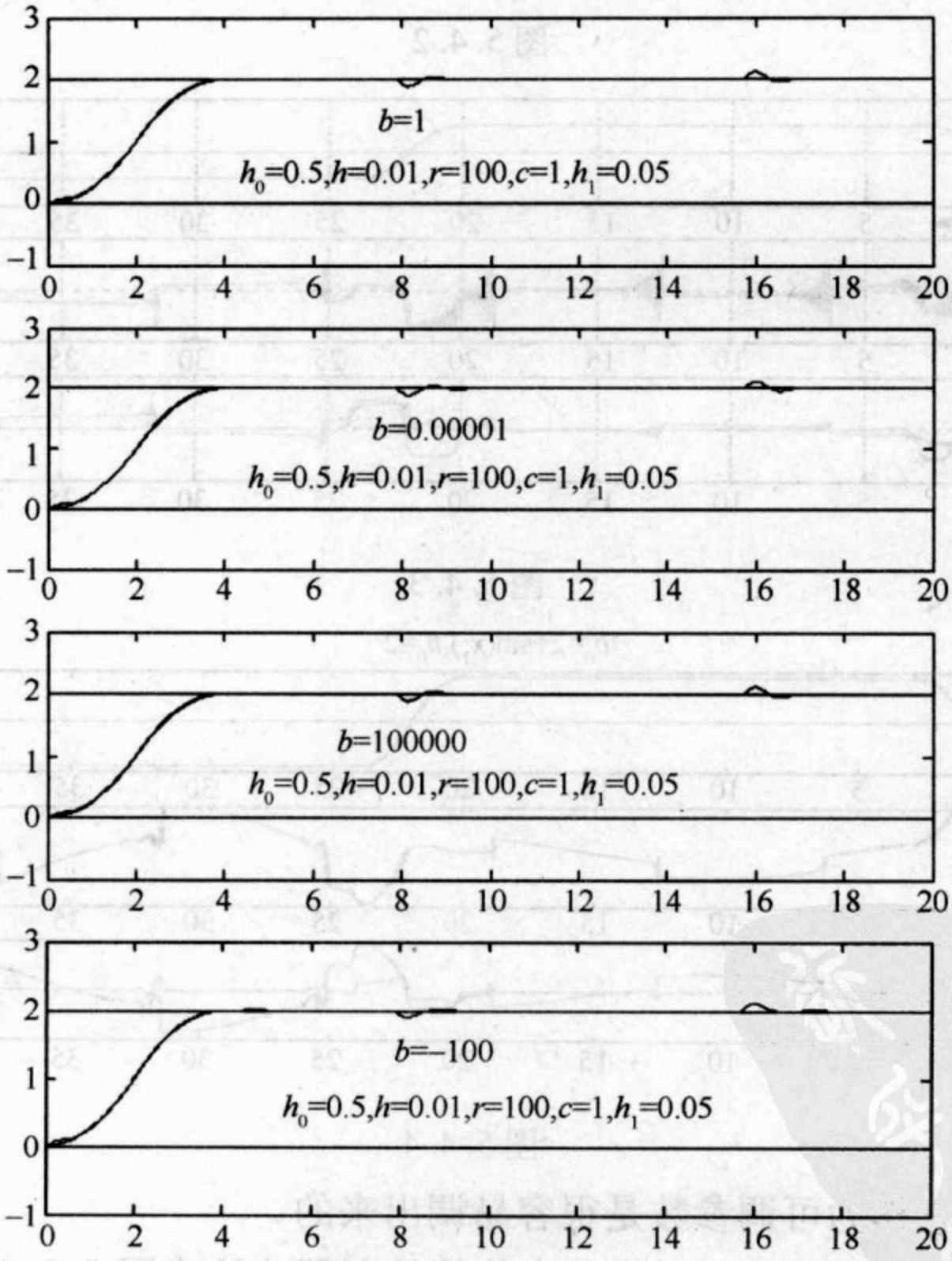


图 5.4.5

从图5.4.5可以看出,尽管控制器的所有参数固定不变,只改变控制量放大系数上下十万倍,仍能控制好对象且其控制效果几乎没有什么差异.

5.5 自抗扰控制器的控制能力

本节将用仿真来说明自抗扰控制器的控制能力,可以说只要步长无限小下去,自抗扰控制器的控制能力几乎是没有限制的.

先考察如下的被控对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^m + x_2^m + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.5.1}$$

这是开环很不稳定的对象,而且幂次m越大越不稳定,从而越难以控制. 在这里如果设定值取成$v_0 < 1.0$,那么系统的"固有加速度"$x_1^m + x_2^m$越来越小,从而更容易受到控制,但是当设定值$v_0 > 1.0$时,随着m的增大"固有加速度"$x_1^m + x_2^m$迅速增大,因而控制的难度也就增加,因此我们取设定值为$v_0 = 2.0$.

下面用标准的自抗扰控制器算法

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\text{fe} + u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \\ e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) - z_3 \end{cases} \tag{5.5.2}$$

来考察对给定的采样步长 h 能控制的被控对象的幂次 m 升高多少?由于数值计算中不好做负数的幂次运算,为了幂次 m 为非整型数时也能算下去,把上述系统方程(5.5.1) 改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}(x_1) \mid x_1 \mid^m + \operatorname{sign}(x_2) \mid x_2 \mid^m + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.5.3}$$

对这个系统所做的仿真结果见表 5.5.1. 采样步长越小,能控制的对象幂次越高. 按上述控制算法取 $h = 0.001, r = 100000$, (因为 $2^{12.8} = 7132$,参数 r 必须超出 2^m 才能控制住) $c = 1.3, h_1 = 4 \times h$ 时,能够控制幂次为 $m = 12.8$ 的对象. 系统的幂次越高,系统变化越激烈,因此其“时间尺度” 越小,因而需要采用更小的采样步长才能控制住. 另外,采样步长越小,过渡过程时间需要适当扩大才行.

表 5.5.1

h	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001
m	2.0	3.3	5.3	7.0	8.8	11.0	12.8	14.6	17.0	18.8
c	0.6	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
h_1	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$	$4 \times h$
r	10000	10000	10000	10000	10000	10000	100000	100000	100000	100000

把上述仿真结果的($\lg(h), m$) 关系用图形表示为图 5.5.1. ($\lg(h), m$) 关系曲线几乎是一条直线. 按这个曲线,要想控制好幂次 $m = 15$ 的对象,采样步长必须 $h < 10^{-\frac{15+4.2414}{5.7086}} \approx 0.0004$ 才行.

这些仿真研究结果从另一角度说明了系统的“时间尺度” 的意义.

下面考察另一种形式被控对象

$$\begin{cases} \dot{x} = \exp(x) + u \\ y = x \end{cases} \tag{5.5.4}$$

这个系统也是开环很不稳定的对象,特别要跟踪的设定值为 $v_0 >$

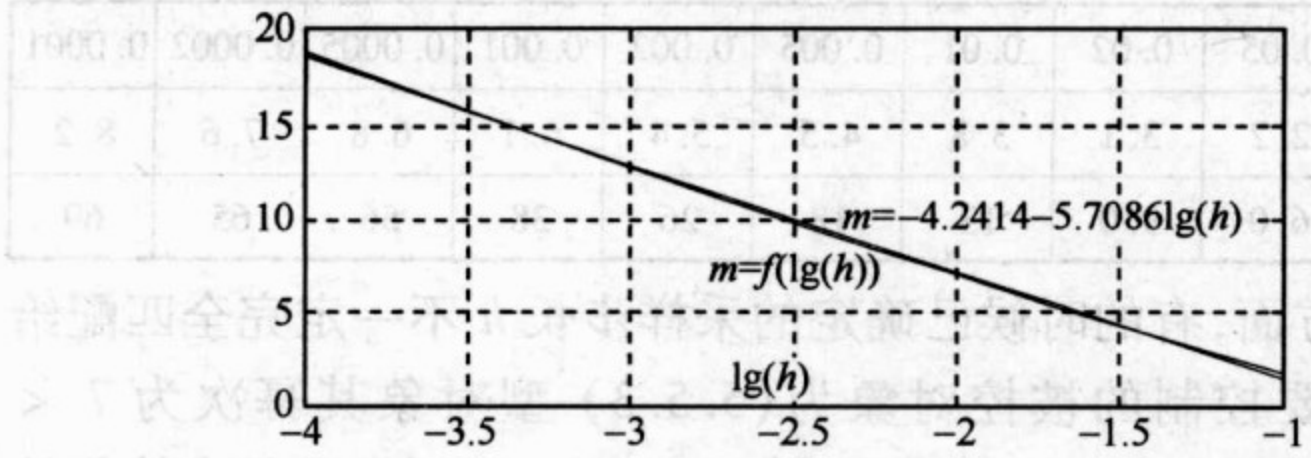


图 5.5.1

1 的情形. 设定值越大 $\exp(x)$ 增长很快,就越难控制了.

对这个系统采用如下一阶自抗扰控制器算法

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v_0, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e + u) \\ z_2 = z_2 + h(-\beta_{02}e) \\ e_1 = v_1 - z_1 \\ u = re_1 - z_2 \end{cases} \tag{5.5.5}$$

其中,各参数取如下值

$$r_0 = \frac{0.000001}{h^2}, \beta_{01} = \frac{1}{h}, \beta_{02} = \frac{1}{5h^2} \tag{5.5.6}$$

对此问题我们作如下仿真研究:先固定采样步长 h,然后逐渐增大设定值 v_0,考察能跟踪多大的设定值,需要多大的误差反馈增益 r?仿真结果列表如表 5.5.2. 只要“采样步长”能够小下去,能达到的设定值也上升. 这些现象也进一步说明:对象可控范围和对象时间尺度 - 采样步长之间的密切关系,也指出应该如何去确定控制给定对象的“采样时间”问题了.

表 5.5.2

h	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001	0.0005	0.0002	0.0001
v_0	1.5	2.2	3.1	3.8	4.5	5.4	6.1	6.8	7.6	8.2
r	5.0	6.0	9.0	13	18	26	38	56	65	69

另一方面,有的时候已确定的采样步长 h 不一定完全匹配给定对象,如要控制的被控对象为(5.5.3)型对象其幂次为 $7 < m < 8$ 之间,步长 $h = 0.01$ 来控制这种对象,要用标准的自抗扰控制算法来进行控制是困难的. 但是用"多循环 ESO"的方法来改进标准自抗扰控制算法,会取得提高可控幂次的,即把算法(5.5.2)改造成

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\
v_1 = v_1 + hv_2 \\
v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \\
h^* = \dfrac{h}{k} \\
e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h^*), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h^*) \\
\text{for} \quad i = 1 : k \\
z_1 = z_1 + h^*(z_2 - \beta_{01} e) \\
z_2 = z_2 + h^*(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + u) \\
z_3 = z_3 + h^*(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \\
\text{end} \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\
u = -\mathrm{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) - z_3
\end{cases}
\tag{5.5.7}
$$

即在算法(5.5.2)中,估计对象状态和总和扰动的 ESO 部分,多转 $k(>1)$ 次,以便提高 ESO 的估计精度. 采取这种措施提高自抗扰控制器的控制能力是有一定效果的.

例如,控制器参数为: $\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 200, \beta_{03} = 2000, r = 1000, c = 2, h_1 = 0.05 = 5h$. 如果 $k = 1$,即采用标准的自抗扰控制器算法,那么此控制器只能控制 $m \leqslant 7$ 的对象,但是取 $k = 4 \sim 12$ 时,能控的对象范围能扩大到 $m \leqslant 8$ 了.

5.6 系统的时间尺度与自抗扰控制器

本节就对线性自抗扰控制器的各参数与系统“时间尺度”之间关系进行探讨.

二阶线性自抗扰控制器的标准算法为

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = -r_0^2(v_1 - v_0) + 2r_0 v_2 \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \\ e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02} e + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03} e) \\ e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u = \dfrac{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - z_3}{b_0} \end{cases} \tag{5.6.1}$$

对这个算法进行“时间尺度”变换

$$h = \rho h' \tag{5.6.2}$$

那么有

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh} = -r_0^2(v_1 - v_0) + 2r_0 v_2 \\
v_1 = v_1 + h'\rho v_2 \\
v_2 = v_2 + h'\rho \mathrm{fh} \\
e = z_1 - y \\
z_1 = z_1 + h'\rho(z_2 - \beta_{01} e) \\
z_2 = z_2 + h'\rho(z_3 - \beta_{02} e + b_0 u) \\
z_3 = z_3 + h'\rho(-\beta_{03} e) \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\
u = \dfrac{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - z_3}{b_0}
\end{cases}
$$

再令

$$
\begin{cases}
v'_1 = v_1, v'_2 = \rho v_2 \\
z'_1 = z_1, z'_2 = \rho z_2, z'_3 = \rho^2 z_3, u' = \rho^2 u \\
e'_1 = e_1, e'_2 = \rho e_2
\end{cases} \tag{5.6.3}
$$

就得

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh}' = -\rho^2 r_0^2(v'_1 - v_0) + 2r_0 \rho v'_2 \\
v'_1 = v'_1 + h' v'_2 \\
v'_2 = v'_2 + h' \mathrm{fh}' \\
e = z'_1 - y \\
z'_1 = z'_1 + h'(z'_2 - \beta_{01}\rho e) \\
z'_2 = z'_2 + h'(z'_3 - \beta_{02}\rho^2 e + b_0 u') \\
z'_3 = z'_3 + h'(-\beta_{03}\rho^3 e) \\
e'_1 = v'_1 - z'_1, e'_2 = v'_2 - z'_2 \\
u' = \dfrac{\rho^2 \beta_1 e'_1 + \rho \beta_2 e'_2 - z'_3}{b_0}
\end{cases}
$$

于是再记

$$\begin{cases} r'_0 = \rho r_0 \\ \beta'_{01} = \rho\beta_{01}, \beta'_{02} = \rho^2\beta_{02}, \beta'_{03} = \rho^3\beta_{03} \\ \beta'_1 = \rho^2\beta_1, \beta'_2 = \rho\beta_2 \end{cases} \tag{5.6.4}$$

那么上式进一步变成

$$\begin{cases} \mathrm{fh}' = -r'^2_0(v'_1 - v_0) + 2r'_0v'_2 \\ v'_1 = v'_1 + h'v'_2 \\ v'_2 = v'_2 + h'\mathrm{fh}' \\ e' = z'_1 - y \\ z'_1 = z'_1 + h'(z'_2 - \beta'_{01}e') \\ z'_2 = z'_2 + h'(z'_3 - \beta'_{02}e' + b_0u') \\ z'_3 = z'_3 + h'(-\beta'_{03}e') \\ e'_1 = v'_1 - z'_1, e'_2 = v'_2 - z'_2 \\ u' = \dfrac{\beta'_1e'_1 + \beta'_2e'_2 - z'_3}{b_0} \end{cases} \tag{5.6.5}$$

在式(5.6.5)中去掉每个变量的“′”就变成标准的算法(5.6.1)了. 这说明采样步长 h 所对应的自抗扰控制器参数组 $\{r_0, \beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}, \beta_1, \beta_2, b_0\}$ 确定之后,对应于采样步长 $h' = \dfrac{h}{\rho}$ 的自抗扰控制器参数组是由变换关系(5.6.4)来确定,即对应于采样步长 h' 的自抗扰控制器参数为 $\{\rho r_0, \rho\beta_{01}, \rho^2\beta_{02}, \rho^3\beta_{03}, \rho^2\beta_1, \rho\beta_2\}$.

线性自抗扰控制器的连续动态方程为

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh} = -r_0^2(v_1 - v_0) + 2r_0 v_2 \\
\dot{v}_1 = v_2 \\
\dot{v}_2 = \mathrm{fh} \\
e = z_1 - y \\
\dot{z}_1 = (z_2 - \beta_{01} e) \\
\dot{z}_2 = (z_3 - \beta_{02} e + b_0 u) \\
\dot{z}_3 = (-\beta_{03} e) \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\
u = \dfrac{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - z_3}{b_0}
\end{cases} \tag{5.6.6}
$$

在这里进行“时间尺度”变换

$$
t = \rho\tau \tag{5.6.7}
$$

那么由于

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho\tau} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} \tag{5.6.8}
$$

就有

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh} = -r_0^2(v_1 - v_0) + 2r_0 v_2 \\
\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\tau} = \rho v_2 \\
\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\tau} = \rho\,\mathrm{fh} \\
e = z_1 - y \\
\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}\tau} = \rho(z_2 - \beta_{01} e) \\
\dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}\tau} = \rho(z_3 - \beta_{02} e + b_0 u) \\
\dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}\tau} = \rho(-\beta_{03} e) \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\
u = \dfrac{\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - z_3}{b_0}
\end{cases} \tag{5.6.9}
$$

再令

$$\begin{cases} v'_1 = v_1, v'_2 = \rho v_2 \\ e' = e, z'_1 = z_1, z'_2 = \rho z_2, z'_3 = \rho^2 z_3, u' = \rho^2 u \\ e'_1 = e_1, e'_2 = \rho e_2 \end{cases} \tag{5.6.10}$$

就得

$$\begin{cases} \mathrm{fh}' = -(\rho r_0)^2 (v'_1 - v_0) + 2(\rho r_0) v'_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}v'_1}{\mathrm{d}\tau} = v'_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}v'_2}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{fh}' \\ e' = z'_1 - y \\ \dfrac{\mathrm{d}z'_1}{\mathrm{d}\tau} = (z'_2 - \rho\beta_{01} e') \\ \dfrac{\mathrm{d}z'_2}{\mathrm{d}\tau} = (z'_3 - \rho^2\beta_{02} e' + b_0 u') \\ \dfrac{\mathrm{d}z'_3}{\mathrm{d}\tau} = (-\rho^3\beta_{03} e') \\ e'_1 = v'_1 - z'_1, e'_2 = v'_2 - z'_2 \\ u' = \dfrac{\rho^2\beta_1 e'_1 + \rho\beta_2 e'_2 - z'_3}{b_0} \end{cases} \tag{5.6.11}$$

现在又记

$$\begin{cases} r'_0 = \rho r_0 \\ \beta'_{01} = \rho\beta_{01}, \beta'_{02} = \rho^2\beta_{02}, \beta'_{03} = \rho^3\beta_{03} \\ \beta'_1 = \rho^2\beta_1, \beta'_2 = \rho\beta_2 \end{cases} \tag{5.6.12}$$

那么最后得到控制器方程

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh}' = -r'^{2}_{0}(v'_1 - v_0) + 2r'_0 v'_2 \\
\dfrac{\mathrm{d}v'_1}{\mathrm{d}\tau} = v'_2 \\
\dfrac{\mathrm{d}v'_2}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{fh}' \\
e' = z'_1 - y \\
\dfrac{\mathrm{d}z'_1}{\mathrm{d}\tau} = (z'_2 - \beta'_{01} e') \\
\dfrac{\mathrm{d}z'_2}{\mathrm{d}\tau} = (z'_3 - \beta'_{02} e' + b_0 u') \\
\dfrac{\mathrm{d}z'_3}{\mathrm{d}\tau} = (-\beta'_{03} e') \\
e'_1 = v'_1 - z'_1, e'_2 = v'_2 - z'_2 \\
u' = \dfrac{\beta'_1 e'_1 + \beta'_2 e'_2 - z'_3}{b_0}
\end{cases}
\tag{5.6.13}
$$

去掉各变量的“′”并把变量 τ 符号换成符号 t,那么式(5.6.11)又回到标准方程(5.6.6)了. 这里式(5.6.13)是与式(5.6.4)完全一致. 于是新旧时间尺度之间控制器参数的转换关系就是式(5.6.12)确定的关系.

5.7 自抗扰控制器设计的分离性原理

自抗扰控制器要涉及三个部分的设计问题:

① 安排过渡过程的部分;

② 扩张状态观测器设计;

③ 误差反馈设计.

虽然这三个部分组合成一个整体来起着自抗扰控制器作用,但自抗扰控制器的设计可以分成三个独立的组成部分来进行设计,即按各自的工程意义分别独立地设计出各个组成部分,然后组

合起来组成一个完整的自抗扰控制器. 分别独立地设计出各个组成部分而组合出整体结构的过程称作设计过程的分离性原理,就像线性控制系统理论中状态观测器设计与极点配置设计分别独立地进行设计,然后组合出完整的闭环控制器一样. 尽管对自抗扰控制器设计问题还没有给出分离性原理的理论证明,但是大量仿真研究说明,对自抗扰控制器的设计完全可以使用“分离性原理”,即分别独立地设计出“过渡过程安排”,“扩张状态观测器”,“误差反馈”,然后组合出完整的自抗扰控制器.

在二阶自抗扰控制器算法

$$
\begin{cases}
\text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) & \\
v_1 = v_1 + hv_2 & \text{安排过渡过程,} \\
v_2 = v_2 + h\text{fh} & \\
e = z_1 - y & \\
z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e) & \\
z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}e + b_0u) & \text{线性扩张状态观测器,} \\
z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}e) & \\
e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 & \\
u_0 = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) & \text{误差反馈,} \\
u = \dfrac{u_0 - z_3}{b_0} &
\end{cases}
\tag{5.7.1}
$$

中,“安排过渡过程”有两个参数:设定值 v 和决定过渡过程快慢的参数 r_0;“线性扩张状态观测器”有三个参数 $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$;“误差反馈”部分有三个参数 r, c, h_1;还有一个参数 —— 补偿因子 b_0 需要调整,才能最后确定出最终控制量 u.

控制二阶对象的情形,我们取“安排过渡过程”的参数为

$$r_0 = \frac{0.0001}{h^2} \tag{5.7.2}$$

可以根据对象承受能力来适当调整参数 0.0001.

“线性扩张状态观测器”参数取成

$$\beta_{01} = \frac{1}{h}, \beta_{02} = \frac{1}{3h^2}, \beta_{03} = \frac{2}{8^2 h^3} \tag{5.7.3}$$

是跟踪方波加速度为

$$a = \frac{1}{h^{\alpha}} \operatorname{sign}\left(\sin\left(0.0006 \frac{t}{h}\right)\right), \alpha = 1.5 - 0.5 \operatorname{sign}(1 - h) \tag{5.7.4}$$

的二阶对象调好的.

“误差反馈”参数取成

$$r = \frac{0.5}{h^2}, c = 0.5, h_1 = 5h \tag{5.7.5}$$

是安排的过渡过程和纯积分器串联系统

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + hu_0 \end{cases} \tag{5.7.6}$$

状态误差 $e_1 = v_1 - x_1, e_2 = v_2 - x_2$ 的非线性反馈

$$u_0 = -\operatorname{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1)$$

来调好的.

把上述参数集中起来

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{0.0001}{h^2} \\ \beta_{01} = \dfrac{1}{h}, \beta_{02} = \dfrac{1}{3h^2}, \beta_{03} = \dfrac{1}{32h^3} \\ r = \dfrac{0.5}{h^2}, c = 0.5, h_1 = 5h \end{cases} \tag{5.7.7}$$

这样,整个自抗扰控制器算法(5.7.1) 中的所有参数,除补偿因子

b_0 之外，全部由采样步长 h 按公式(5.7.7) 来决定，因此自抗扰控制器算法(5.7.1) 就变成“单参数” 控制器了. 参数 b_0 是控制量 u 作用于系统时的放大系数 b 的估计值. 如果系统参数 b 确知，那么取 $b_0 = b$. 但是当系统参数 b 未知时，我们只能把它作为可调参数来调整出 b 的真值附近的值来用. 大量仿真研究表明，参数 b 的估计要求并不高，相对误差在 30% 之内不会影响控制效果.

利用上述式(5.7.7) 给出的参数来考察控制二阶时变线性不稳定对象

$$\begin{cases} \alpha = 1.5 - 0.5\text{sign}(1-h), \gamma = \dfrac{0.001}{h^{\alpha}} \\ a_1 = 1 + 0.5\sin(0.005t/h) \\ a_2 = 1 + 0.5\cos(0.004t/h) \\ w = 0.5\text{sign}(\sin(0.006t/h)) \\ f = \gamma(a_1 x_1 + a_2 x_2 + w) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + h(f + bu) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.7.8}$$

的阶跃响应(设定值取为 $v = 2$).

对这个对象，当 $b = 1$ 确知时，参数组(5.7.7) 对 $h = 0.0000001 \sim 10000000$ 范围内的步长都会得到很好的控制效果. 下面仅给出 $h = 0.000001$ 和 $h = 100000$ 时的仿真结果(图5.7.1、图5.7.2).

显然，对象(5.7.8) 的加速度大小是由参数 γ 来决定，而这个参数 γ 与系统采样步长之间关系为

$$\gamma = \frac{0.001}{h^{1.5-0.5\text{sign}(1-h)}} \tag{5.7.9}$$

因此

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{1000\gamma}, & |\gamma| < 0.001 \\ h = \dfrac{1}{\sqrt{1000\gamma}}, & |\gamma| > 0.001 \end{cases} \tag{5.7.10}$$

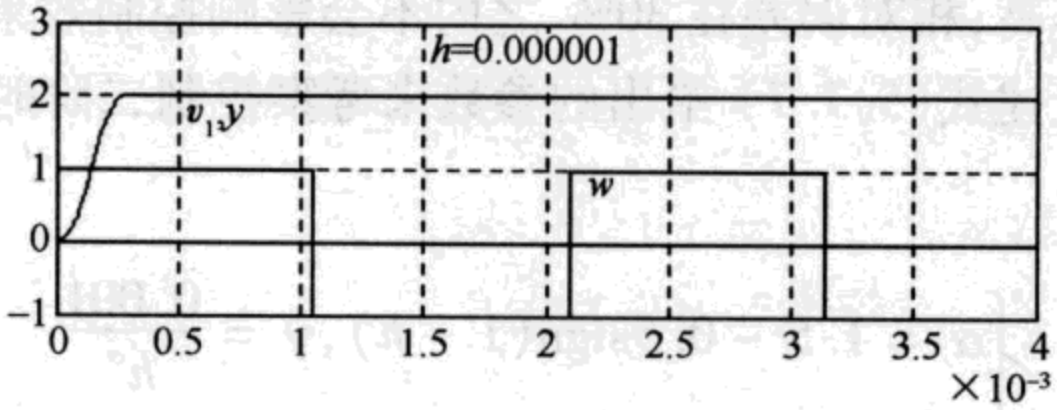


图 5.7.1

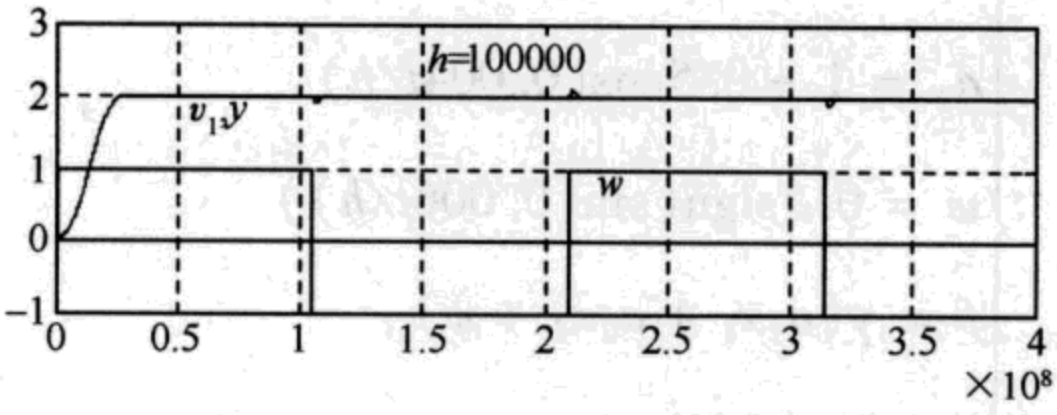


图 5.7.2

这样,对象加速度变化范围大小,即系统变化快慢程度与用来数字计算的采样步长之间关系就由关系式(5.7.10) 来决定. 这就是系统的“时间尺度” 与“采样步长” 之间的关系式,是由数值仿真实验来决定的一种可供参考的关系式.

用式(5.7.7) 给出的参数,对二阶对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \gamma(a_1 x_1 |x_1|^m + a_2 x_2 |x_2|^m + w) \\ y = x_1 \end{cases}$$

设定值取 $v = 2.0$ 进行控制. 幂次 m 取不同值时控制步长并不是任意的. 幂次给定时,能控制此对象的步长只能是一定范围的步长,幂次 m 小,能适应的步长范围大,幂次大时能适应的步长范围

小,直到$m=9$已没有合适的步长能够控制对象. 仿真出来的m与步长h范围之间关系见表5.7.1.

表5.7.1

m	1	2	3	4	5	6	7	8
min h	0.00008	0.00067	0.0014	0.002	0.0024	0.0025	0.0029	0.0031
max h	∞	0.7	0.32	0.14	0.062	0.028	0.012	0.0059

这个表并不意味着m大了对象控制不了,只是按上面式(5.7.7)给定的参数来进行控制时的步长限制.

以上是二阶对象的情形. 至于对一阶时变不稳定对象

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{0.001}{h} \\ a_1 = 1 + 0.5\sin(0.005t/h) \\ w = 0.5\operatorname{sign}(\sin(0.006t/h)) \\ f = \gamma(a_1 x_1 + w) \\ x_1 = x_1 + h(f + bu) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{5.7.11}$$

采用的一阶自抗扰控制器算法和控制器参数如下

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \qquad \text{安排过渡过程,} \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh} \\ e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01}e + b_0 u) \\ z_2 = z_2 + h(-\beta_{02}e) \qquad \text{线性扩张状态观测器,} \\ e_1 = v_1 - z_1 \\ u_0 = re_1 \qquad \text{误差反馈,} \\ u = \dfrac{u_0 - z_2}{b_0} \qquad \text{最终控制量,} \end{cases} \tag{5.7.12}$$

$$\begin{cases} r_0 = \dfrac{0.0001}{h^2} \\ \beta_{01} = \dfrac{1}{h}, \beta_{02} = \dfrac{1}{3h^2} \\ r = \dfrac{0.5}{h} \end{cases} \tag{5.7.13}$$

在这里,参数 $r_0, \beta_{01}, \beta_{02}$ 是与二阶情形完全一致的,即一阶与二阶部分参数有“继承性”. 对这个对象,当 $b = 1$ 确知时,参数组(5.7.7)对 $h = 0.0000001 \sim 10000000$ 范围内的步长都会得到很好的控制效果. 下面仅给出 $h = 0.000001$ 和 $h = 100000$ 时的仿真结果(图 5.7.3、图 5.7.4).

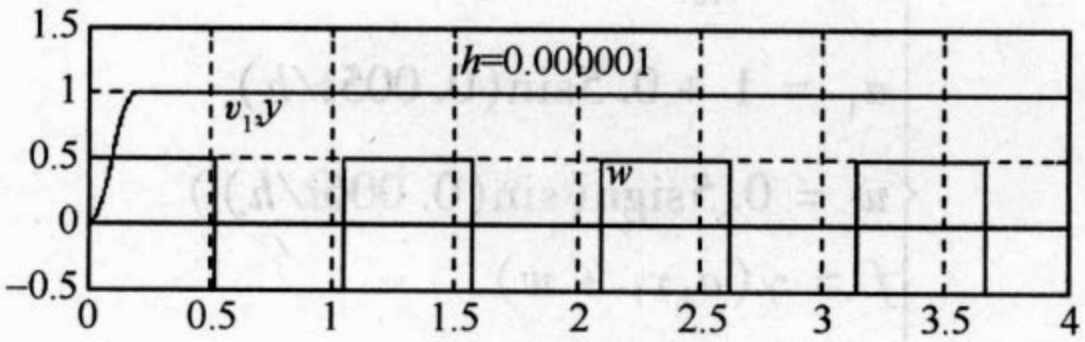


图 5.7.3

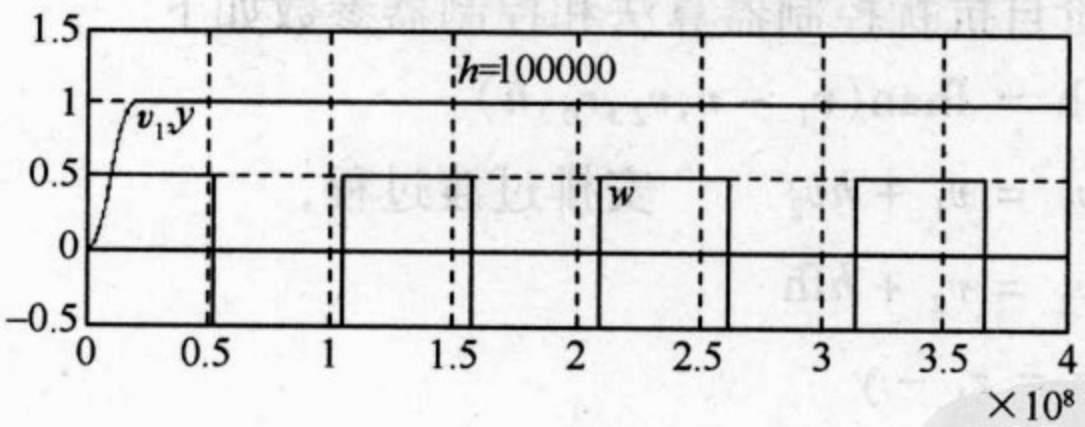


图 5.7.4

显然,一阶对象(5.7.12)的速度大小是由参数 γ 来决定,而这个参数 γ 与系统采样步长之间关系为

$$\gamma = \frac{0.001}{h} \tag{5.7.14}$$

因此

$$h = \frac{1}{1000\gamma} \tag{5.7.15}$$

这样对象速度变化范围大小，即一阶系统的变化快慢程度与用来数字计算的采样步长之间关系就由关系式(5.7.10)来决定.这就是系统的“时间尺度”与“采样步长”之间的关系式，是由数值仿真实验来决定的一种可供参考的一阶对象的关系式.

第六章　自抗扰控制器的应用

本章介绍自抗扰控制器在几类典型的控制问题上的使用方法和一些实例上的具体应用方法，以便进一步了解结合具体问题如何灵活运用自抗扰控制技术来解决实际问题.

6.1　多变量系统的解耦控制

多输入 - 多输出系统的解耦控制方法无论是控制理论界还是控制工程界都是追求解决的重要问题. 依靠系统模型的解决办法是有的，但是需要很大的计算量. 用自抗扰控制技术来解决这个问题很简单，所需计算量也不大，特别是控制器的鲁棒性很好.

这一节将介绍自抗扰控制技术如何解决多变量控制系统的解耦控制问题.

设有多输入 - 多输出系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_m, \dot{x}_m) + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \ddot{x}_2 = f_2(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_m, \dot{x}_m) + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m \\ \vdots \\ \ddot{x}_m = f_m(x_1, \dot{x}_1, \cdots, x_m, \dot{x}_m) + b_{m1}u_1 + \cdots + b_{mm}u_m \\ y_1 = x_1, y_2 = x_2, \cdots, y_m = x_m \end{cases} \tag{6.1.1}$$

是 m 输入 - m 输出系统，控制量的放大系数 b_{ij} 是状态变量和时间的函数 $b_{ij}(x, \dot{x}, t)$.

假定矩阵

$$\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t) = \begin{bmatrix} b_{11}(x,\dot{x},t) & \cdots & b_{1m}(x,\dot{x},t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1}(x,\dot{x},t) & \cdots & b_{mm}(x,\dot{x},t) \end{bmatrix}$$

可逆. 在这里,我们把系统控制量之外的模型部分 $f(x_1,x_2,\cdots,x_m) = [f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_m]^{\mathrm{T}}$ 叫做"动态耦合"部分,而把 $U = \boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)u$ 部分叫做"静态耦合"部分.

记

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_m]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{f} = [f_1 \ f_2 \ \cdots f_m]^{\mathrm{T}}, u = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^{\mathrm{T}}$$

并引入"虚拟控制量" $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)u$. 系统方程(6.1.1)变为

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \end{cases} \tag{6.1.2}$$

在这个系统中的第 i 通道的输入输出关系为

$$\begin{cases} \ddot{x}_i = f_i(x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_m,\dot{x}_m,t) + U_i \\ y_i = x_i \end{cases} \tag{6.1.3}$$

即第 i 通道上的输入为 U_i,而其输出为 $y_i = x_i$. 这样每一个通道的虚拟控制量 U_i 与被控输出 y_i 之间是单输入 - 单输出关系,即第 i 通道的被控输出 y_i 和"虚拟控制量" U_i 之间已被完全解耦了,而 $f_i(x_1,\dot{x}_1,\cdots,x_m,\dot{x}_m,t)$ 则是作用于第 i 通道上的"扰动总和",因此只要有被控量 y_i 的目标值 $y_i^*(t)$ 且 y_i 能被测量,那么在 U_i 和 y_i 之间嵌入一个自抗扰控制器是完全能够让 y_i 达到目标 $y_i^*(t)$.

这个过程的框图为图 6.1.1.

这样,在控制向量 $\boldsymbol{U}$ 和输出向量 $\boldsymbol{y}$ 之间并行地嵌入 m 个自抗扰控制器就能实现多变量系统的解耦控制. 这时,实际的控制量 $\boldsymbol{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]$ 就能由虚拟控制量 $\boldsymbol{U} = [U_1 \ U_2 \ \cdots \ U_m]$ 用公式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}^{-1}(x,\dot{x},t)\boldsymbol{U} \tag{6.1.4}$$

决定出来.

有意思的是系统的动态耦合作用 $f(x,\dot{x},t)$ 的各分量 $f_i(x,\dot{x},t)$,

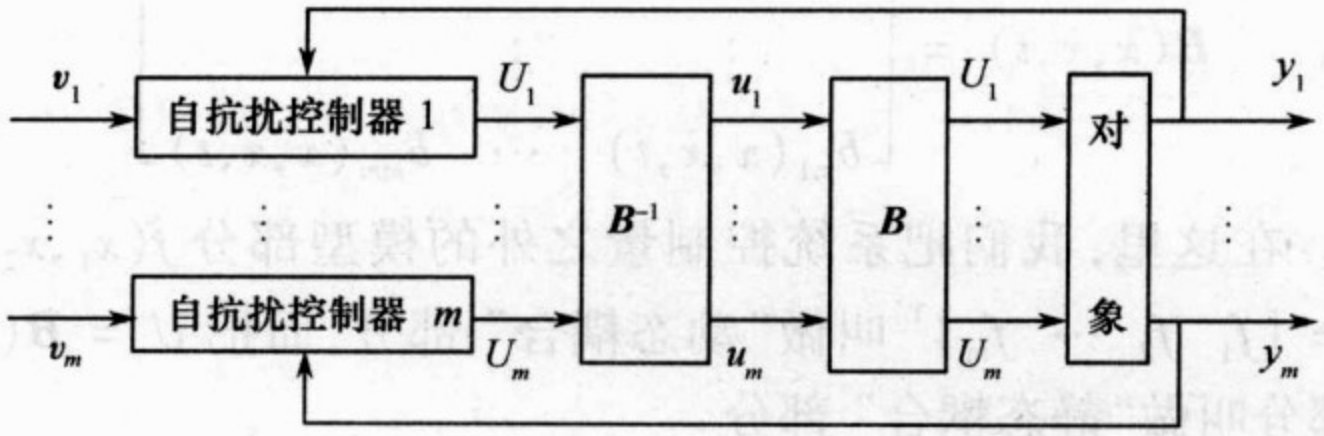


图 6.1.1

在这个解耦控制中被当作各自通道上的总和扰动来被估计并补偿掉的. 因此用自抗扰控制器进行解耦控制时,我们不去考虑"动态耦合" 部分 $f(x,\dot{x},t)$,但是要用到"静态耦合" 部分 $\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)$. 大量的仿真研究表明,用自抗扰控制器进行解耦控制时,对"静态耦合" 矩阵 $\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)$ 的估计精度要求不高,即使有百分之几十的估计误差,只要保证矩阵 $\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)$ 的可逆性,对闭环的控制品质无多大影响. 即使矩阵 $\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)$ 在系统运行过程中瞬间地出现不可逆的奇异现象也关系不大,可以在矩阵 $\boldsymbol{B}(x,\dot{x},t)$ 附近找一个可逆矩阵来近似就可以了.

例 对 2×2 耦合系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 + \operatorname{sign}(\sin(0.9t)) + b_{11}(t)u_1 + b_{12}(t)u_2 \\ \ddot{x}_2 = x_1x_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \cos(0.7t) + b_{21}(t)u_1 + b_{22}(t)u_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{6.1.5}$$

考察取不同的设定值 $y_1^*(t)$,$y_2^*(t)$ 和不同的输入矩阵

$$\boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) \end{bmatrix} \tag{6.1.6}$$

时的控制效果.

设设定值和静态耦合矩阵 —— 输入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的真值为

$$\begin{cases} y_1^*(t) = 2, \quad y_2^*(t) = 1 \\ \boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \Delta\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.5\cos(t) & 0.2\sin(0.8t) \\ -0.6\sin(0.6t) & 0.5\cos(0.7t) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0 + \Delta\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6.1.7}$$

这时 $\boldsymbol{B}^{-1}(t) = \dfrac{1}{bb}\begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{bmatrix}$, $\mathrm{bb} = \det(\boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{B}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

假定静态耦合矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{B}^{-1}(t)$ 均已知,而系统各通道的加速度和外扰作用分别为

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_1\dot{x}_2 + \mathrm{sign}(\cos(0.9t)) \\ f_2 = x_1x_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \sin(0.7t) \end{cases} \tag{6.1.8}$$

记虚拟控制量为

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}(t)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{6.1.9}$$

用虚拟控制量所作的整个自抗扰控制器算法为

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_{11} - y_1^*, v_{12}, r_0, h) \\ v_{11} = v_{11} + hv_{12} \\ v_{12} = v_{12} + h\mathrm{fh} \\ e = z_{11} - y_1, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01}e) \\ z_{12} = z_{12} + h(z_{13} - \beta_{02}\mathrm{fe} + U_1) \\ z_{13} = z_{13} + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \\ e_1 = v_{11} - z_{11}, e_2 = v_{12} - z_{12} \\ U_1 = -\mathrm{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) - z_{13} \end{cases} \tag{6.1.10}$$

$$
\begin{cases}
\text{fh} = \text{fhan}(v_{21} - y_2^*, v_{22}, r_0, h) \\
v_{21} = v_{21} + hv_{22} \\
v_{22} = v_{22} + h\text{fh} \\
e = z_{21} - y_2, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\
z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01} e) \\
z_{22} = z_{22} + h(z_{23} - \beta_{02}\text{fe} + U_2) \\
z_{23} = z_{23} + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \\
e_1 = v_{21} - z_{21}, e_2 = v_{22} - z_{22} \\
U_2 = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) - z_{23}
\end{cases}
\tag{6.1.11}
$$

确定出虚拟控制量 U_1, U_2 以后,所需的实际控制量为

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}(t) \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{6.1.12}
$$

把这个控制量送入对象(6.1.5)中进行仿真的结果如图 6.1.2 所示. 尽管开环系统很不稳定且受到时变强扰动作用,但是各通道的被控输出跟踪各自的设定值的效果很好,而且扩张状态观测器实时估计各自通道上的加速度和外扰总和作用也是很好的.

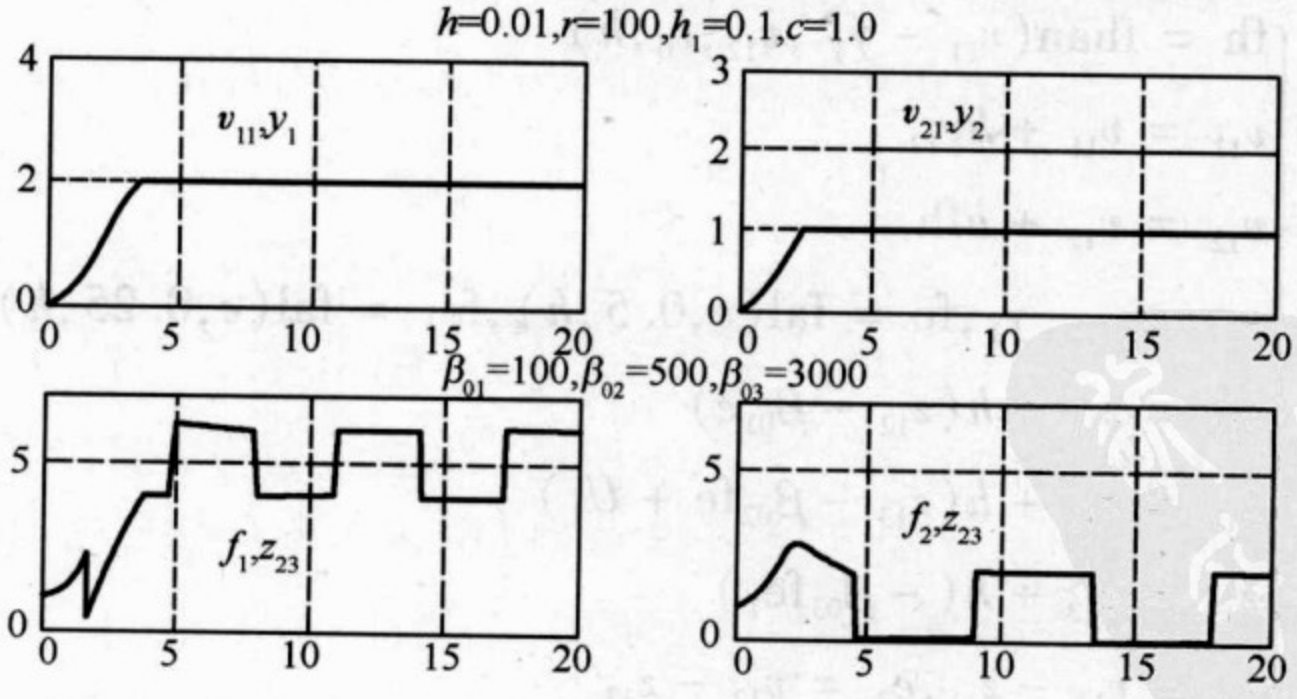


图 6.1.2

如果把各通道的设定值改成

$$y_1^* = \cos(t), y_2^* = 2\sin(t) \tag{6.1.13}$$

所得的仿真结果如图 6.1.3 所示. 在这里控制器的参数是和前面的完全相同,只是由于要跟踪时变轨迹,安排过渡过程的参数 r_0 取得大一些.

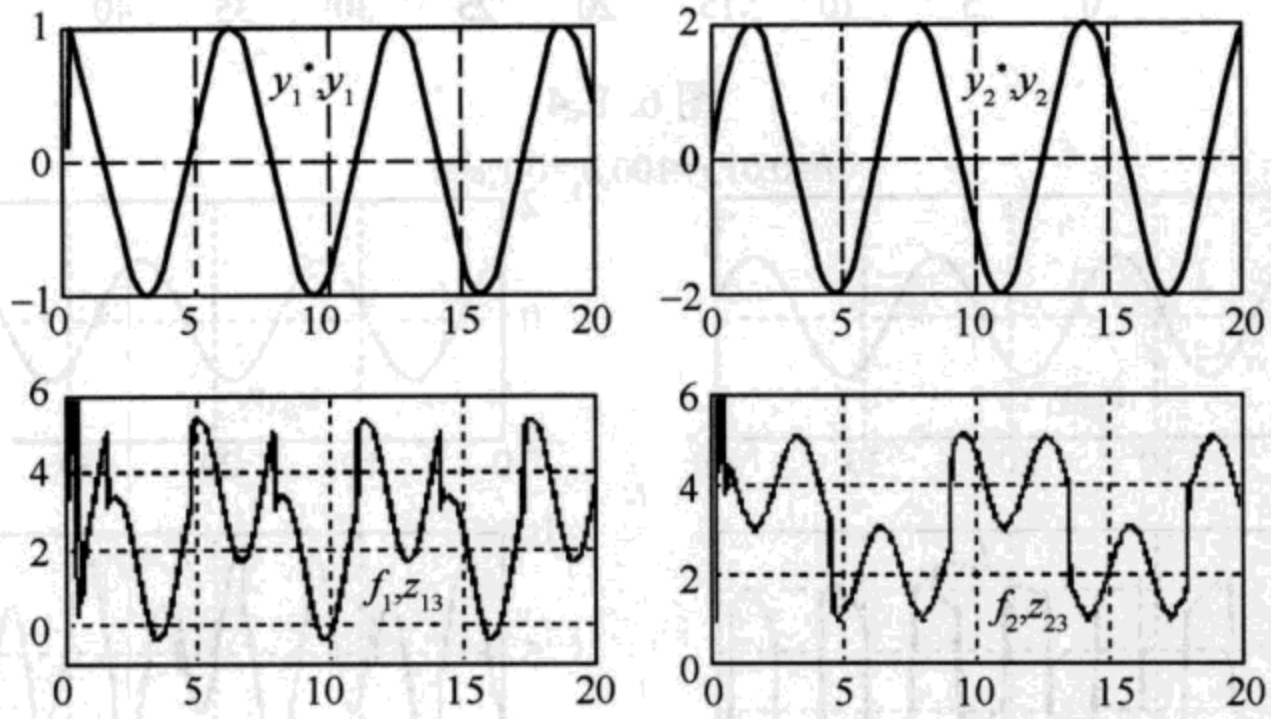


图 6.1.3

如果"静态耦合"矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 的奇异性只在个别离散时刻上出现,如

$$\boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} \cos(0.9t) & \sin(0.8t) \\ \sin(t) & \cos(0.7t) \end{bmatrix} \tag{6.1.14}$$

那么其行列式和逆矩阵的表达式为

$$\mathrm{bb}(t) = \cos(0.9t)\cos(0.7t) - \sin(0.8t)\sin(t) \tag{6.1.15}$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}(t) = \frac{1}{\mathrm{bb}} \begin{bmatrix} \cos(0.7t) & -\sin(0.8t) \\ -\sin(t) & \cos(0.9t) \end{bmatrix} \tag{6.1.16}$$

但行列式 $\mathrm{bb}(t)$ 的曲线如图 6.1.4 所示. 此曲线过 0 的时刻矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 都是不可逆的,但是每个采样时刻 $\mathrm{bb}(kh)$ 不一定等于零,因此在采样时刻上矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 是可逆的.

对系统(6.1.5)的静态耦合矩阵(6.1.6)换成矩阵(6.1.14)所作的仿真结果如图 6.1.5 所示.

以上是静态耦合矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 完全已知的假定下进行的仿真.

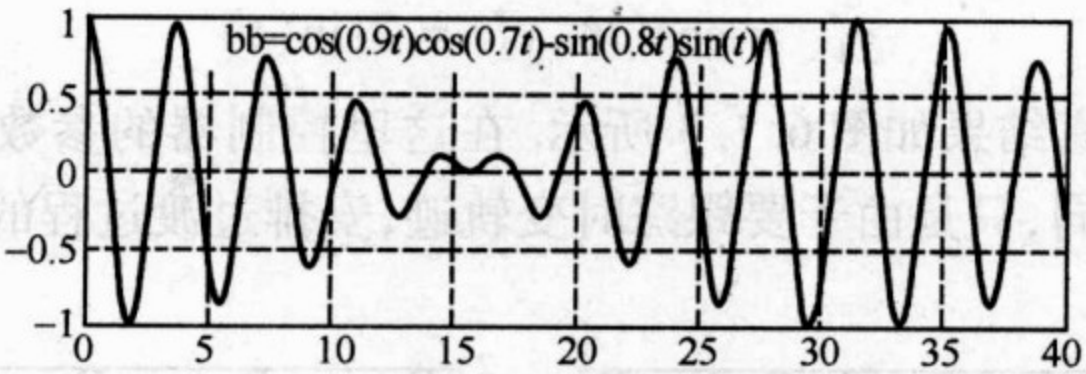


图 6.1.4

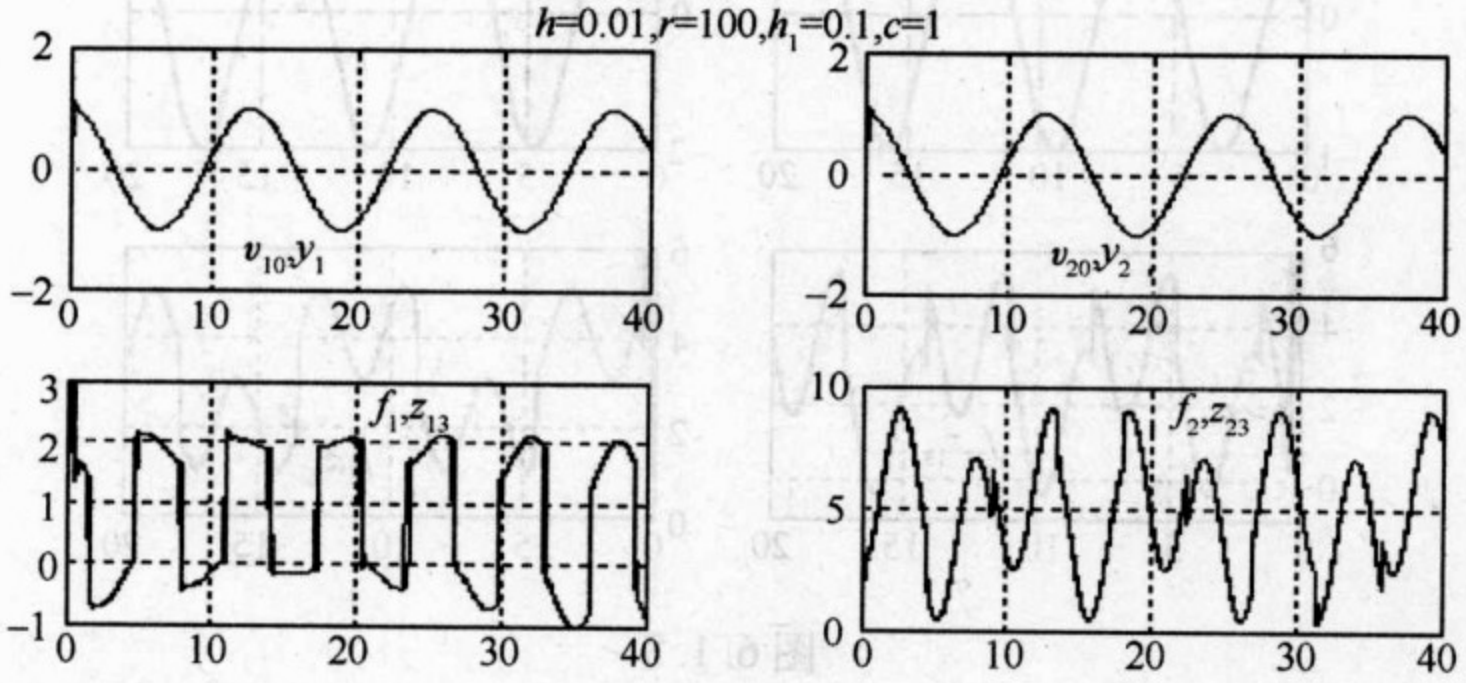


图 6.1.5

如果我们不完全知道静态耦合矩阵 $\boldsymbol{B}(t)$ 的真值,只知道其近似矩阵 $\boldsymbol{B}_0$,那么式(6.1.12) 只能改成

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}_0^{-1} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{6.1.17}$$

来用. 只用 $\boldsymbol{B}_0$ 来近似 $\boldsymbol{B}(t)$ 所作的仿真结果如图6.1.6所示. 设定轨迹的跟踪是很好的. 这里 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \end{bmatrix}$ 并不一致,这是由于 $\begin{bmatrix} z_{13} \\ z_{23} \end{bmatrix}$ 估计的并不是 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$,而是 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + (\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{B}_0)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. 因为我们把原问题转化成如下形式来处理的

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{B}(t)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + (\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{B}_0)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) + \boldsymbol{B}_0 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{6.1.18}$$

因此图 6.1.6 中的 f_i, z_{i3} 之间的误差就是 $(\boldsymbol{B}(t) - \boldsymbol{B}_0)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ 部分.

大量仿真研究表明 $\boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{B}_0$ 之间误差不能太大,相对误差能小到 30% 以下,自抗扰控制器是能够控制好的.

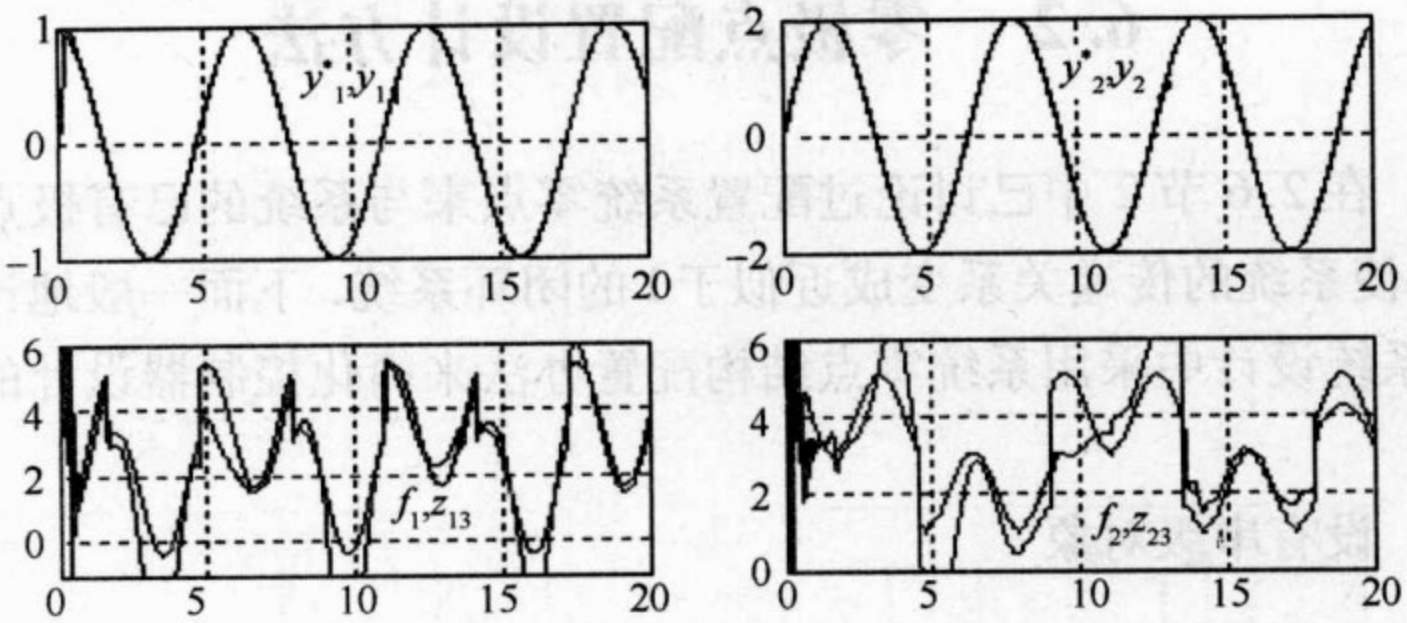


图 6.1.6

上述对象是时变、非线性、开环不稳定的系统,在上述三个仿真中用的是同一个控制器参数.

更一般地,设有控制系统

$$\ddot{X} = F(X,\dot{X},W,U), X \in R^m, U \in R^m \tag{6.1.19}$$

X 的每个分量都是被控量. 今记 $F_0(X,\dot{X},W,U) = F(X,\dot{X},W,U) - U$,那么系统变成

$$\ddot{X} = F_0(X,\dot{X},W,U) + U \tag{6.1.20}$$

如果 $\boldsymbol{B} = \dfrac{\partial F}{\partial U}$ 比较接近单位矩阵 $\boldsymbol{I}$,那么在 X 和 U 之间并列 m 个自抗扰控制器可以实现解耦控制,如果 $\boldsymbol{B} = \dfrac{\partial F}{\partial U}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 的差别比较大,那么可以找一个比较接近 $\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{B}_0$ 把系统变成

$$\ddot{X} = F(X,\dot{X},W,U) - \boldsymbol{B}_0 U + \boldsymbol{B}_0 U$$

$$F_0(X,\dot{X},W,U) = F(X,\dot{X},W,U) - \boldsymbol{B}_0 U$$

$$\ddot{X} = F_0(X,\dot{X},W,U) + \boldsymbol{B}_0 U \tag{6.1.21}$$

然后按前述方法对这个系统进行解耦控制.

这样用自抗扰控制技术很容易实现很多耦合系统的解耦控制问题.

6.2 零极点配置设计方法

在2.6节2中已讨论过配置系统零点来与系统的已有极点相消,使系统的传递关系变成近似于1的闭环系统. 下面一般地讨论在系统设计中采用系统零点结构配置办法来简化控制器设计的问题.

设有串级对象

$$y = w(s)u = \frac{1}{p_1(s)}\frac{1}{p_2(s)}u \tag{6.2.1}$$

其中假定多项式 $p_2(s)$ 确切知道. 这时令

$$U = \frac{1}{p_2(s)}u \tag{6.2.2}$$

为虚拟控制量,那么系统变成

$$y = \frac{1}{p_1(s)}U \tag{6.2.3}$$

在这里,如果我们决定了虚拟控制量 $U(t)$,那么就有

$$u = p_2(s)U \tag{6.2.4}$$

实际控制量 u 是由虚拟控制量 $U(t)$ 的各阶微分的组合来确定的. 至于虚拟控制量 $U(t)$ 是对系统

$$y = \frac{1}{p_1(s)}U(t) \tag{6.2.5}$$

采用自抗扰控制器设计办法来确定(图6.2.1).

例1 设 $p_1(s) \equiv 1, p_2(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 2s + 1$,是稳定多项式. 设定值为 $v(t) \equiv 2$. 这时

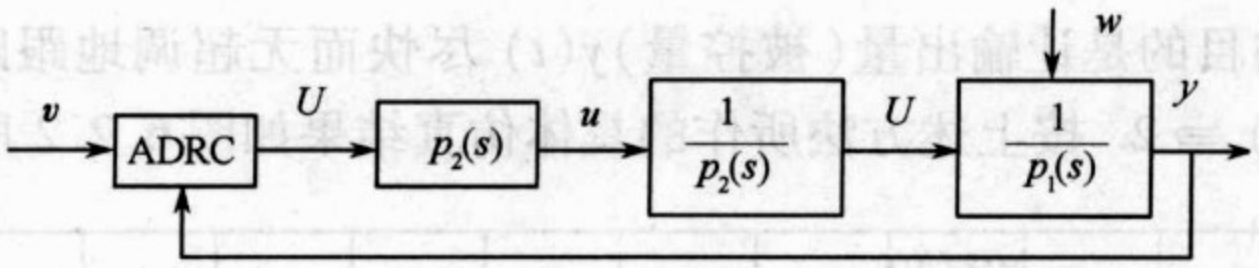


图 6.2.1

$$y \equiv \frac{1}{p_2(s)}u = U, u = p_2(s)U \tag{6.2.6}$$

现在我们确定 $U(t)$ 是用四阶跟踪微分器来跟踪设定值 $v(t) \equiv 2$ 的过程曲线,那么这个四阶跟踪微分器就同时给出过程曲线 $U(t)$ 的一阶、二阶、三阶、四阶导函数,从而就可以确定出实际的控制量 $u = p_2(s)U$. 跟踪设定值 $v(t) \equiv 2$ 的四阶跟踪微分器为

$$\begin{cases} f_0 = -r(r(r(r(v_1 - v(t)) + 4v_2) + 6v_3) + 4v_4) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + hv_3 \\ v_3 = v_3 + hv_4 \\ v_4 = v_4 + hf_0 \\ U(t) = v_1(t) \end{cases} \tag{6.2.7}$$

当然有 $\frac{dU}{dt} = v_2(t), \frac{d^2U}{dt^2} = v_3(t), \frac{d^3U}{dt^3} = v_4(t), \frac{d^4U}{dt^4} = f_0$,因此就有

$$u = p_2(t)U = f_0 + 2v_4 + 3v_3 + 2v_2 + v_1 \tag{6.2.8}$$

原系统的离散状态变量实现为

$$\begin{cases} \text{ff} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + hx_3 \\ x_3 = x_3 + hx_4 \\ x_4 = x_4 + h(\text{ff} + u) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.2.9}$$

控制的目的是让输出量(被控量)$y(t)$ 尽快而无超调地跟踪设定值 $v(t) \equiv 2$. 按上述方法所作的具体仿真结果如图 6.2.2 所示.

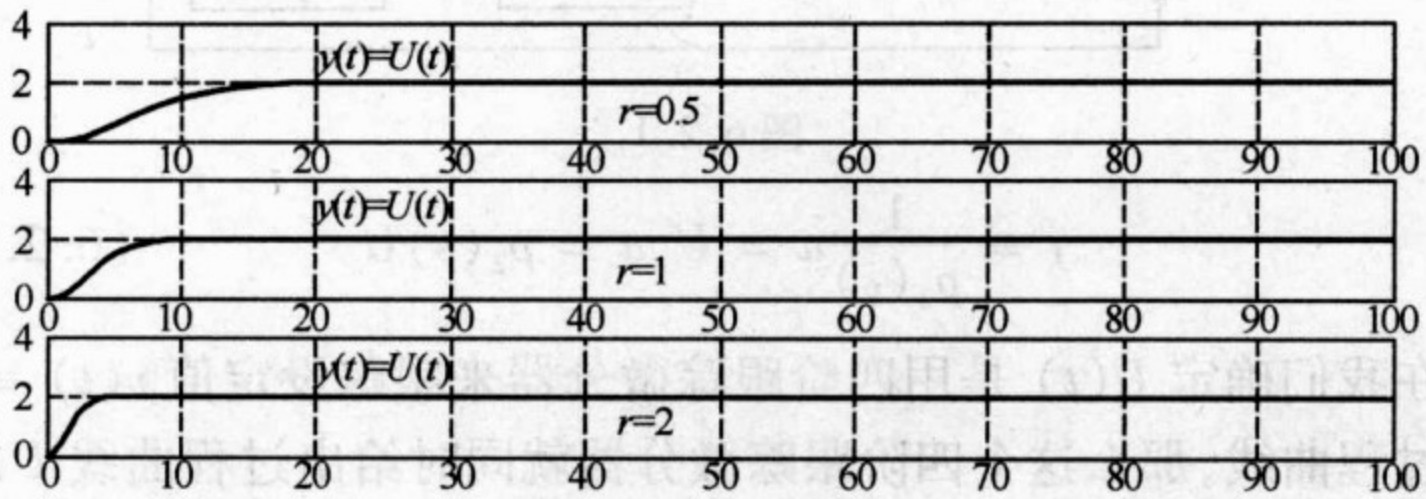


图 6.2.2

如果多项式 $p_1(s) \neq 1$,是二阶多项式 $p_1(s) = s^2 + a_2 s + a_1$,那么

$$y = \frac{1}{p_1(s)} U \tag{6.2.10}$$

在这里如果参数 a_1, a_2 确知,且 $p_1(s) = s^2 + a_2 s + a_1$ 稳定,那么按上述方法,又令虚拟控制量 $U_1 = \frac{1}{p_1(s)} U$,又可以用二阶跟踪微分器

$$\begin{cases} f_0 = -r(r(v_1 - v(t)) + 2v_2) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + hf_0 \\ U_1(t) = v_1(t) \end{cases} \tag{6.2.11}$$

来确定出 $U_1(t)$,然后根据公式 $U = p_1(s)U_1 = f_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2$ 来决定出 $U(t)$. 但是如果参数 a_1, a_2 时变或 $p_1(s) = s^2 + a_2 s + a_1$ 含有不确定因素,那么我们可以根据设定值 $v(t)$ 和被控输出 $y(t)$ 用自抗扰控制器来决定虚拟控制量 $U(t)$. 其具体算法如下:

$$
\begin{cases}
\mathrm{fh} = -r_0(r_0(v_{01} - v(t)) + 2v_{02}) \\
v_{01} = v_{01} + hv_{02} \\
v_{02} = v_{02} + h\mathrm{fh} \\
e = z_1 - y \\
z_1 = z_1 + h(z_1 - \beta_{01}e) \\
z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}e + b_0U) \qquad \text{（这是线性自抗扰控制器）} \\
z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}e) \\
e_1 = v_{01} - z_1, e_2 = v_{02} - z_2 \\
U = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - \dfrac{z_3}{b_0} \quad .
\end{cases}
\tag{6.2.12}
$$

然后把 $U(t)$ 送入四阶跟踪微分器中

$$
\begin{cases}
f_0 = -r(r(r(r(v_1 - U(t)) + 4v_2) + 6v_3) + 4v_4) \\
v_1 = v_1 + hv_2 \\
v_2 = v_2 + hv_3 \\
v_3 = v_3 + hv_4 \\
v_4 = v_4 + hf_0 \\
U(t) = v_1(t)
\end{cases}
\tag{6.2.13}
$$

决定出 $U(t)$ 的零阶，一阶，二阶，三阶，四阶导数 $v_1(t)$，$v_2(t)$，$v_3(t)$，$v_4(t)$ 及 f_0，于是实际的控制量 $u(t)$ 就由下式决定

$$
u = p_2(t)U = f_0 + 2v_4 + 3v_3 + 2v_2 + v_1 \tag{6.2.14}
$$

原对象的运动轨线是由下式递推决定

$$\begin{cases} f_1 = -a_1x_1 - a_2x_2 \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + h(f_1 + x_3) \\ f_2 = -x_3 - 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 \\ x_3 = x_3 + hx_4 \\ x_4 = x_4 + hx_5 \\ x_5 = x_5 + h(f_2 + u) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.2.15}$$

在上述算法中控制器各参数取为

采样步长:$h = 0.01$

安排过渡过程参数:$r_0 = 0.5$

四阶线性跟踪微分器的参采:$r = 50$

扩张状态观测器:$\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 3000, \beta_{03} = 30000$

误差反馈的增益:$\beta_1 = 1.0, \beta_2 = 1.5$

对象参数 $a_1 = 1.0, a_2 = 2.0$ 再加上不确定扰动 $\gamma \text{sign}(\sin(0.1t))$, $\gamma = 1.0$ 所作的仿真结果示于图6.2.3. 在这里四阶跟踪微分器的参数 r 不能太小,但要大到一定程度才行,在这个例子中 $r < 40$ 是不行的. 由于控制子系统 $y = \dfrac{1}{p_1(s)}U$ 的控制量 U 是用自抗扰控制器来决定的,因此这个子系统含有一定范围的不确定因素是允许的.

如果对象同时含有零极点,即对象为如下形式

$$y = \frac{q(s)}{p(s)}u \tag{6.2.16}$$

今令虚拟控制量 $U = q(s)u$,那么系统变成 $y = \dfrac{1}{p(s)}U$,而实际控制量为 $u = \dfrac{1}{q(s)}U$.

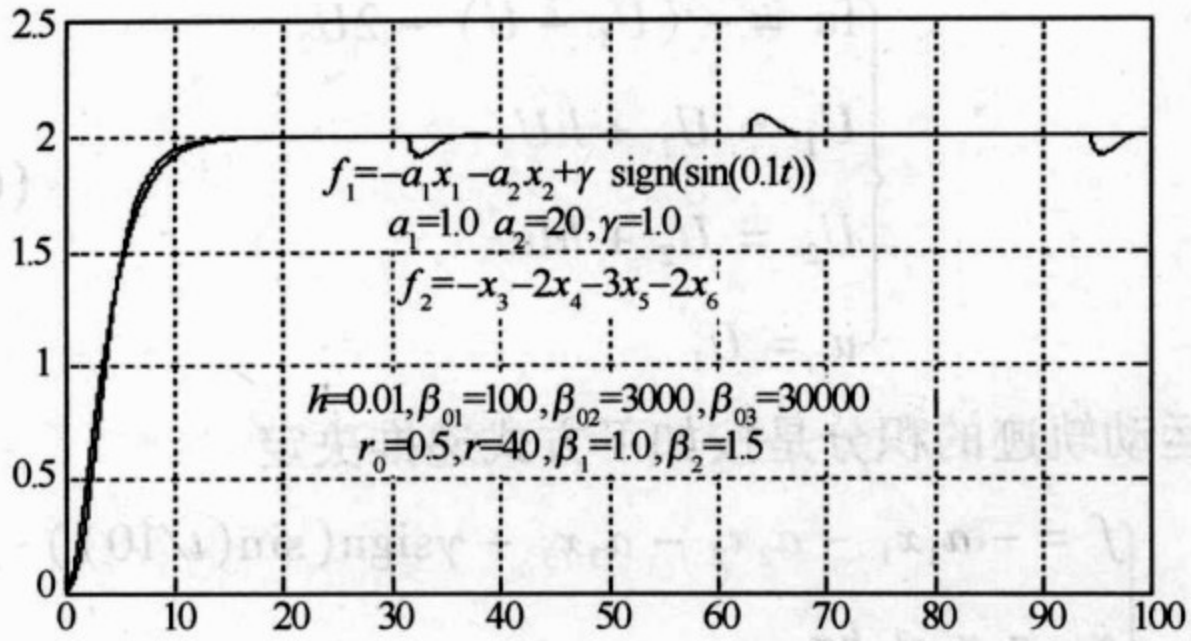


图 6.2.3

假定对象为“最小相位”系统,即 $q(s)$ 是稳定多项式,且确切知道. 这时我们可以用如下方式解决这类系统的控制问题. 首先用自抗扰控制器来决定虚拟控制量 $U(t)$,然后以 $U(t)$ 为输入,求解系统 $u=\dfrac{1}{q(s)}U$ 来决定实际控制量 $u(t)$.

设 $p(s)=s^3+a_3s^2+a_2s+a_1$,$q(s)=s^2+2s+1$,设定值为 $v(t)=2.0$. 对这个系统设计的控制算法为

$$\begin{cases} \mathrm{fs}=-r(r(r(v_1-v(t))+3v_2)+3v_3) \\ v_1=v_1+hv_2 \\ v_2=v_2+hv_3 \\ v_3=v_3+h\mathrm{fs} \\ e=z_1-y \\ z_1=z_1+h(z_2-\beta_{01}e) \\ z_2=z_2+h(z_3-\beta_{02}e) \\ z_3=z_3+h(z_4-\beta_{03}e+U) \\ z_4=z_4+h(-\beta_{04}e) \end{cases} \tag{6.2.17}$$

$$\begin{cases} e_1=v_1-z_1,e_2=v_2-z_2,e_3=v_3-z_3 \\ U=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3-z_4 \end{cases} \tag{6.2.18}$$

$$\begin{cases} \mathrm{fu} = -(U_1 - U) - 2U_2 \\ U_1 = U_1 + hU_2 \\ U_2 = U_2 + h\mathrm{fu} \\ u = U_1 \end{cases} \tag{6.2.19}$$

原对象运动轨迹的积分是按如下方式递推决定

$$\begin{cases} f = -a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + \gamma\mathrm{sign}(\sin(t/10)) \\ x_1 = x_1 + hx_2 \\ x_2 = x_2 + hx_3 \\ x_3 = x_3 + h(f + u) \\ y = x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases} \tag{6.2.20}$$

对象参数取 $a_1 = 1.0, a_2 = 2.0, a_3 = 3.0$，扩张状态观测器的参数为

$$\beta_{01} = 100.0, \beta_{02} = 3000.0, \beta_{03} = 30000.0, \beta_{04} = 200000.0$$

反馈增益取为

$$\beta_1 = 2.0, \beta_2 = 5.0, \beta_3 = 4.0$$

时的仿真结果如图 6.2.4 所示. 对象参数变成 $a_1 = -1.0, a_2 = -2.0, a_3 = -3.0$，即开环不稳定，而控制器参数保持不变时的仿真结果如图 6.2.5 所示.

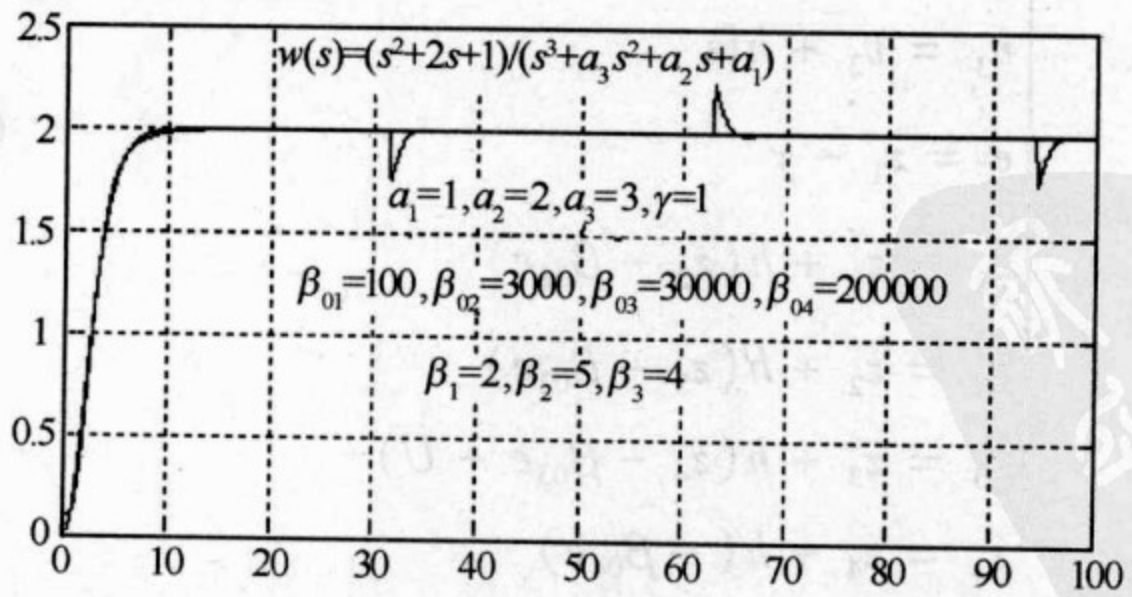


图 6.2.4

以上讨论说明，在传递函数中如果有部分稳定极点是确知

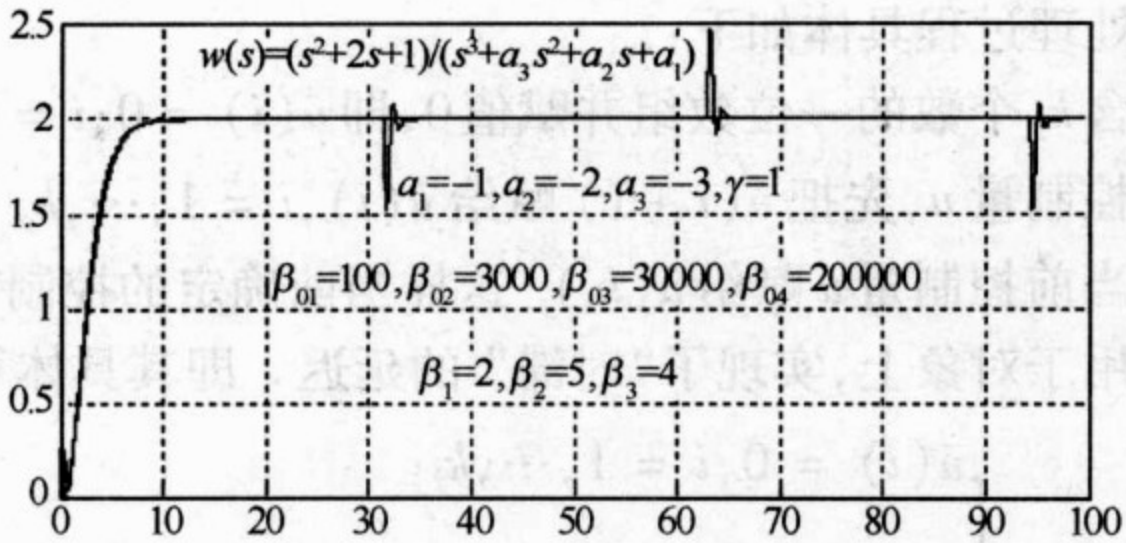


图 6.2.5

的,那么可以用配置相应零点来抵消其作用,从而改善闭环的动态品质. 如果部分稳定的零点是确知的,那么也可以用配置相应极点来抵消其作用,从而进一步改善闭环的动态品质.

在这里灵活选取应用"虚拟控制量"是很重要的一种手法.

6.3 时滞系统的自抗扰控制

本节主要讨论一阶惯性环节带时滞的对象的控制问题. 主要考察由如下传递函数

$$w(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + 1} \tag{6.3.1}$$

描述的对象

$$y = \frac{1}{Ts + 1} e^{-\tau s} u \tag{6.3.2}$$

的自抗扰控制问题. 这个对象的状态变量实现为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{T}(x(t) + u(t - \tau)) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{6.3.3}$$

因此,当前算出的控制量 $u(t)$ 只能过 τ 时间之后才能对对象起作用,即当前对系统起作用的控制量是 τ 时间之前算出的控制量. 假定时滞大小 τ 是采样步长 h 的整数倍,即 $\tau = k_t h$, k_t 为正整数. 那

么时滞的处理过程具体如下：

先开含 k_t 个数的一位数组并赋值0，即 $\bar{u}(i) = 0; i = 1, \cdots, k_t$；算出当前控制量 u，先把 $\bar{u}(i+1)$ 赋给 $\bar{u}(i)$，$i = 1, \cdots, k_t - 1$，然后把算出的当前控制量 u 赋给 $\bar{u}(k_t)$. 这样当前确定的控制量经过 k_t 步才能作用于对象上，实现了“时滞”的延迟. 即其具体算法为

$$\begin{cases} \bar{u}(i) = 0, i = 1, \cdots, k_t \\ \bar{u}(i) = \bar{u}(i+1), i = 1, \cdots, k_t - 1 \\ \bar{u}(k_t) = u \end{cases} \tag{6.3.4}$$

处理时滞系统控制可以采用如下四种不同办法：

(1) 无视时滞法. 在传递函数中把时滞算子近似成单位1，那么对象变成无时滞的纯惯性环节. 对此我们用一阶自抗扰控制器来确定出当前控制量 u，然后在每一次循环执行一次算法(6.3.4)并用 $\bar{u}(1)$ 来控制对象. 在这里，根据时滞的大小需要适当调整补偿因子 b_0，误差增益 β_1 和 ESO 的参数 β_{02}. 一般地，时滞大时 b_0 几乎成比例地增大.

(2) 提高阶次法. 在传递函数中把时滞算子近似成一阶惯性环节

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1}{1 + \tau s} \tag{6.3.5}$$

于是原来的时滞对象近似成二阶无时滞对象

$$w(s) = \frac{e^{-\tau s}}{Ts + 1} = \frac{1}{Ts + 1} \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{T\tau s^2 + (T + \tau)s + 1} \tag{6.3.6}$$

对此我们用二阶自抗扰控制器来决定当前控制量 u. 然后在每一次循环执行一次算法(6.3.4)并用 $\bar{u}(1)$ 来控制对象. 在此也需要适当调整参数 b_0, β_1.

(3) 输出预估法. 我们把传递关系(6.3.2)改写成

$$y_0 = e^{\tau s} y = \frac{1}{Ts + 1} u \tag{6.3.7}$$

那么从 u 到新的虚拟输出 y_0 之间传递关系变成一阶惯性环节，可以用一阶自抗扰控制器来决定出实际控制量 u，然后在每一次循环执行一次算法(6.3.4)并用 $\bar{u}(1)$ 来控制对象. 在此也需要适当调整参数 b_0，β_1. 这种做法实际上等价于著名 Smith 预估法.

(4) 输入预估法. 引入虚拟控制量

$$U = e^{-\tau s}u \tag{6.3.8}$$

那么从虚拟控制量 U 到实际输出 y 之间传递关系也变成一阶惯性环节，可以用一阶自抗扰控制器来决定出虚拟控制量 U 并根据关系式 $u = e^{\tau s}U$ 决定出实际控制量 u，然后在每一次循环执行一次算法(6.3.4)并用 $\bar{u}(1)$ 来控制对象. 在此也需要适当调整参数 b_0，β_1.

下面分别论述这四种方法并给出相应仿真结果.

(1) 无视时滞法. 我们把时滞算子近似成 1，那么传递关系变成

$$y = \frac{1}{Ts+1}u \tag{6.3.9}$$

对此对象的自抗扰控制算法为

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r_0, h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + h(z_2 + b_0 u) - \beta_{01}e \\ z_2 = z_2 - \beta_{02}e \\ e_1 = v_1 - z_1 \\ u = (\beta_1 e_1 - z_2)/b_0 \end{cases} \tag{6.3.10}$$

在时滞对象(6.3.2)中，取采样步长取 $h = 0.1\text{s}$，对象时间常数取 $T = 0.1$，控制算法(6.3.10)中的参数取 $r_0 = 0.02$，$\beta_{01} = 1$，$\beta_{02} = \frac{1}{3h}$；然后根据不同时滞调节 β_1，b_0 所作的仿真结果如图

6.3.1 所示. 在这里误差放大系数取成$\beta_1 = 1.0$. 这个算法对对象时间常数是比较敏感的,但是时间常数的估计误差不超过20% 是可以用的.

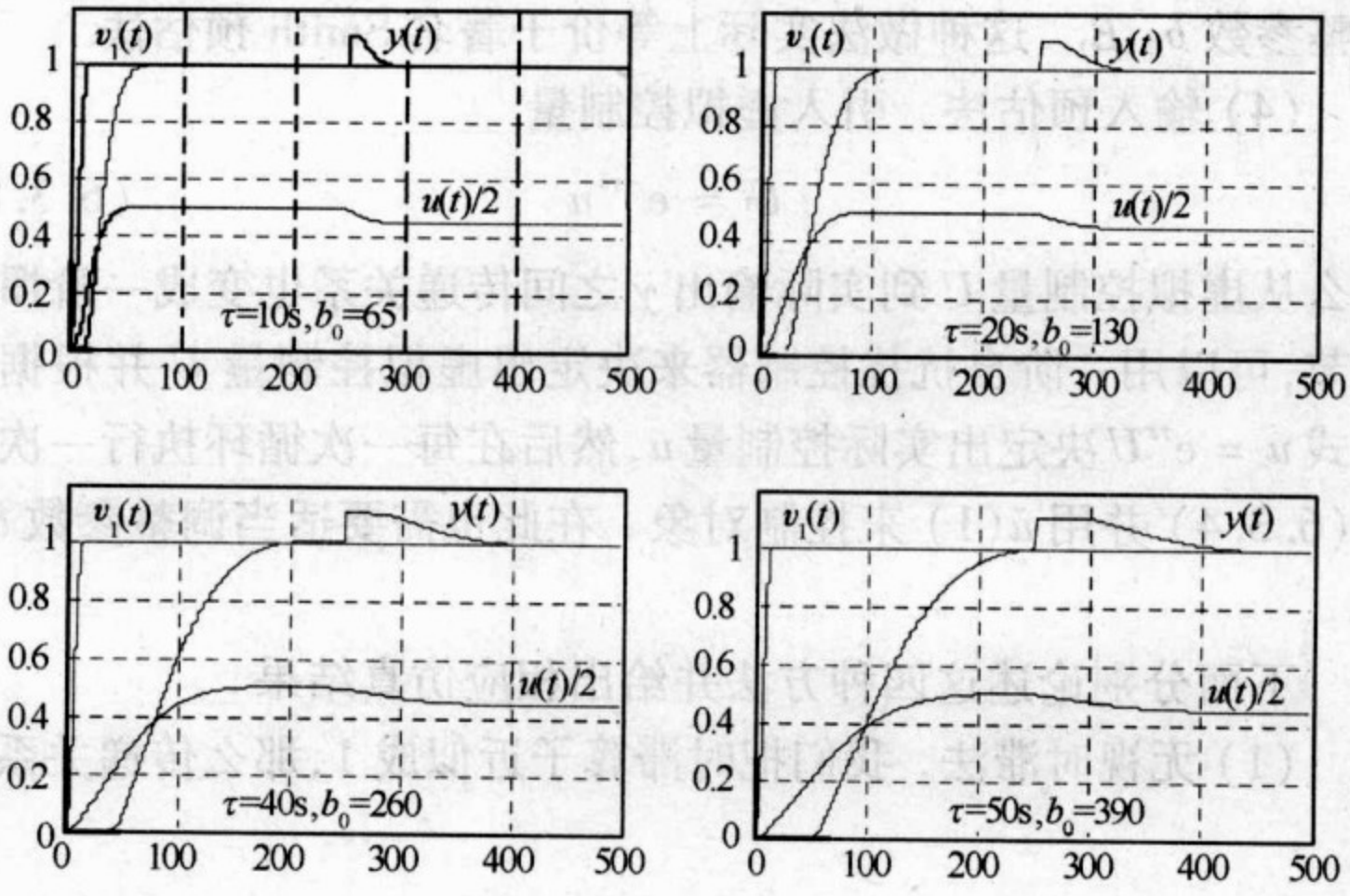


图6.3.1

(2) 阶次提高法. 用一阶惯性环节近似时滞算子把时滞对象看成二阶无时滞环节,用二阶自抗扰控制器进行控制,其具体算法为

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r_0, h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ e = z_1 - y \\ z_1 = z_1 + hz_2 - \beta_{01}e \\ z_2 = z_2 + h(z_3 + b_0u) - \beta_{02}e \\ z_3 = z_3 - \beta_{03}e \\ e_1 = v_1 - z_1; e_2 = v_2 - z_2 \\ u = -(\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) + z_3)/b_0 \end{cases} \tag{6.3.11}$$

控制算法(6.3.11) 中的参数取 $r_0 = 0.003, \beta_{01} = 1, \beta_{02} = \dfrac{1}{3h}$, $\beta_{03} = \dfrac{1}{(8h)^2}$, 然后根据时滞 τ 的不同调节 $r = 10, c = 0.15, h_1 = 0.45$ 所作的仿真结果如图 6.3.2 所示.

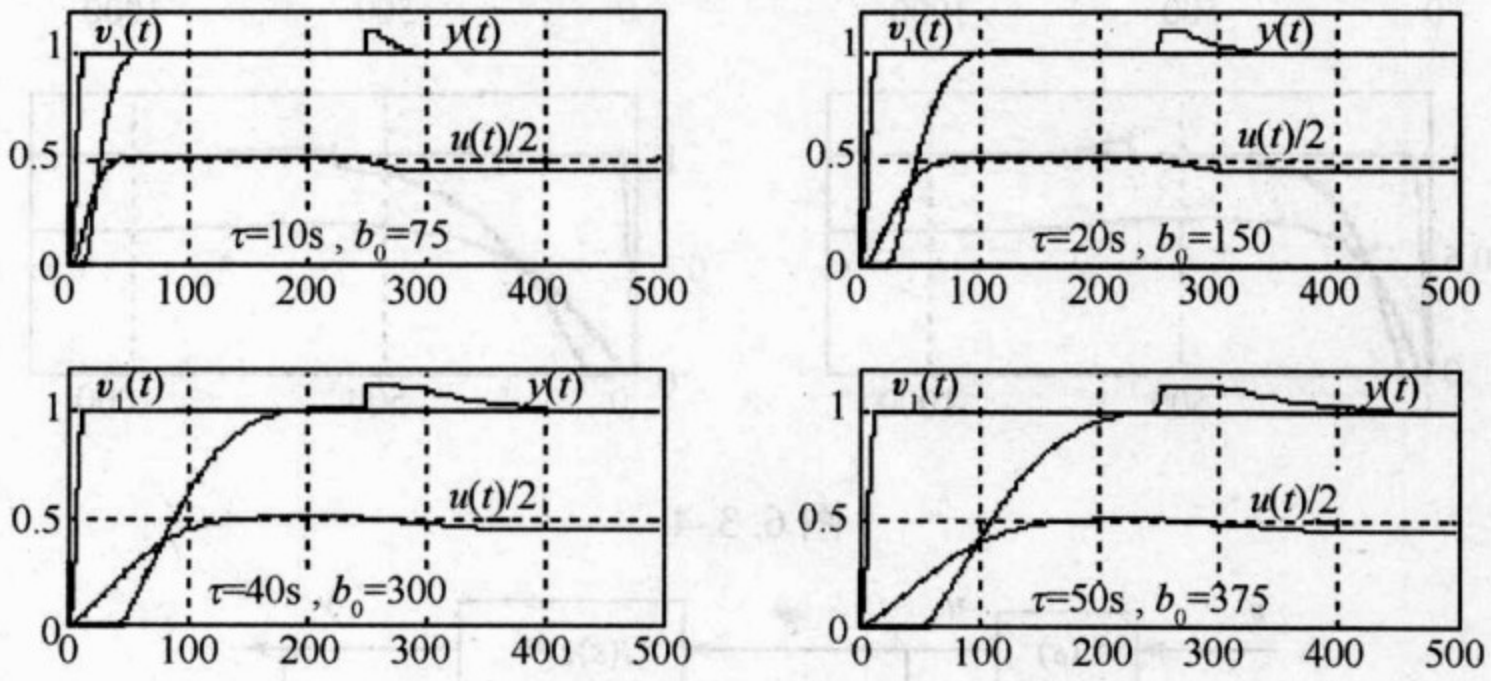


图 6.3.2

在这两种仿真结果的过渡过程时间基本上是时滞时间的五倍以上.

下面图6.3.3 和图6.3.4 分别显示的是控制器参数不变,对象时间常数上浮 30% 和下浮 30% 时的情形.

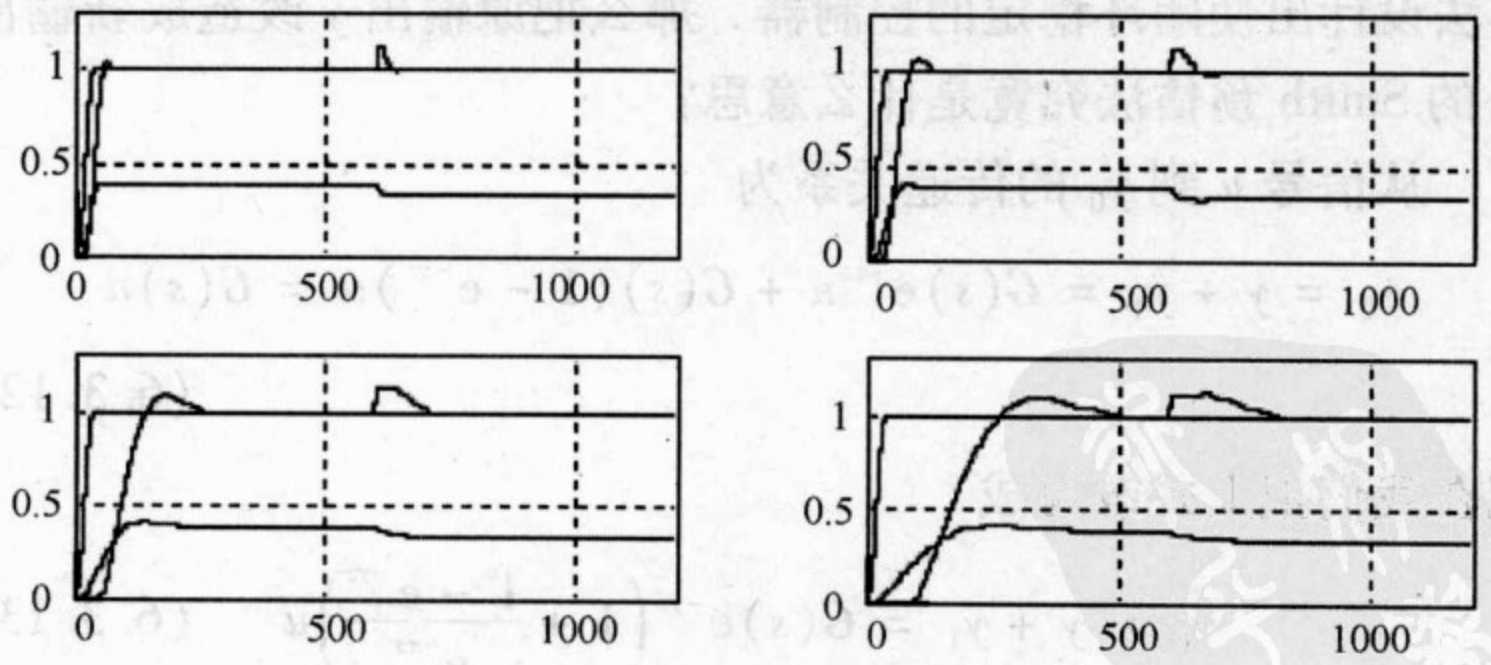


图 6.3.3

(3) 输出预估法. 我们先看看著名的 Smith 预估法的实质. Smith 预估法的基本框图为图 6.3.5.

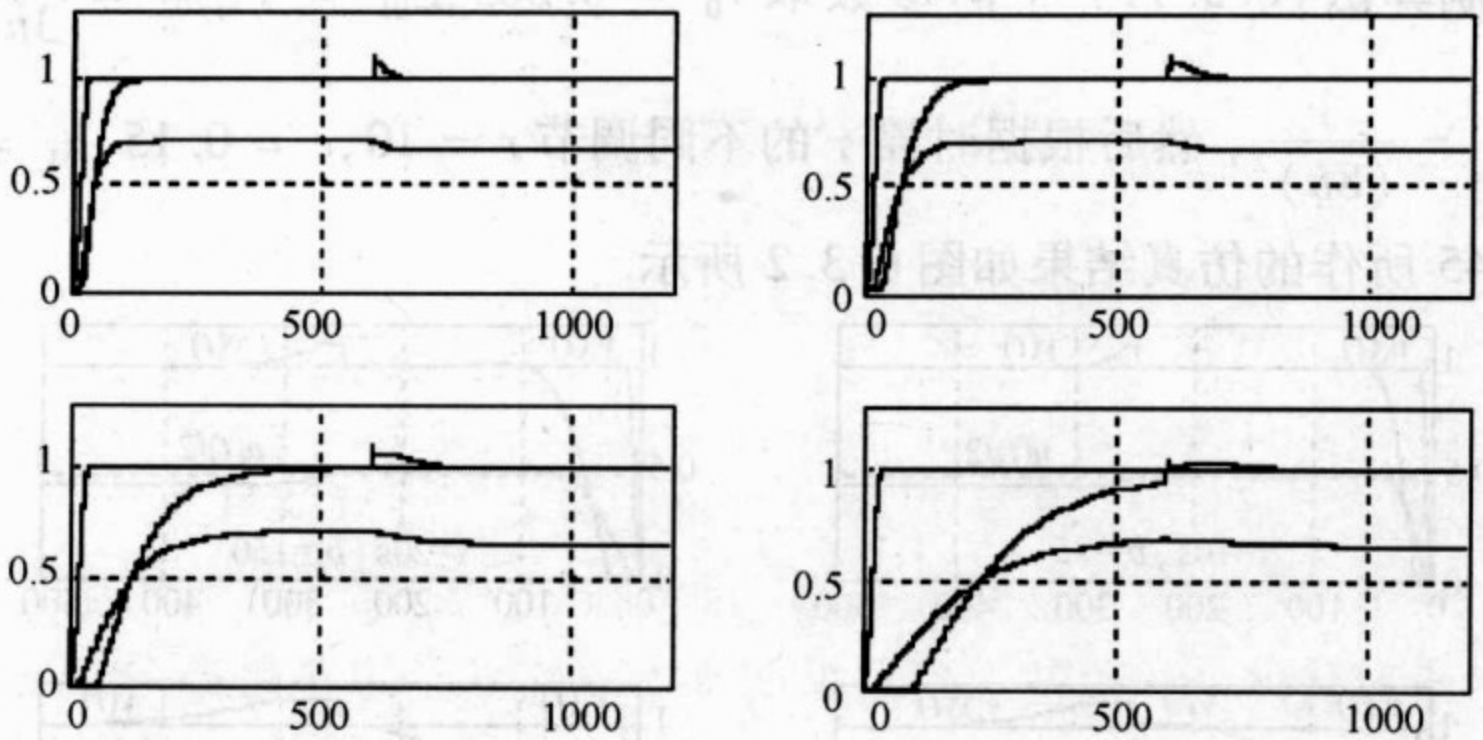


图 6.3.4

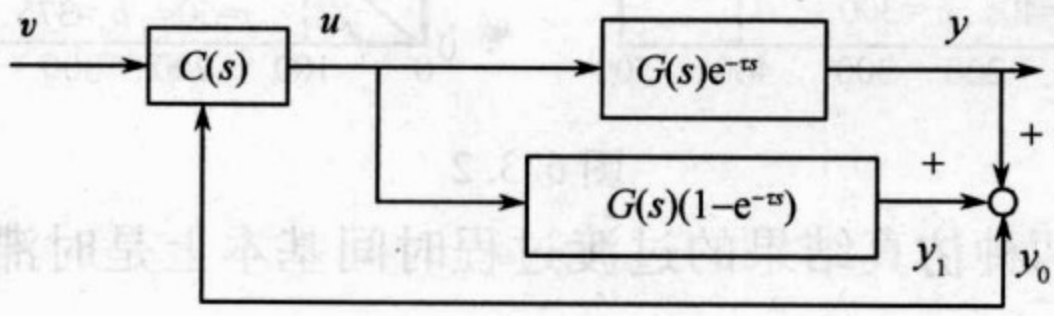


图 6.3.5

使输入 u 到新输出 y_0 之间传递关系变成没有时滞,从而可用常规办法设计出使闭环稳定的控制器. 那么把原输出 y 改造成新输出 y_0 的 Smith 预估法究竟是什么意思?

从信号 u 到 y_0 的传递关系为

$$y_0 = y + y_1 = G(s)e^{-\tau s}u + G(s)(1 - e^{-\tau s})u = G(s)u \tag{6.3.12}$$

现在我们把上式改写成

$$y_0 = y + y_1 = G(s)e^{-\tau s}\left(1 + \frac{1 - e^{-\tau s}}{e^{-\tau s}}\right)u \tag{6.3.13}$$

那么由于

$$\left(1 + \frac{1 - e^{-\tau s}}{e^{-\tau s}}\right) = \frac{1}{e^{-\tau s}} = e^{\tau s} \approx 1 + \tau s \tag{6.3.14}$$

于是

$$\begin{aligned} y_0 &= y + y_1 = G(s)e^{-\tau s}(1+\tau s)u = \\ &(1+\tau s)G(s)e^{-\tau s}u = \\ &y + \tau s y = \\ &y + \tau \frac{dy}{dt} = y + y_1 \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

最后一式明确表明 Smith“预估器”的含义:新输出 y_0 是对系统实际输出 y 加上用 y 的微分 sy 来外推 τ 时间预报的信号.

由于我们有滤波功能很强的跟踪微分器,就有可能用微分预估法取代 Smith 预估法. 这里的基本思路就是用跟踪微分器先处理系统实际输出 y 来得到预估的新输出 y_0,然后对这个新输出量 y_0 设计自抗扰控制器来完成时滞系统的控制. 于是可以给出如下典型算法

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r_0, h_0) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ f_y = \text{fhan}(y_1 - y, y_2, r_1, h) \\ y_1 = y_1 + hy_2 \\ y_2 = y_2 + hf_y \\ y_0 = y_1 + \alpha_y y_2 \\ e = z_1 - y_0 \\ z_1 = z_1 + h(z_2 + b_0 u) - \beta_{01} e \\ z_2 = z_2 - \beta_{02} e \\ e_1 = v_1 - z_1 \\ u = (\beta_1 e_1 - z_2)/b_0 \end{cases} \tag{6.3.16}$$

在这个控制算法中取参数 $r_0 = 0.1, r_1 = 0.1, \beta_{01} = 1, \beta_{02} = \dfrac{1}{2h}$,

$\beta_1 = 5, \alpha_y = 0.3$，然后根据时滞 τ 的大小调节 b_0 所作的仿真结果如图 6.3.6、图 6.3.7 所示.

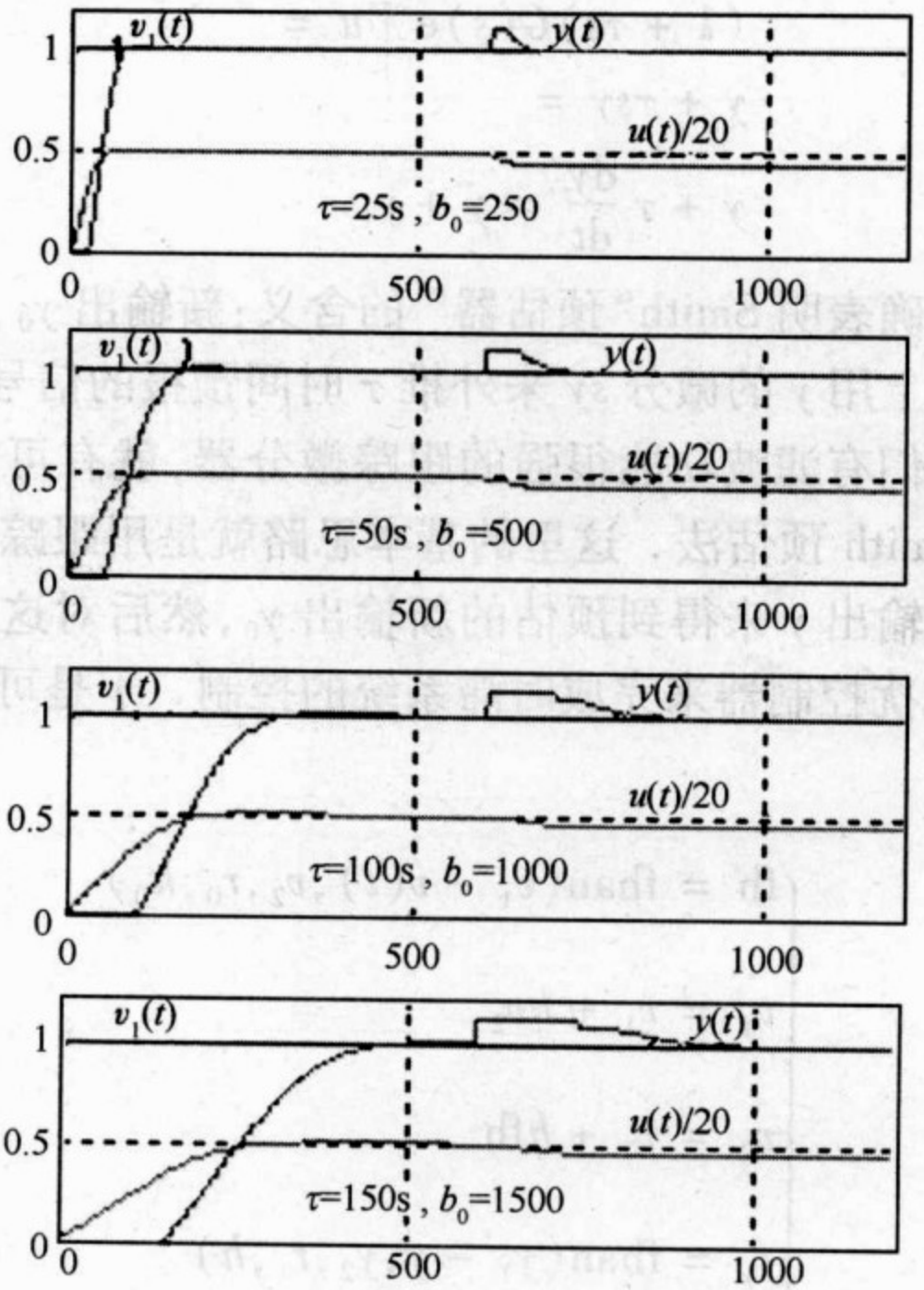
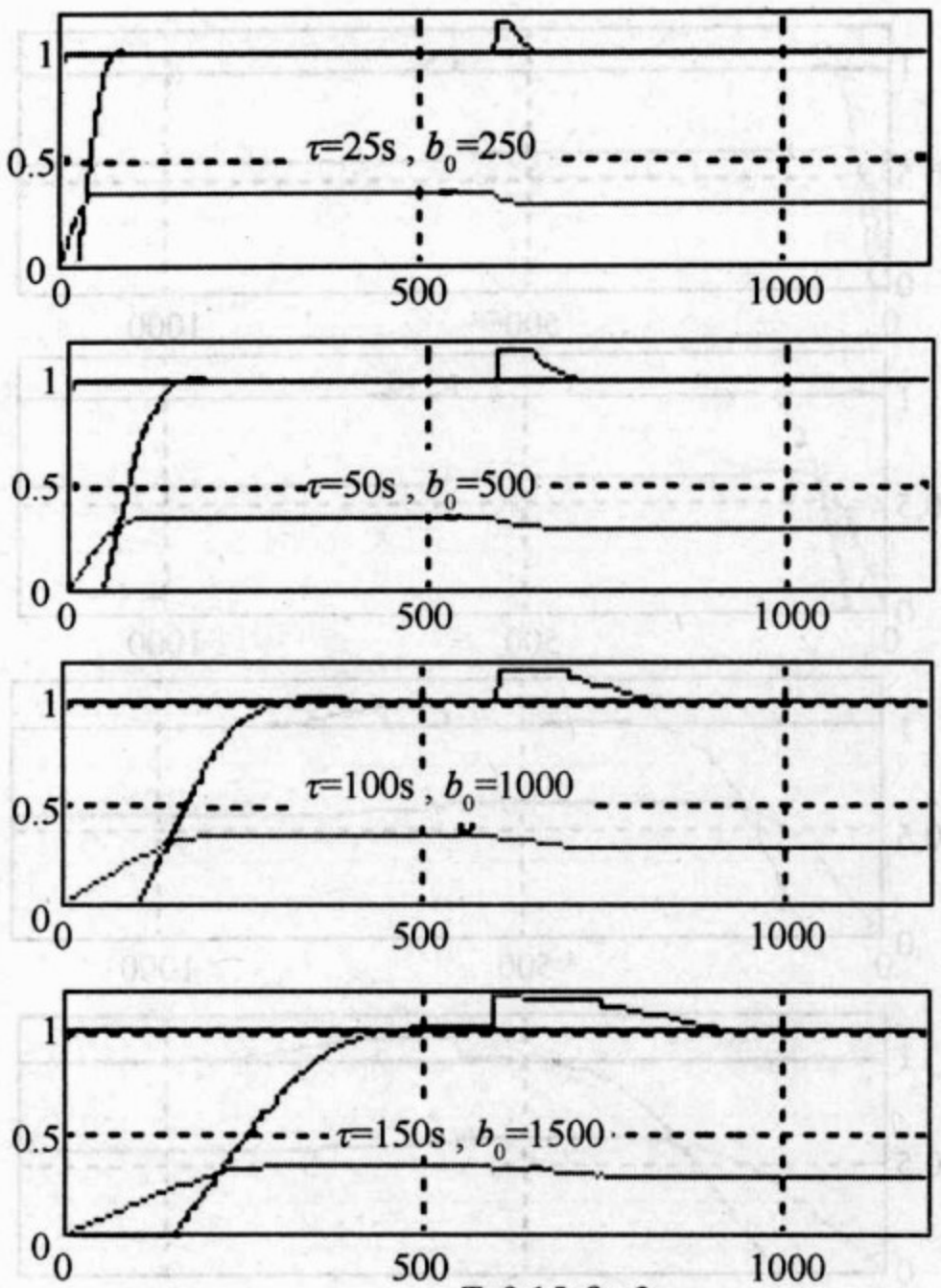


图 6.3.6

时间常数下降 20% 的情形，提高误差增益所得结果如图 6.3.8 所示. 这些仿真结果都使过渡过程时间缩短到时滞的 3.5 倍以下.

(4) 输入预估法. 引入虚拟控制量 $U = e^{-\tau s}u$，那么从虚拟控制量 U 到对象实际输出 y 之间关系变成无时滞的一阶惯性环节，于是就用一阶自抗扰控制器确定出虚拟控制量 U，然后根据关系式 $u = e^{\tau s}U$ 由虚拟控制量超前的办法确定出实际控制量 u. 其完整的控制算法为



T=0.15;β_1=3

图 6.3.7

$$
\begin{cases}
\text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r_0, h_0) \\
v_1 = v_1 + hv_2 \\
v_2 = v_2 + h\text{fh} \\
e = z_1 - y \\
z_1 = z_1 + h(z_2 + b_0 U) - \beta_{01} e \\
z_2 = z_2 - \beta_{02} e \\
e_1 = v_1 - z_1 \\
U = (\beta_1 e_1 - z_2)/b_0 \\
\text{fu} = \text{fhan}(u_1 - U, u_2, r_1, h) \\
u_1 = u_1 + hu_2 \\
u_2 = u_2 + h\text{fu} \\
u = u_1 + \alpha_u u_2
\end{cases}
\tag{6.3.17}
$$

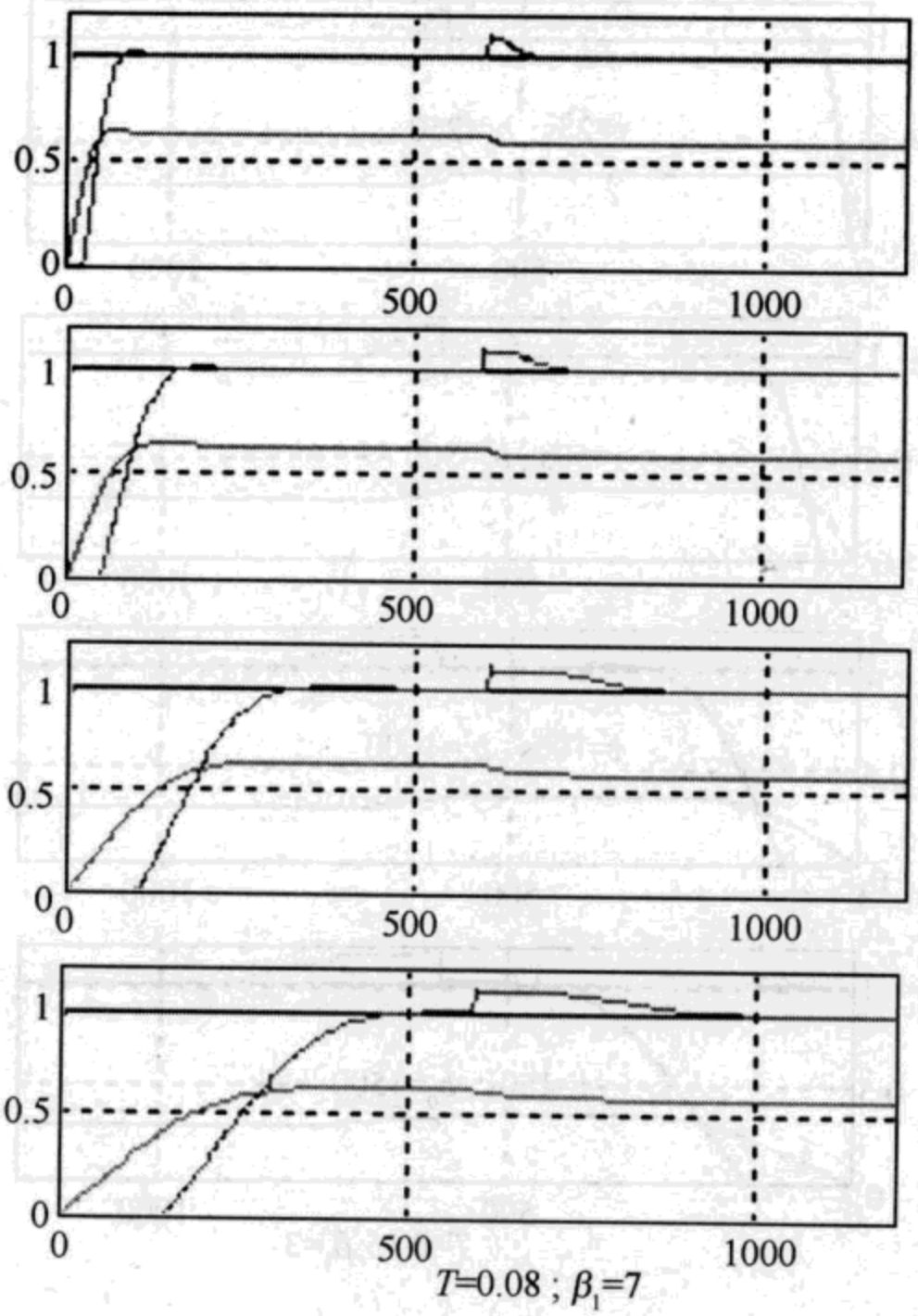


图 6.3.8

在这个算法中部分参数取成：$r_0 = 0.1$，$r_1 = 0.1$，$\beta_{01} = 1$，$\beta_{02} = \dfrac{1}{2h}$，$\beta_1 = 5$，$\alpha_u = 0.3$，然后根据时滞 τ 的大小调节 b_0 所做的仿真结果如图 6.3.9 所示.

对象时间常数提升40% 时只降低误差增益$\beta_1 = 3$，而时间常数降低 20% 时提升误差增益 $\beta_1 = 7$，其仿真效果如图 6.3.10、图 6.3.11 所示. 从这些仿真结果看，时滞与对象时间常数之比 $\dfrac{\tau}{T}$ 的大小已不能成为控制时滞对象易难的指标，这里仿真研究的对象其比值 $\dfrac{\tau}{T}$ 已不是小于 1 和一位数的问题，而是几十到几万的数量级，实际上可以说几乎没有限制. 对参数的选取来说，只要对某一

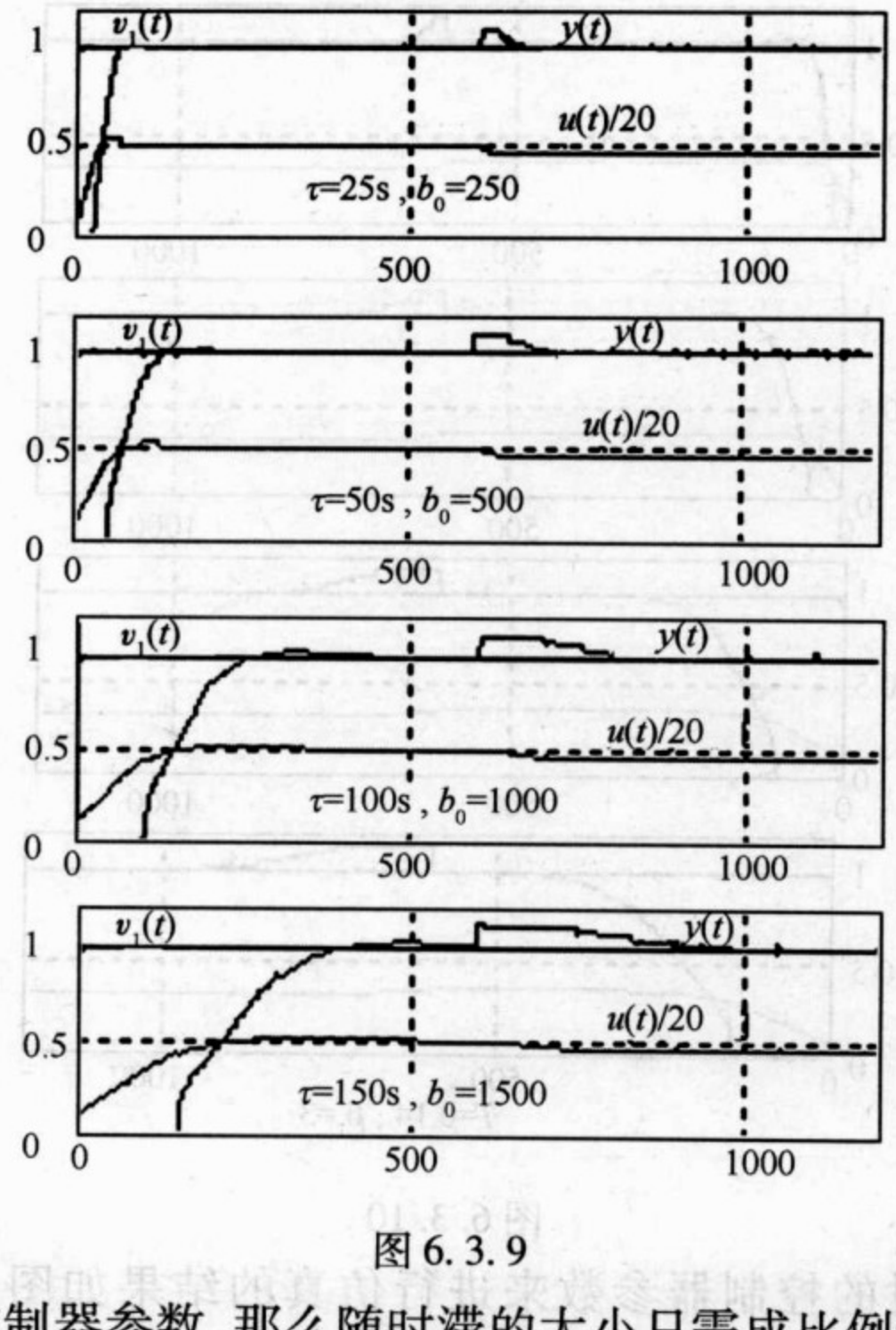


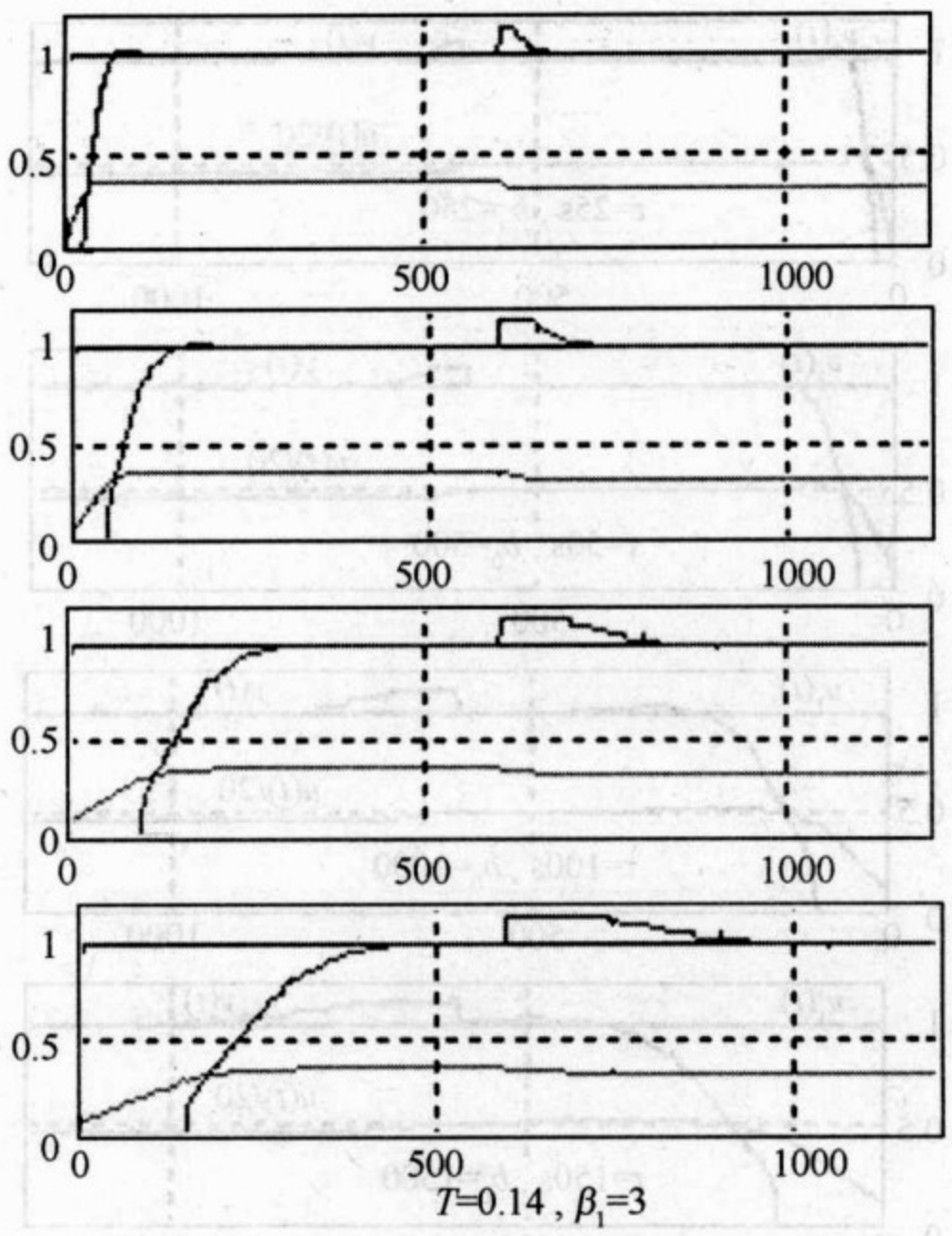
图 6.3.9

时滞调好控制器参数,那么随时滞的大小只需成比例地变动补偿因子 b_0 就可以了. 一旦调好了参数,对象的时间常数在 10% 之内的摄动是不会太影响被控量的控制效果的.

变时滞情形的具体处理办法如下:以平均时滞 hk_t 上下浮动 50% 为例,令 $k_t^0 = \text{aint}(1.5k_t)$

$$\begin{cases} u(i) = 0, i = 1,2,\cdots,k_t^0 \\ u(i) = u(i+1), i = 1,\cdots,\text{aint}(1.5k_t^0) - 1 \\ u(k_t^0) = u \\ i_0 = 1 + k_t^0 - \text{aint}(k_t(1 + 0.5\sin(\omega t))) \end{cases} \tag{6.3.18}$$

然后把从前面数第 i_0 个量 $u(i_0)$ 送入对象进行控制. 对上述对象 (6.3.9) 时滞在 $\tau = 100$s 附近上下变化 20% 的情形,就用常时滞



T=0.14 , β_1=3

图 6.3.10

τ = 100s 时的控制器参数来进行仿真的结果如图 6.3.12、图 6.3.13 所示.

图 6.3.12 是跟踪设定值的情形,而图 6.3.13 是时滞变化的曲线.

上述仿真结果表明:一阶惯性环节带时滞的对象的控制问题,如果对某一时间常数的对象调好了参数,那么随着时滞的大小只需成比例的增减补偿因子 b_0 一个参数就可以了. 补偿因子 b_0 是控制时滞对象的最重要的参数. 能否确定出对象的时间常数和补偿因子 b_0 之间的关系?是一个值得探讨的问题. 如果对象本身是二阶对象,而用的是 $\mathrm{fhan}(e_1, ce_2, r, h_0)$ 反馈形式,那么除补偿因子 b_0 之外还有精度因子 h_0 也是需要调整的重要参数. 一般地,随着时滞变大这两个参数都得调大才行. 然而上述自抗扰控制器算法对对象时间常数的变化是比较敏感的,即控制器的鲁棒性差一些,但

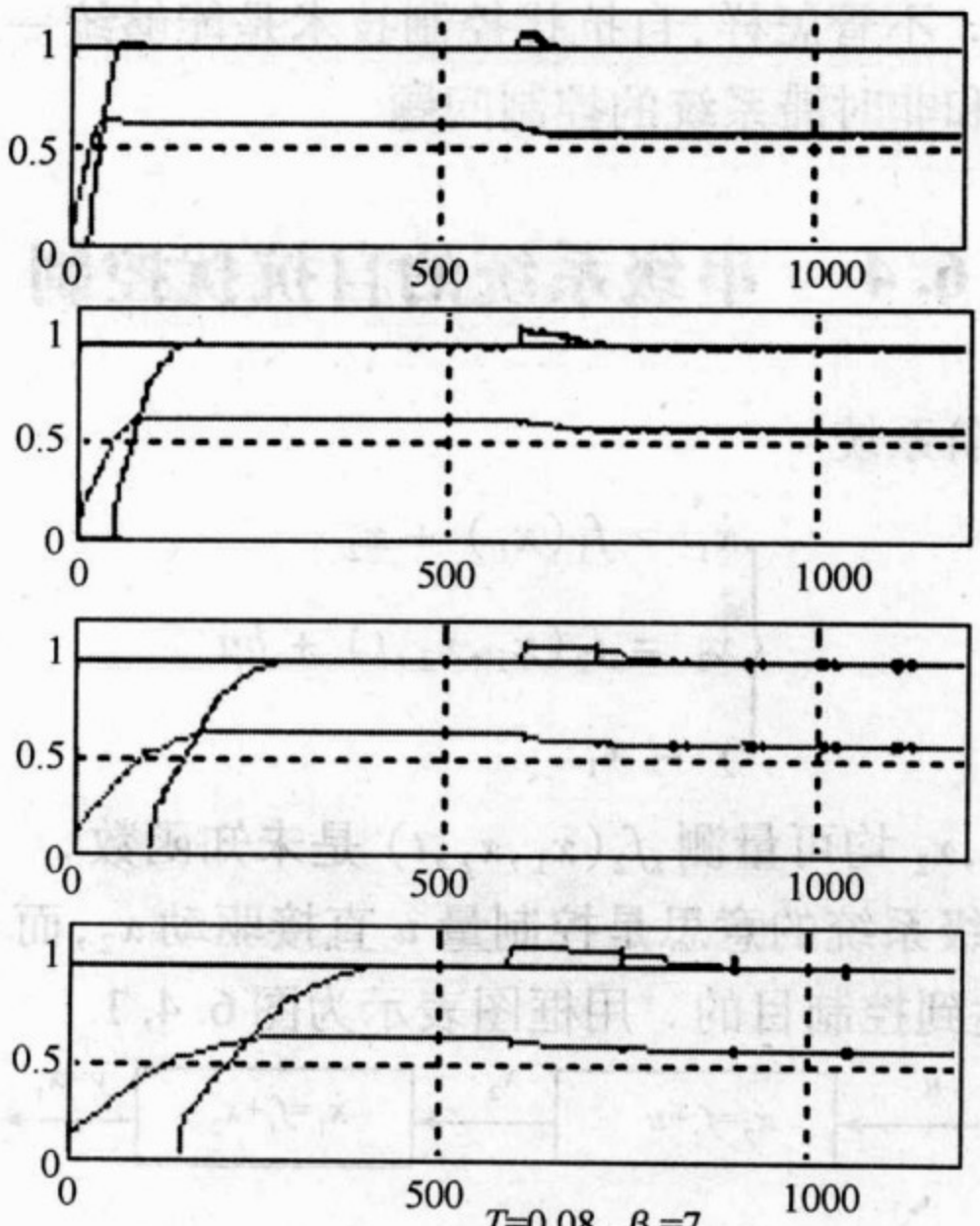


图 6.3.11

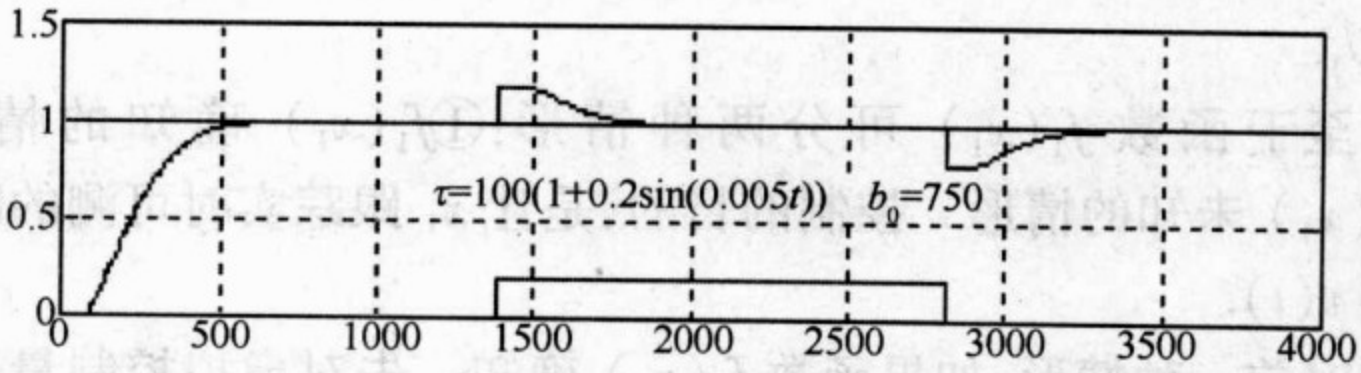


图 6.3.12

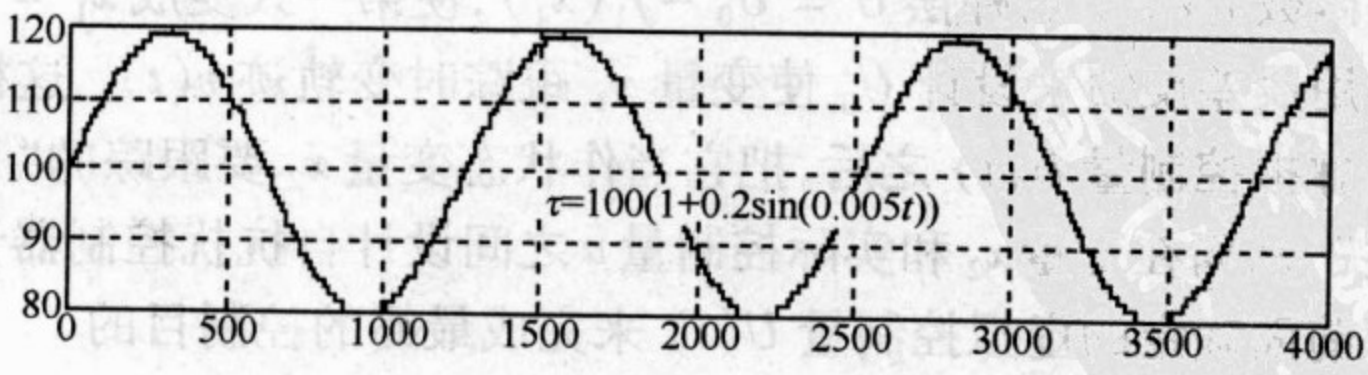


图 6.3.13

是对大时滞对象调好的参数,可以用于小时滞对象和无时滞对象的控制上(控制效果不一定理想,但能够达到控制目的)但翻过来

就不一定行．不管怎样，自抗扰控制技术是能够统一地处理时滞系统的控制和非时滞系统的控制问题．

6.4 串级系统的自抗扰控制

设有二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, t) + bu \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.4.1}$$

式中假定 x_1, x_2 均可量测，$f_2(x_1, x_2, t)$ 是未知函数．

所谓串级系统的意思是控制量 u 直接驱动 x_2，而 x_2 再去直接驱动 x_1 来达到控制目的．用框图表示为图 6.4.1.

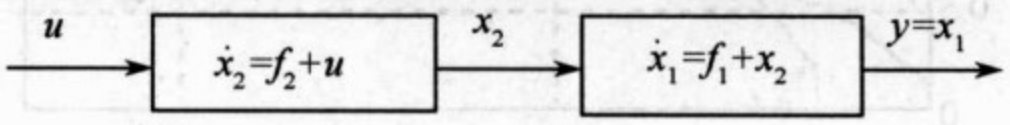


图 6.4.1

在此我们把状态变量 x_2 当作控制状态变量 x_1 的“虚拟控制量”U_1.

至于函数 $f_1(x_1)$ 可分两种情形：①$f_1(x_1)$ 确知的情形；②$f_1(x_1)$ 未知的情形．控制的目的，是让 x_1 跟踪实时可测的时变轨迹 $v(t)$.

对前一种情形，如果函数 $f_1(x_1)$ 确知．先对虚拟控制量进行确知函数 $f_1(x_1)$ 的补偿 $U = U_0 - f_1(x_1)$，使第一式变成 $\dot{x}_1 = U_0$，然后用误差反馈来设计 U_0 使变量 x_1 跟踪时变轨迹 $v(t)$．这样确定了虚拟控制量 $U(t)$ 之后，把它当作状态变量 x_2 要跟踪的“目标轨迹”，从而在变量 x_2 和实际控制量 u 之间设计自抗扰控制器让 x_2 跟踪前面确定的虚拟控制量 $U(t)$ 来完成最终的控制目的．

对后一种情形，当函数 $f_1(x_1)$ 未知或含有不确定因素时，根据设定轨迹 $v(t)$ 用自抗扰控制器来生成虚拟控制量 $U(t)$，然后把它当作状态变量 x_2 要跟踪的“目标轨迹”，从而在第二式中可以设计实

际控制量 $u(t)$ 了．这就是解决串级系统控制问题的基本思路．

一般的，也可以解决多级串联型系统的控制问题．如对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = f_2 + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1} + x_n \\ \dot{x}_n = f_n + u \end{cases} \tag{6.4.2}$$

中假定所有状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都能够量测．我们把状态变量 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 依次当作控制状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的“虚拟控制量”$U_1, U_2, \cdots, U_{n-1}$，然后依次决定虚拟控制量 U_i，即把 x_{i+1} 当作控制状态变量 x_i 的虚拟控制量 U_i．一旦确定了这个虚拟控制量 U_i，就把它当作状态变量 x_{i+1} 要跟踪的“目标轨线”．这样依次下去最后可确定出实际控制量 u 了．当函数 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ 确知时用简单的补偿与简单的误差反馈法，而函数 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ 未知或含有不确定因素时要用自抗扰控制器，即把状态变量 x_{i+1} 当作控制状态变量 x_i 的“虚拟控制量”$U_i(t)$，同时又把 $U_i(t)$ 当作状态变量 x_{i+1} 要跟踪的“目标轨迹”来设计下一个 $U_{i+1}(t)$．最后设计实际的控制量 $u(t)$．在这个过程中每一次只设计一阶对象的控制器，即把 n 阶对象的控制问题化成 n 个一阶对象的控制问题来解决．现代控制理论中的所谓“back-stepping”方法，其基本思想是与上述方法一致，但在每一步的具体处理方法上大有区别．这里的每一步是简单的补偿和误差反馈，或一阶自抗扰控制方法，但“back-stepping”方法是一步步递推构造复杂的 Lyapunov 函数的办法来设计控制器的．

例 1　设有系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\operatorname{sign}(t - 600) + 1}{2} + bu \cdots 2 \\ y = x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3 \end{cases} \tag{6.4.3}$$

被控输出为 $y = x_1$，状态 x_1, x_2 都能够量测，第 1 式中的函数 x_1^2 是已知的（即设计控制器时可以利用），但第 2 式中的函数 $\frac{\text{sign}(t-600)+1}{2}$ 是未知的（设计控制器时不能利用）.

在第 1 式中把变量 x_2 当作控制 x_1 的虚拟控制量，从而把虚拟控制量 $U_1 = x_2$ 取成

$$U_1 = \beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) - x_1^2 \tag{6.4.4}$$

那么第 1 式变成

$$\dot{x}_1 = \beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) \tag{6.4.5}$$

系统输出 $y = x_1$ 能够跟踪设定值 v_0. 下面的问题是如何用实际的控制量 u 来控制第 2 式，使状态 x_2 跟踪上面计算出的 $\beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) - x_1^2$？

现在我们把 $\beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) - x_1^2$ 当作状态 x_2 要跟踪的设定值，用自抗扰控制器来进行控制. 这时在第 2 式中的函数 $\frac{\text{sign}(t-600)+1}{2}$ 的形式和大小已经并不重要了，总能用自抗扰控制器确定出控制量 $u(t)$ 来控制 x_2 使它很好地跟踪 $\beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) - x_1^2$，从而让系统输出 $y = x_1$ 达到目标值 v_0. 其具体算法为

$$\begin{cases} x_2^* = r_0 \text{fal}(v(t) - x_1, 0.5, h) - x_1^2(t) \\ e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 + u) - \beta_{01} e \\ z_2 = z_2 - \beta_{02} \text{fe} \\ e_1 = x_2^* - z_1, u = \dfrac{\beta_2 \text{fal}(e_1, 0.5, h) - z_2}{b_0} \end{cases} \tag{6.4.6}$$

可调参数有 r_0, β_1 等. r_0 决定 $y = x_1$ 跟踪目标值 v_0 的快速程度，β_1 决定 x_2 跟踪 $\beta_1 \text{fal}(v_0 - x_1, 0.5, \delta) - x_1^2$ 的品质的参数.

取 $h = 0.1, v_0 = 1.0, \beta_{01} = 1, \beta_{02} = 1/(2h)$ 时的仿真结果如

图 6.4.2 所示.

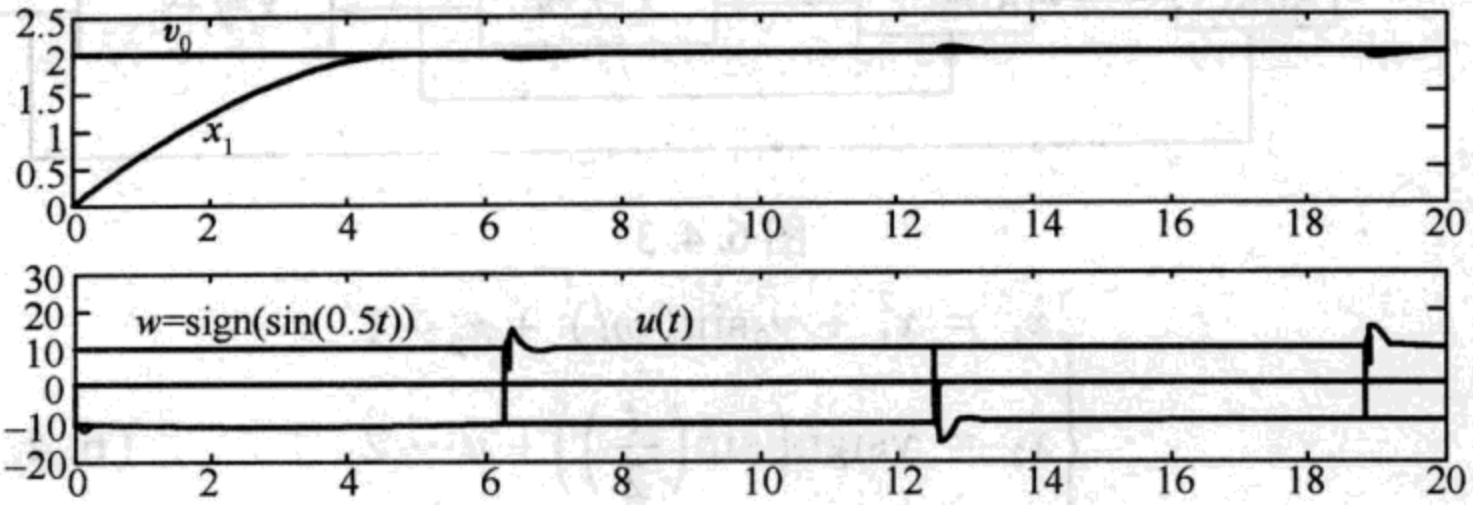


图 6.4.2

后一情形,当函数$f_1(x_1)$未知. 这时我们同样把状态x_2当作控制状态x_1的虚拟控制量,用自抗扰控制器来确定让x_1跟踪目标$v(t)$的控制量$x_2^*(t)$,然后以这个$x_2^*(t)$为目标轨迹,对第二式用自抗扰控制器来确定让状态x_2跟踪$x_2^*(t)$的控制量$u(t)$,这就是让系统输出x_1跟踪设定值$v(t)$的控制量. 这种控制方式是能够抑制f_1和f_2中所含不确定因素作用的.

整个控制算法为

$$\begin{cases} v_1 = v_1 - hr_0\text{fal}(v_1 - v, 0.5, h) \\ e = z_{11} - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - 100e + u_1) \\ z_{12} = z_{12} + h(-300\text{fe}) \\ e_1 = v_1 - z_{11} \\ u_1 = \beta_1\text{fal}(e_1, \alpha_1, \delta_1) - z_{12} \\ e = z_{21} - x_2, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h) \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - 100e + u) \\ z_{22} = z_{22} + h(-300\text{fe}) \\ e_2 = u_1 - z_{21} \\ u = \beta_2\text{fal}(e_2, \alpha_2, \delta_2) - z_{22} \end{cases} \tag{6.4.7}$$

这个过程用框图表示为图 6.4.3.

例 2 对上一个例子的第一式加上不确定项$w(t) = \gamma_0\sin(\omega t)$

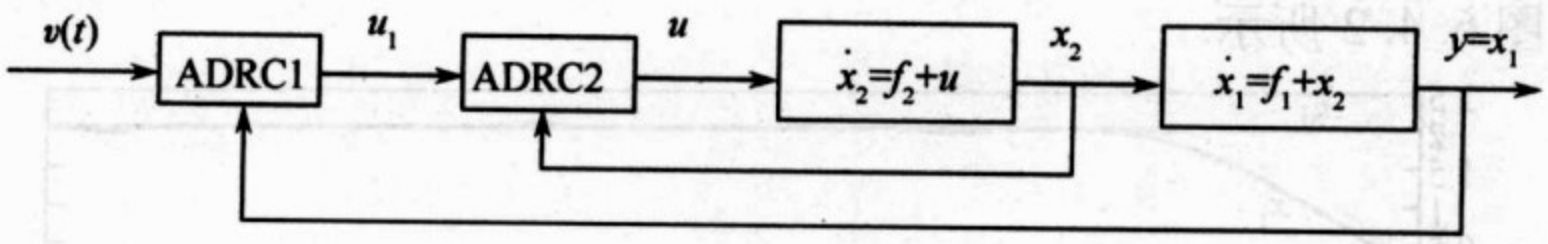


图 6.4.3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + \gamma_0 \sin(\omega t) + x_2 \cdots 1 \\ \dot{x}_2 = \gamma \operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) + u \cdots 2 \\ y = x_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 3 \end{cases} \tag{6.4.8}$$

取对象参数为 $\omega = 0.3, \gamma_0 = 5.0, \gamma = 10.0$，而控制器参数取成

$$h = 0.01, \beta_{01} = 100.0, \beta_{02} = 300.0, r_0 = 1.0,$$

$$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 1.0, \beta_1 = 1.0, \beta_2 = 50.0$$

时的仿真结果如图 6.4.4 所示．在这里第 1 式中的不确定因素的影响和第 2 式中的不确定因素的影响都很好的被抑制掉了．

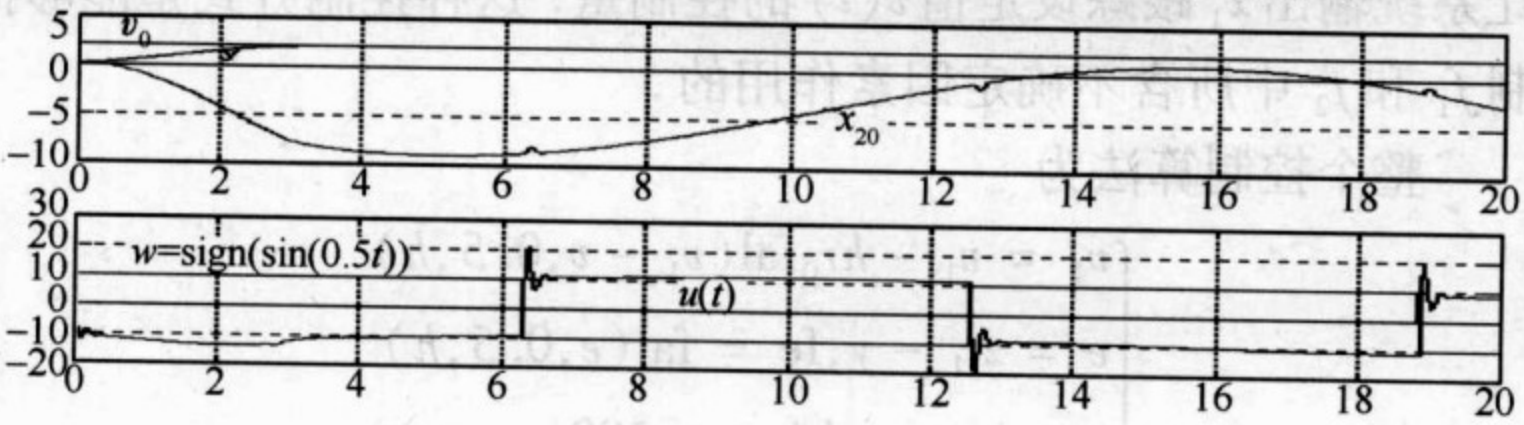


图 6.4.4

例 3　设有三阶被控对象

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = w_1(t) + x_2 \\ \dot{x}_2 = w_2(t) + x_3 \\ \dot{x}_3 = w_3(t) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.4.9}$$

假定变量 x_1, x_2, x_3 都能量测，控制目标是让变量 x_1 快速无超调地跟踪设定值 $v = 1.0$. 扰动 $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ 是不确定因素，假定为

$$w_1(t) = 10\operatorname{sign}(\sin(0.6t)), w_2(t) = 10\operatorname{sign}(\sin(0.7t)),$$

$$w_3(t) = 10\operatorname{sign}(\sin(0.8t))$$

按上述思想设计如下控制算法:把 x_2 作为虚拟控制量,让 x_1 跟踪设定值 $v = 1.0$ 的控制算法为

$$\begin{cases} v_1 = v_1 - hr_0\mathrm{fal}(v_1 - v, 0.5, h) & \text{安排过渡过程} \\ e = z_{11} - x_1, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) & \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01}e + u_1) & \\ z_{12} = z_{12} + h(-\beta_{02}\mathrm{fe}) & \text{关于 } x_1 \text{ 的扩张状态观测器} \\ e_1 = v_1 - z_{12} & \text{生成误差} \\ u_1 = \beta_1\mathrm{fal}(e_1, 0.5, 1.0) - z_{12} & \text{反馈控制与扰动补偿} \end{cases} \tag{6.4.10}$$

以 x_3 作为虚拟控制量,让 x_2 跟踪上面算出的虚拟控制量 u_1 的控制算法为

$$\begin{cases} e = z_{21} - x_2, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) & \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01}e + u_2) & \\ z_{22} = z_{22} + h(-\beta_{02}\mathrm{fe}) & \text{关于 } x_2 \text{ 的扩张状态观测器} \\ e_2 = u_1 - z_{21} & \text{生成误差} \\ u_2 = \beta_2\mathrm{fal}(e_2, 0.5, 1.0) - z_{22} & \text{误差反馈和扰动补偿} \end{cases} \tag{6.4.11}$$

然后用实际控制量 u 来控制变量 x_3,让它跟踪上面算出的虚拟控制量 u_2 的控制算法为

$$\begin{cases} e = z_{31} - x_3, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) & \\ z_{31} = z_{31} + h(z_{32} - \beta_{01}e + u) & \\ z_{32} = z_{32} - h\beta_{02}\mathrm{fe} & \text{关于 } x_3 \text{ 的扩张状态观测器} \\ e_3 = u_2 - z_{31} & \text{生成误差} \\ u = \beta_3\mathrm{fal}(e_3, 0.5, 1.0) - z_{32} & \text{误差反馈和扰动补偿} \end{cases} \tag{6.4.12}$$

对系统(6.4.9)设计三个一阶自抗扰控制器——ADRC1、ADRC2、ADRC3,其连接结构如图 6.4.5 所示. 在这里,设计控制

器 ADRC1 时，我们把从虚拟控制量 u_1 到变量 x_2 的传递关系当作“1”来看待；而设计控制器 ADRC2 时是把从虚拟控制量 u_2 到变量 x_3 的传递关系当作“1”来看待；最后设计控制器 ADRC3 是让变量 x_3 尽可能好地跟踪已确定的虚拟控制量 u_2.

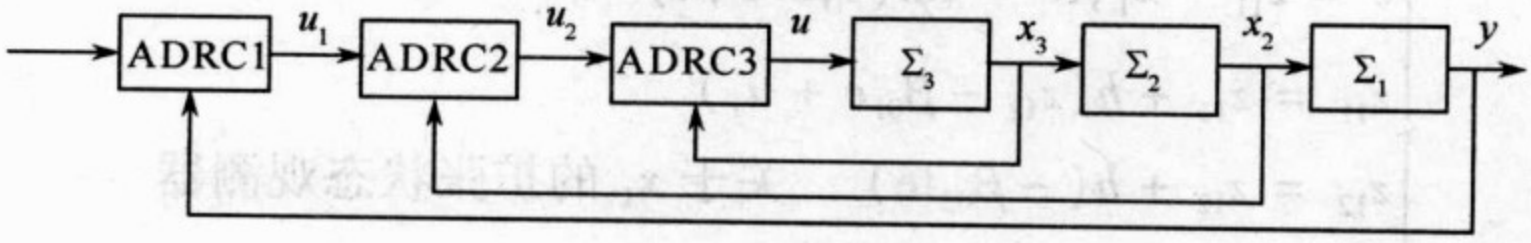


图 6.4.5

对上述三阶对象(6.4.9) 取控制器参数

$$\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, r_0 = 1, \beta_1 = 4.0, \beta_2 = 60.0, \beta_3 = 500.0$$

来所做的仿真结果如图 6.4.6 所示.

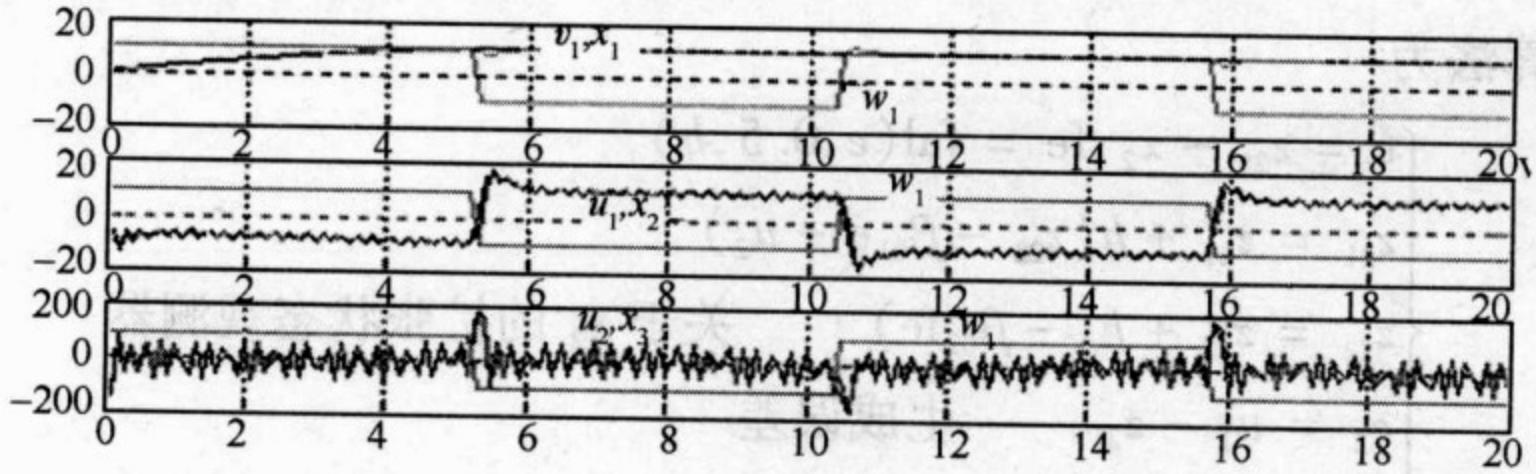


图 6.4.6

把对象扰动改成

$$w_1(t) = 20\text{sign}(\sin(0.5t)), w_2(t) = 100\text{sign}(\sin(1.0t)),$$

$$w_3(t) = 100\text{sign}(\sin(1.5t))$$

但控制器参数不变所作的仿真结果如图 6.4.7 所示. 这说明这样

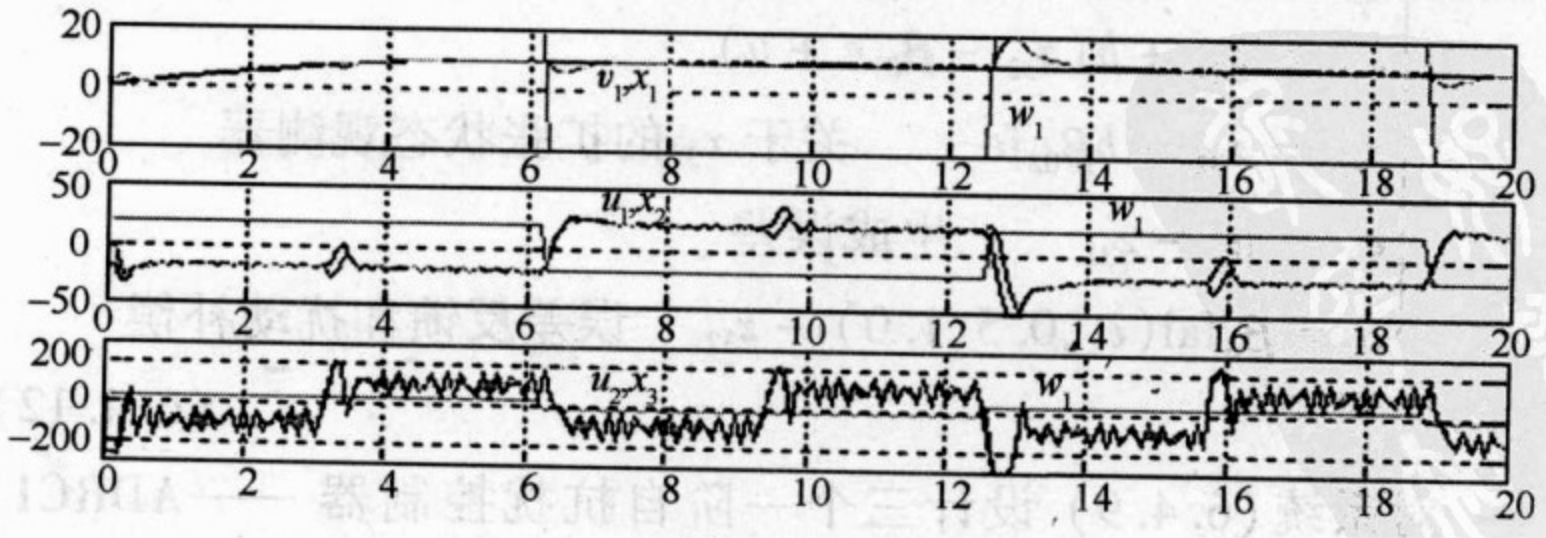


图 6.4.7

设计的控制器对对象不确定模型的鲁棒性特别强.

进一步,对于二阶的串级系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, w_1) + x_2 \\ \ddot{x}_2 = f_2(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, w_2) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.4.13}$$

假定变量 x_1 是被控输出,希望实施控制让 x_1 跟踪设定轨迹 $v(t)$,状态变量 x_1, x_2 可量测.

在此,我们把变量 x_2 当作控制被控输出 x_1 的"虚拟控制量"u_1,然后用实际控制量 u 来控制中间变量 x_2 让它跟踪上面确定的"虚拟控制量"u_1,以此来完成实际控制量 u 来控制被控输出 $y = x_1$ 的目的(图 6.4.8).

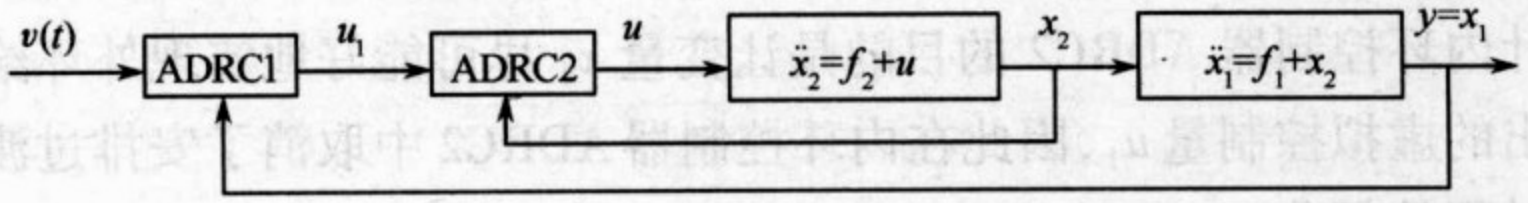


图 6.4.8

这时,"外环"($y = x_1$ 要跟踪目标轨线 $v(t)$ 来确定控制量 u_1)的自抗扰控制算法为

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\text{fh} \\ e = z_{11} - x_1, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01} e) \\ z_{12} = z_{12} + h(z_{13} - \beta_{02}\text{fe} + u_1) \\ z_{13} = z_{13} + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \\ e_1 = v_1 - z_{11}, e_2 = v_2 - z_{12}, u_0 = \text{fhan}(e_1, c_1 e_2, r_1, h_1) \\ u_1 = u_0 - z_{13} \end{cases} \tag{6.4.14}$$

而"内环"(控制变量 x_2 要跟踪虚拟控制量 u_1)的自抗扰控制算法

为

$$\begin{cases} e = z_{21} - x_2, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01} e) \\ z_{22} = z_{22} + h(z_{23} - \beta_{02}\mathrm{fe} + u) \\ z_{23} = z_{23} + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \\ e_1 = u_1 - z_{21}, e_2 = -z_{22}, u_0 = \mathrm{fhan}(e_1, c_2 e_2, r_2, h_2) \\ u = u_0 - z_{23} \end{cases} \tag{6.4.15}$$

为了让这个“内外环”形式控制方法取得更好的效果,设计外环控制器 ADRC1 时,尽可能让其输出 u_1 变化缓慢平滑一些,而设计内环控制器 ADRC2 的目的是让变量 x_2 尽可能好地实现外环给出的虚拟控制量 u_1,因此在内环控制器 ADRC2 中取消了安排过渡过程的部分.

例 4 设有两个串联的二阶系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \gamma_1 \mathrm{sign}(\sin(\omega_1 t)) + x_2 = f_1(t) + x_2 \\ \ddot{x}_2 = \gamma_2 \mathrm{sign}(\cos(\omega_2 t)) + u = f_2(t) + u \end{cases} \tag{6.4.16}$$

式中系统参数 $\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2$ 均未知,变量 x_1, x_2 可量测,控制目标为让 x_1 跟踪预先未知但实时能测得到的时变轨迹 $v(t) = \cos(t)$. 把系统(6.4.17) 改写成

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = \gamma_1 \mathrm{sign}(\sin(\omega_1 t)) + x_{21} \\ \dot{x}_{21} = x_{22} \\ \dot{x}_{22} = \gamma_2 \mathrm{sign}(\cos(\omega_2 t)) + u \\ y_1 = x_{11} \\ y_2 = x_{21} \end{cases} \tag{6.4.17}$$

这里把 $x_{21} = x_2$ 当作控制 $x_{11} = x_1$ 的虚拟控制变量 $u_1 = x_2$. 这时的整个具体控制算法为

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_{11} - v(t), v_{12}, r_0, h) \\ v_{11} = v_{11} + hv_{12} \\ v_{12} = v_{12} + h\text{fh} \\ e = z_{11} - y_1, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01} e) \\ z_{12} = z_{12} + h(z_{13} - \beta_{02}\text{fe} + u_1) \\ z_{13} = z_{13} + h(-(\beta_{03} - 300)\text{fe}_1) \\ e_1 = v_{11} - z_{11}, e_2 = v_{12} - z_{12} \\ u_1 = \text{fhan}(e_1, c_1 e_2, r_1, h_1) - z_{13} \end{cases} \tag{6.4.18}$$

$$\begin{cases} e = u_1 - y_2, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01} e) \\ z_{22} = z_{22} + h(z_{23} - \beta_{02}\text{fe} + u) \\ z_{23} = z_{23} + h(-\beta_{03}\text{fe}_1) \\ e_1 = u_1 - z_{21}, e_2 = -z_{22} \\ u = \text{fhan}(e_1, c_2 e_2, r_2, h_2) - z_{23} \end{cases} \tag{6.4.19}$$

这里有两个自抗扰控制器(ADRC),其中第一个 ADRC 的可调参数为 r_1, c_1, h_1 三个,第二个 ADRC 的可调参数为 r_2, c_2, h_2 三个,共六个.

当采样步长 $h = 0.01$ 确定时,扩张状态观测器参数便被确定,是 $\beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_{03} = 1000$. 为了让第二个输出 y_2 更好的跟踪第一个 ADRC 的输出 u_1,需要使 u_1 变化不要太激烈,为此对设定值 $v(t) = 1$ 安排过渡过程的参数 r_0 不能太大,如 0.1 ~ 10 的

范围(如果要跟踪时变的设定轨线 r_0 要取大一些,如 30 ~ 100 范围),并且 $\beta_{03} = 1000$ 可以取更小一些.

在对象(5.7.17)中取 $\gamma_1 = 1.0, \gamma_2 = 10, \omega_1 = 0.3, \omega_2 = 0.2$,控制目标为常值 $v(t) = 1$. 我们取两个 ARDC 参数分别取成 $r_1 = 10, c_1 = 0.3, h_1 = 0.2$ 和 $r_1 = 600, c_1 = 0.5, h_1 = 0.04$. 步长 $h = 0.01$ 来进行控制仿真的结果示于图 6.4.9.

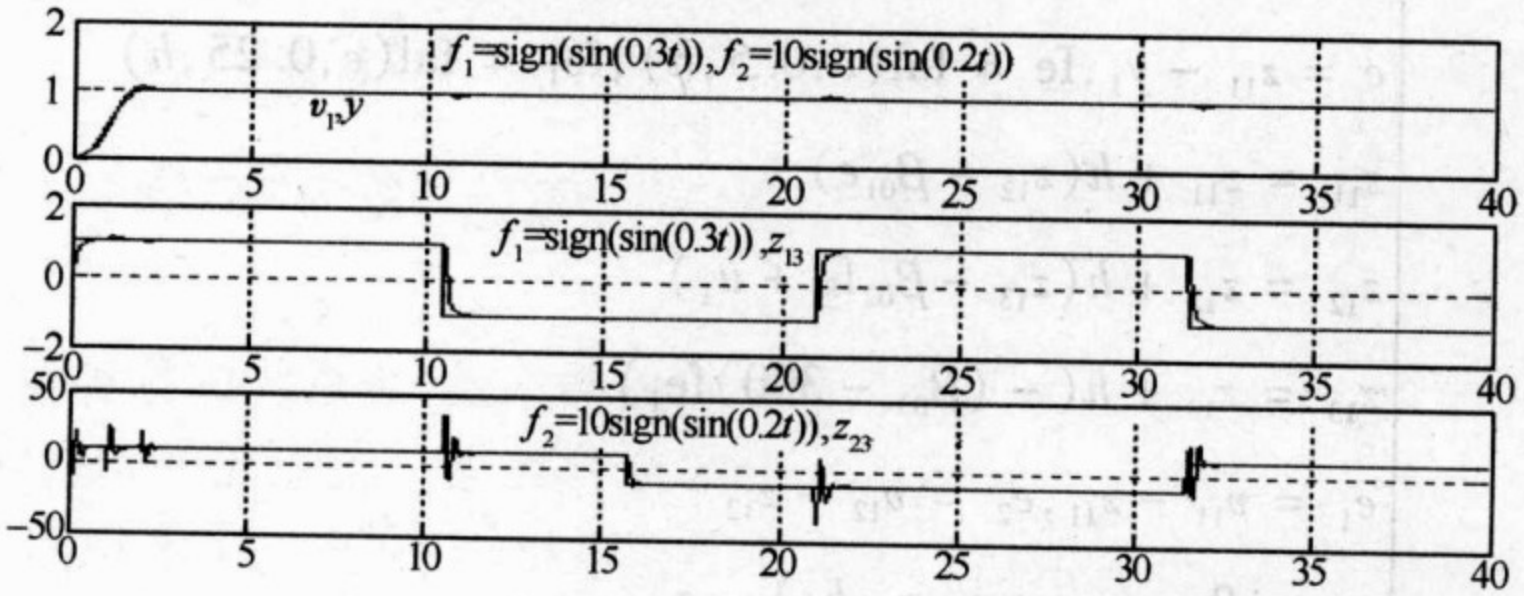


图 6.4.9

图 6.4.9 中上面是目标轨线和系统响应,中间和下面分别是 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 及其估计 $z_{13}(t)$ 和 $z_{23}(t)$.

$$\begin{cases} f_1(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, t) = x_{11} + x_{12} + \text{sign}(\sin(0.3t)) \\ f_2(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, t) = x_{21} + x_{22} + 10\text{sign}(\cos(0.2t)) \end{cases} \tag{6.4.20}$$

控制器与前面完全相同来进行仿真的结果如图 6.4.10 所示. 这说明上述控制方法是可行且很有效的.

这些串级的被控对象,一般内环系统的“时间尺度”比外环系统的“时间尺度”小一些,即内环的运动变化比外环运动的变化还快,因此作数字计算时“内环”和“外环”应该采用不同的采样步长,即对应于内环的采样步长 h_1 比对应于外环的采样步长 h_2 要小($h_1 < h_2$). 这样作是能够避免上述例子中出现的高频颤震现象. 但是为了方便,最好取成 $h_2 = kh_1$(k 为正整数).

例 5 三水箱水位控制问题. 其结构图如图 6.4.11 所示,图中 u_1, u_2 分别为 1 号、2 号水箱的供水量,是系统的两个相互独立的

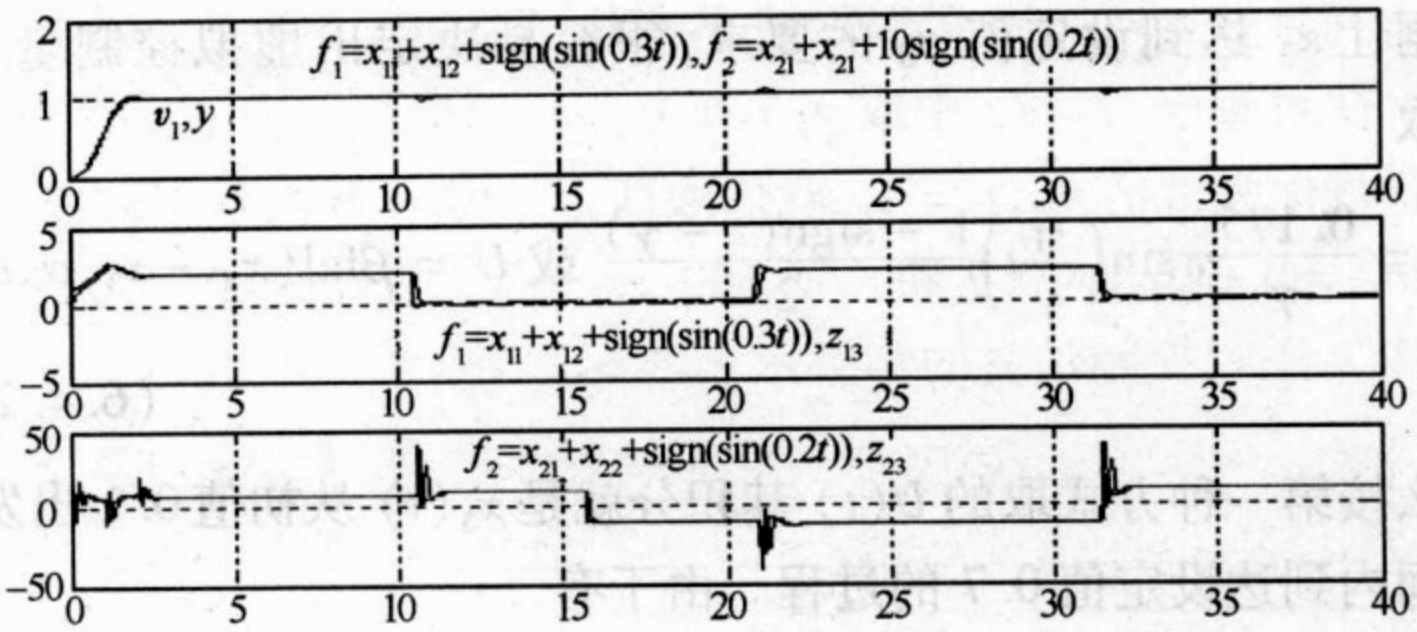


图 6.4.10

控制量，w_1，w_2 分别为 1 号、2 号水箱的漏水量，是系统的扰动量．控制的目的是把三个水箱的水位都控制到同一个设定的水位 x_d 上保持不变．如果假定三个水箱的规格相同，则把三个水箱的实际水位 x_1，x_2，x_3 作为三个状态变量，那么这个系统的数学模型可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a\sqrt{|x_1 - x_3|} + w_1(t) + bu_1 \\ \dot{x}_2 = -a\sqrt{|x_2 - x_3|} - A\sqrt{2g|x_2|} + w_2(t) + bu_2 \\ \dot{x}_3 = a\sqrt{|x_1 - x_3|} + a\sqrt{|x_2 - x_3|} \end{cases} \tag{6.4.21}$$

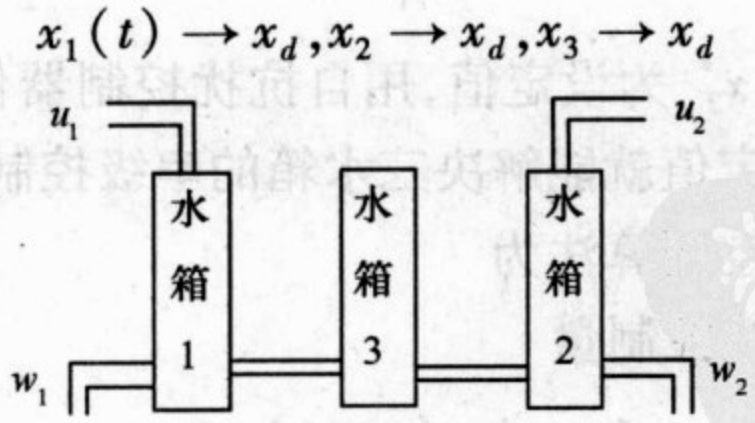


图 6.4.11

在这里，3 号水箱的水位是由 1 号、2 号水箱的水压来决定的．现在我们把 1 号、2 号水箱对 3 号水箱的总的贡献当作对 3 号水箱的虚拟控制量 U，那么按模型

$$\dot{x}_3 = U$$

根据让 x_3 达到设定值 x_d 的要求,很容易决定出虚拟控制量 U,如取

$$U = \frac{0.175}{\gamma}\pi\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}t\right)\frac{1-\text{sign}(t-\gamma)}{2} \text{ 或 } U = \beta\text{fal}(x_d - x_3, \alpha, \delta) \tag{6.4.22}$$

那么按第一种方式取的 $U(t)$ 其积分就是 $x_3(t)$ 从初值 0.1 出发 γ 时间内到达设定值 0.7 的过程. 由于有

$$a_1\sqrt{|x_1 - x_3|} + a_2\sqrt{|x_2 - x_3|} = U \tag{6.4.23}$$

又由于 1 号,2 号水箱对 3 号水箱的贡献是均等的,因此可以令

$$a_1\sqrt{|x_1 - x_3|} = \frac{U}{2}, a_2\sqrt{|x_2 - x_3|} = \frac{U}{2} \tag{6.4.24}$$

由这两式解出

$$x_1 = x_3 + \frac{U^2}{4a_1^2}, x_2 = x_3 + \frac{U^2}{4a_2^2} \tag{6.4.25}$$

现在我们把这样解出的 x_1, x_2 分别作为实际状态 x_1, x_2 要跟踪的时变轨迹,即

$$x_1^* = x_3 + \frac{U^2}{4a_1^2}, x_2^* = x_3 + \frac{U^2}{4a_2^2} \tag{6.4.26}$$

然后,分别以 x_1^*, x_2^* 为设定值,用自抗扰控制器使状态变量 x_1, x_2 分别达到这些设定值就能解决三水箱的串级控制问题.

整个过程的控制算法为

(1) 先定虚拟控制量

$$U = \frac{0.175}{\gamma}\pi\sin\left(\frac{\pi}{\gamma}t\right)\frac{1-\text{sign}(t-\gamma)}{2} \text{ 或 } U = \beta\text{fal}(x_d - x_3, \alpha, \delta) \tag{6.4.27}$$

和状态变量 x_1, x_2 要跟踪的设定值分别为

$$x_1^* = x_3 + \frac{U^2}{4a_1^2}, x_2^* = x_3 + \frac{U^2}{4a_2^2} \tag{6.4.28}$$

(2) 决定控制 x_1 的自抗扰控制器为

$$\begin{cases} e_1 = z_{11} - x_1, \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e_1, 0.5, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01} e_1 + bu_1) \\ z_{12} = z_{12} + h(-\beta_{02} \mathrm{fe}_1) \\ e_{01} = x_1^* - z_{21} \\ u_1 = \beta_1 \mathrm{fal}(e_{01}, \alpha_1, h) - \dfrac{z_{12}}{b} \end{cases} \tag{6.4.29}$$

(3) 决定控制 x_2 的自抗扰控制器为

$$\begin{cases} e_2 = z_{21} - x_2, \mathrm{fe}_2 = \mathrm{fal}(e_2, 0.5, h) \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01} e_2 + bu_2) \\ z_{22} = z_{22} + h(-\beta_{02} \mathrm{fe}_2) \\ e_{02} = x_2^* - z_{21} \\ u_2 = \beta_1 \mathrm{fal}(e_{02}, \alpha_2, h) - \dfrac{z_{22}}{b} \end{cases} \tag{6.4.30}$$

取对象参数为 $a_1 = 0.015, a_2 = a_1, A = 1.12, b = 6.5$，对各水箱分别加上如下扰动：$w_1(t) = 0.4\mathrm{sign}(\sin(0.02t)), w_2(t) = 0.4\cos(0.03t), w_3(t) \equiv 0.0$，虚拟控制量取成 $U = \beta \mathrm{fal}(x_d - x_3, \alpha, \delta), \beta = 0.04, \alpha = 0.5, \delta = 1.0, \beta_1 = 0.3$ 所作的仿真结果如图 6.4.12 所示．这个仿真结果表明，1 号、2 号水箱的扰动作用 $w_1(t), w_2(t)$ 都被抑制的很好.

虚拟控制量取成 $U = \dfrac{0.35}{\gamma}\pi \sin\left(\dfrac{\pi}{\gamma}t\right)\dfrac{1 - \mathrm{sign}(t - \gamma)}{2}$ 时的仿真结果如图 6.4.13 所示.

这说明虚拟控制量的取法是，让 x_3 趋近设定值 x_d 的前提下可以灵活选取．例如还可以根据信号 x_d 和 x_3，用自抗扰控制器来决定 $U(t)$

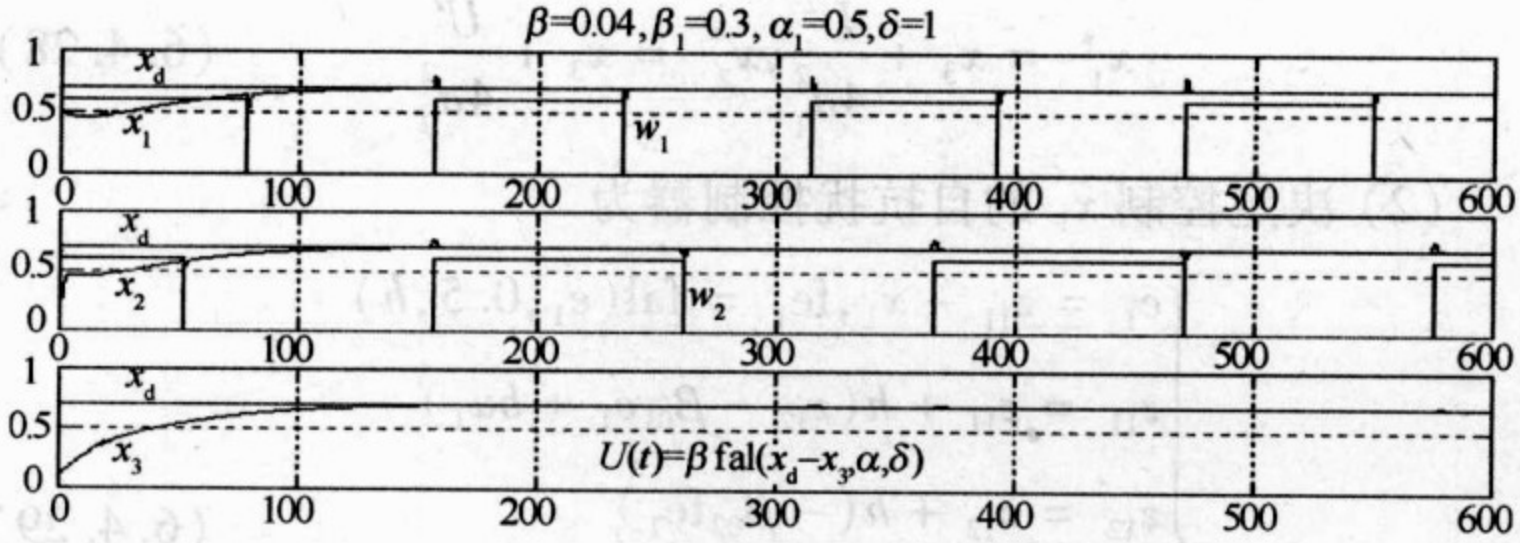


图 6.4.12

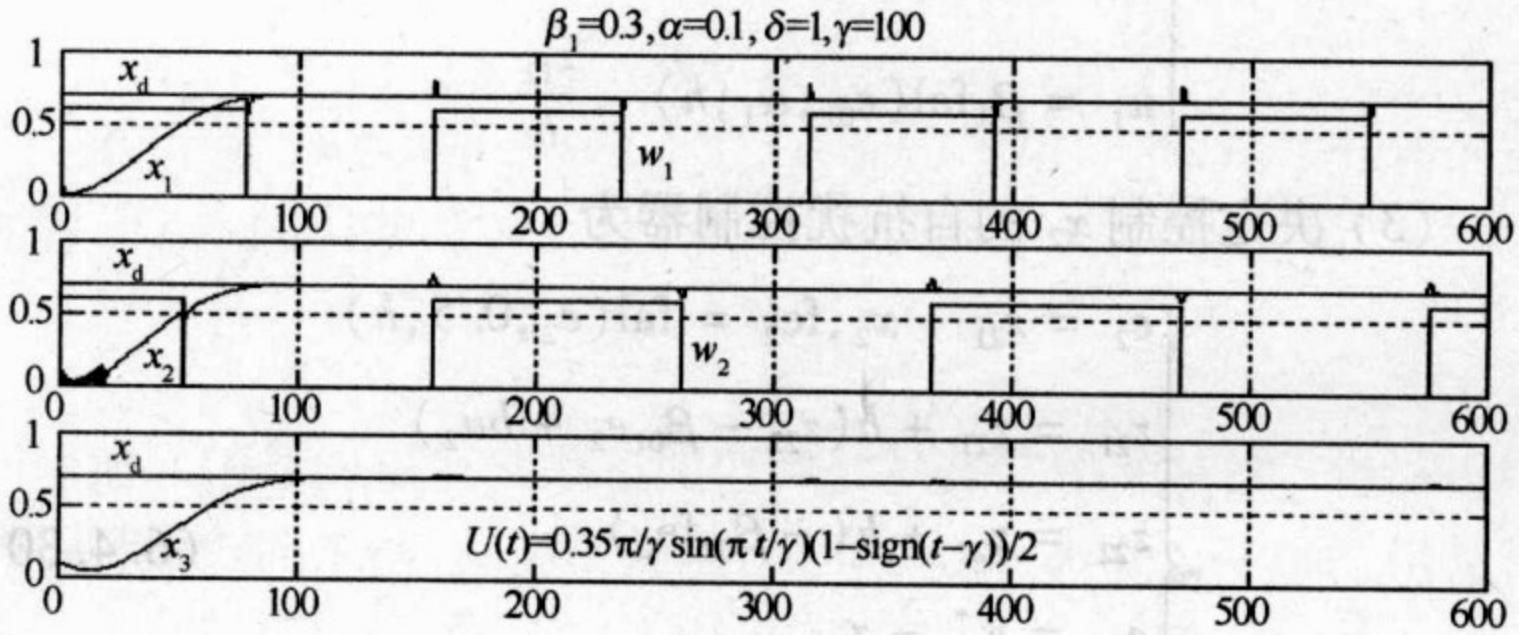


图 6.4.13

$$\begin{cases} e = z_1 - x_3, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e + U(t)) \\ z_2 = z_2 + (-\beta_{02} \mathrm{fe}) \\ e_1 = x_d - z_1, U(t) = \beta_1 \mathrm{fal}(e_1, \alpha, \delta) - z_2 \end{cases} \tag{6.4.31}$$

之后把 $U(t)$ 分半来作 x_1 和 x_2 要跟踪的设定值，然后分别根据 $\frac{U(t)}{2}$ 和 x_2，$\frac{U(t)}{2}$ 和 x_3，用自抗扰控制器分别控制 x_1 和 x_2. 其具体算法如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 \sqrt{|x_1 - x_3|} + w_1(t) + bu_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 \sqrt{|x_3 - x_2|} - A \sqrt{2g|x_2|} + w_2(t) + bu_2 \\ \dot{x}_3 = a_1 \sqrt{|x_1 - x_3|} + a_2 \sqrt{|x_2 - x_3|} - x_1 - \\ \qquad x_2 + w_3(t) + (x_1 + x_2) \end{cases} \tag{6.4.32}$$

令

$$x_1 + x_2 = U(t), x_1^* = \frac{U(t)}{2}, x_2^* = \frac{U(t)}{2} \tag{6.4.33}$$

然后

$$\begin{cases} e = z_{31} - x_3, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) \\ z_{31} = z_{31} + h(z_{32} - \beta_{01} e + U(t)) \\ z_{32} = z_{32} + h(-\beta_{02} \mathrm{fe}) \\ e_3 = x_d - x_3 \\ U(t) = \beta_1 \mathrm{fal}(e_3, \alpha, \delta) - z_{32} \end{cases} \tag{6.4.34}$$

$$\begin{cases} e = z_{11} - x_1, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) \\ z_{11} = z_{11} + h(z_{12} - \beta_{01} e + bu_1(t)) \\ z_{12} = z_{12} + h(-\beta_{02} \mathrm{fe}) \\ e_1 = U(t)/2 - x_1 \\ u_1 = \beta_1 \mathrm{fal}(e_1, 0.5, \delta) - z_{12}/b \\ e = z_{21} - x_2, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) \\ z_{21} = z_{21} + h(z_{22} - \beta_{01} e + bu_2(t)) \\ z_{22} = z_{22} + h(-\beta_{02} \mathrm{fe}) \\ e_2 = U(t)/2 - x_2 \\ u_2 = \beta_1 \mathrm{fal}(e_1, 0.5, \delta) - z_{22}/b \end{cases} \tag{6.4.35}$$

以上就是处理串极系统控制问题的具体办法.

6.5 混沌系统的自抗扰控制

我们在第四章已讨论过混沌系统的观测问题. 用同一个状态观测器跟踪不同混沌系统状态是很好的. 既然能够很好地跟踪混沌系统的状态,用自抗扰控制器来控制混沌系统,让它来实现已给

的某种动态行为是完全可以的.

考察如下两个常见混沌系统的控制问题,对 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.5.1}$$

其中,$\sigma = 10, \rho = 28, b = \dfrac{8}{3}, x_1(0) = -4.47, x_2(0) = -0.505,$ $x_3(0) = 28.02.$

控制力加在不同通道上的两种情形进行仿真研究(图 6.5.1)

$$(1)\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) + u \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1 x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

(6.5.2)

控制器的具体算法如下:

$$\begin{cases} \mathrm{fs} = -r^2(v_1 - v) + 2rv_2 \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fs} \end{cases}$$

安排过渡过程 (6.5.3)

$$\begin{cases} e = z_1 - y \\ \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.5, h) \\ \mathrm{fe}_2 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe}_1 + u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_2) \end{cases}$$

估计对象状态和总和扰动

(6.5.4)

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1 \\ e_2 = v_2 - z_2 \\ u = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - z_3 \end{cases} \quad \text{控制量} \qquad (6.5.5)$$

我们取采样步长 $h = 0.001$,扩张状态观测器参数为 $\beta_{01} = 1000$, $\beta_{02} = 6000$, $\beta_{03} = 30000$. 而反馈增益取成 $\beta_1 = 300$, $\beta_2 = 1.0$. 设定值取成 $v(t) \equiv 1.0$ 时,安排过渡过程的参数取成 $r = 1.0$.

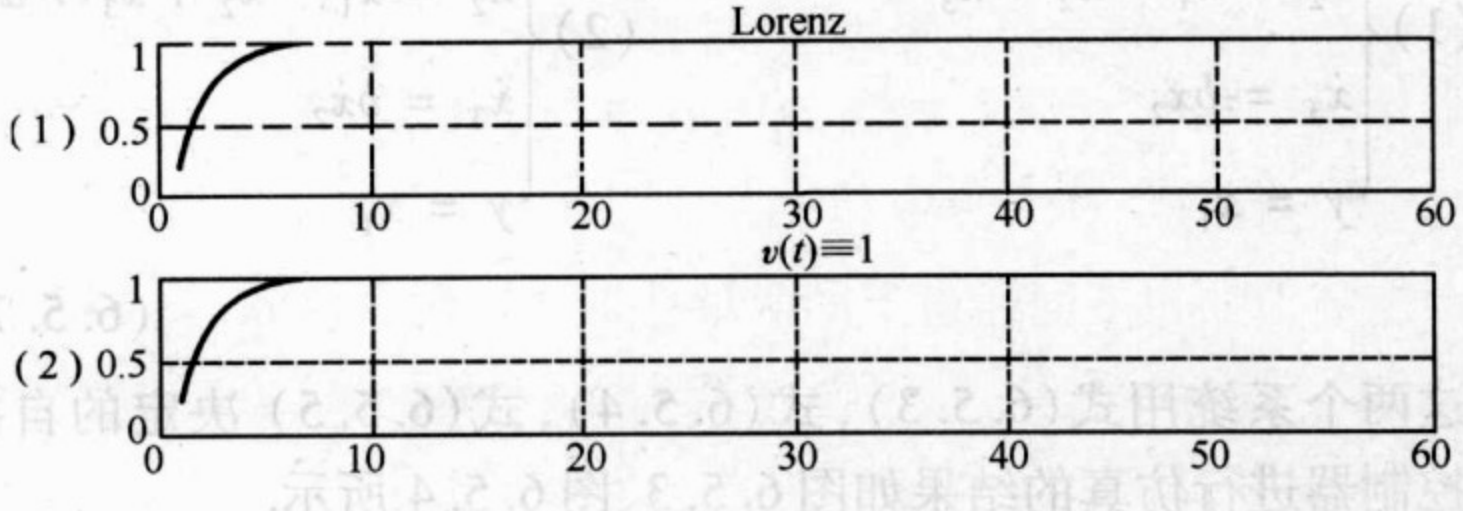


图 6.5.1

设定值取成 $v(t) = \sin(t) + \cos(t)$ 时,安排过渡过程的参数取成 $r = 50$. 用式(6.5.3),式(6.5.4),式(6.5.5) 决定的自抗扰控制器对(1),(2) 两种情形仿真的结果如图 6.5.2 所示.

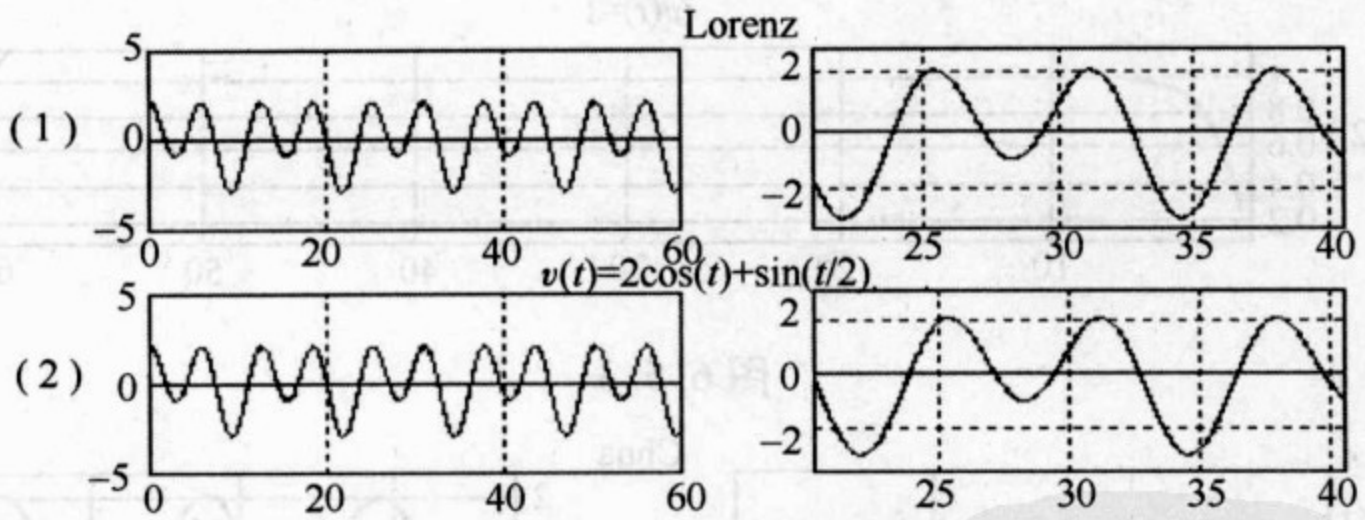


图 6.5.2

对 Chua 电路系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a[x_2 - \phi(x_1)] \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = bx_2 \\ y = x_1 \end{cases} \qquad (6.5.6)$$

其中，$\phi(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x + c| - |x - c|)$，$a = 9$，$b = 14.286$，$c = 1$，$m_0 = -\frac{1}{7}$，$m_1 = \frac{2}{7}$，$x_1(0) = 1$，$x_2(0) = 0$，$x_3(0) = -1$.

$$(1)\begin{cases}\dot{x}_1 = a[x_2 - \phi(x_1)] + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = bx_2 \\ y = x_1\end{cases} \qquad (2)\begin{cases}\dot{x}_1 = a[x_2 - \phi(x_1)] \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = bx_2 \\ y = x_1\end{cases} \tag{6.5.7}$$

对这两个系统用式(6.5.3)，式(6.5.4)，式(6.5.5) 决定的自抗扰控制器进行仿真的结果如图 6.5.3、图 6.5.4 所示.

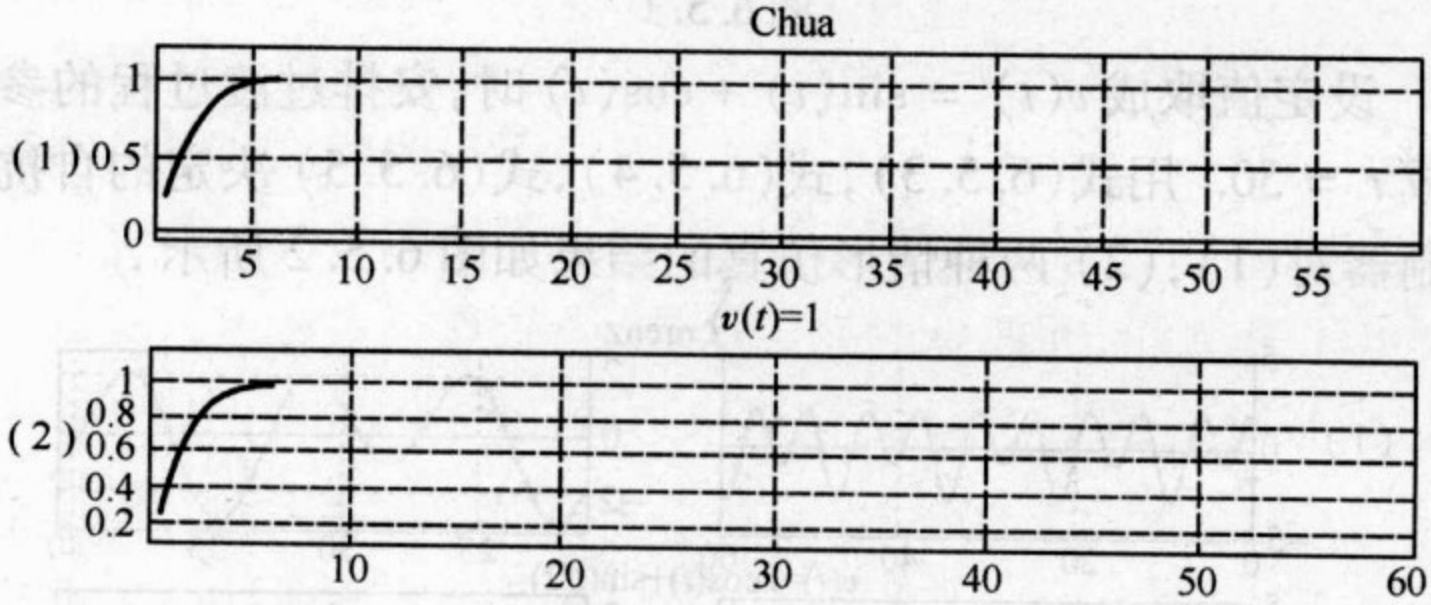


图 6.5.3

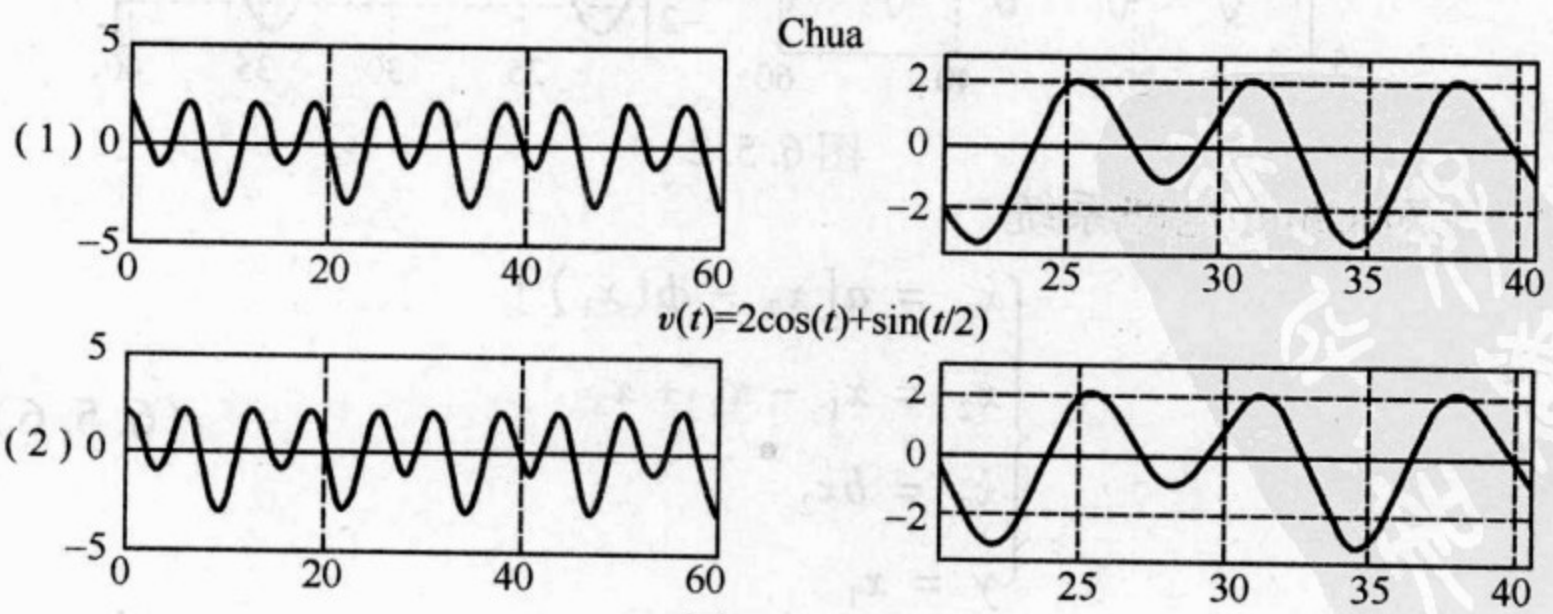


图 6.5.4

下面我们来考察混沌系统跟踪混沌轨迹的问题.

假定我们随时能获取 Lorenz 混沌系统轨迹的一个输出值 $x_1(t)$,能否对另一混沌系统施加控制力的办法来跟踪这个混沌输出呢?

Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1), & x_1(0) = -4.47 \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3, & x_2(0) = -0.505 \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{8}{3}x_3 + x_1x_2, & x_3(0) = 28.02 \\ v(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{6.5.8}$$

的输出 $v(t)$ 作为被跟踪信号.

把 Lossler 系统改造成受控系统,得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, & x_1(0) = -1.0 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2 + u, & x_2(0) = -1.0 \\ \dot{x}_3 = 0.2 + x_3(x_1 - 5.7), & x_3(0) = 0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

让此系统的输出 $y(t)$ 来跟踪上述 $v(t)$ 的仿真算法为

(1) 生成被跟踪信号

$$x_1(0) = -4.47, x_2(0) = -0.505, x_3(0) = 28.02$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + h^* 10(x_2 - x_1) \\ x_2 = x_2 + h(28x_1 - x_2 - x_1x_3) \\ x_3 = x_3 + h\left(-\dfrac{8}{3}x_3 + x_1x_2\right) \\ v = x_1 \end{cases}$$

(2) 生成被跟踪信号的微分信号对象状态扰动的估计

$$\begin{cases} \text{fh} = \text{fhan}(v_1 - v(t), v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + h^* v_2 \\ v_2 = v_2 + h^* \text{fh} \\ e = z_1 - y, \text{fe} = \text{fal}(e, 0.5, h), \text{fe}_1 = \text{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h^*(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h^*(z_3 - \beta_{02}\text{fe} + u) \\ z_3 = z_3 + h^*(-\beta_{03}\text{fe}_1) \end{cases}$$

(3) 生成控制信号

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ u = -\text{fhan}(e_1, ce_2, r, h_1) - z_3 \end{cases}$$

(4) 驱动被控对象生成新的输出信号

$$x_1(0) = -1.0, x_2(0) = -1.0, x_3(0) = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + h(-x_2 - x_3) \\ x_2 = x_2 + h(x_1 + 0.2x_2 + u) \\ x_3 = x_3 + h(0.2 + x_3(x_1 - 5.7)) \\ y = x_1 \end{cases}$$

用这个算法,并取参数

$$h = 0.001, r_0 = 10000, \beta_{01} = 1000, \beta_{02} = 30000, \beta_{03} = 800000$$

$$r = 3000, c = 3, h_1 = 0.08$$

所作的仿真结果如图 6.5.5、图 6.5.6 所示.

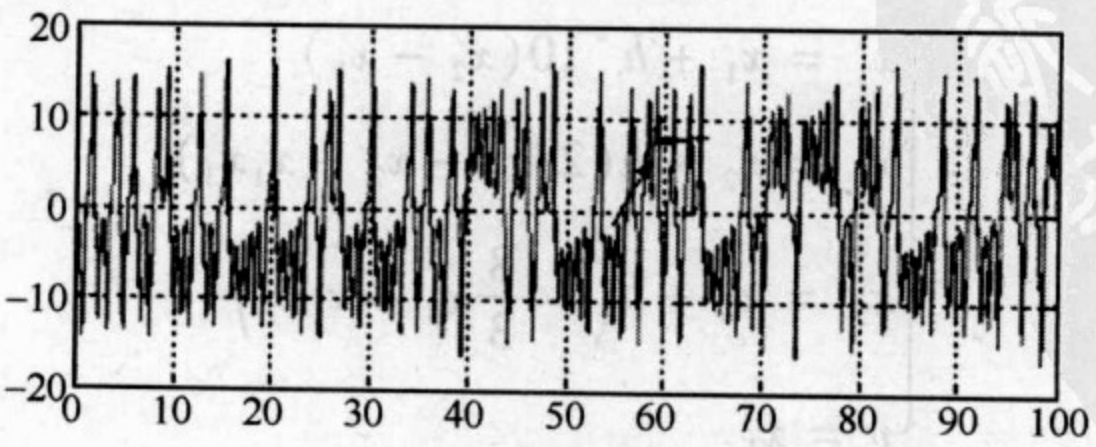


图 6.5.5

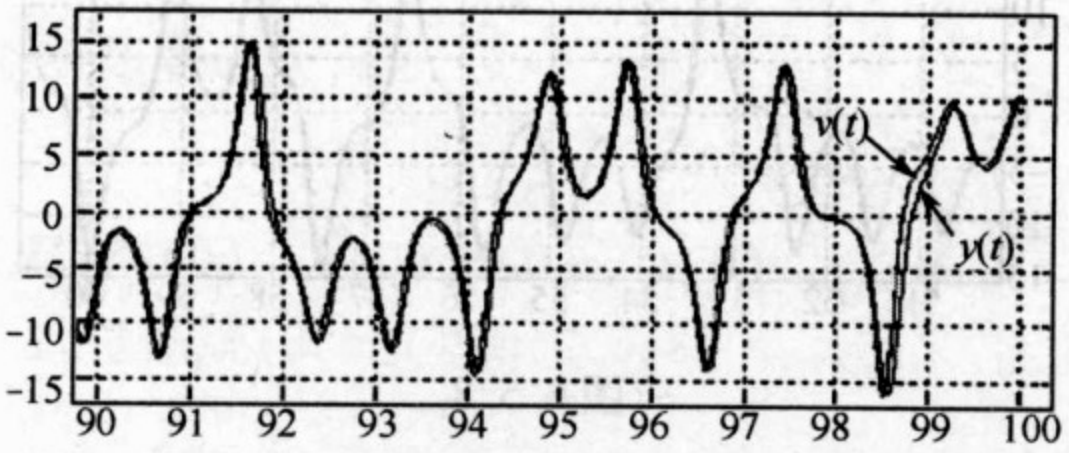


图 6.5.6

用 Chua 电路系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 9[x_2 - \phi(x_1)], & x_1(0) = 1.0 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, & x_2(0) = 0.0 \\ \dot{x}_3 = -14.286x_2, & x_3(0) = -1.0 \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\phi(x) = \frac{2}{7}x - \frac{3}{14}(|x+1| - |x-1|)$$

来跟踪上述 $v(t)$,控制器结构完全相同,但参数稍微调整一下,取

$$h = 0.001, r_0 = 10000, \beta_{01} = 1000,$$

$$\beta_{02} = 30000, \beta_{03} = 800000$$

$$r = 1000, c = 1, h_1 = 0.05$$

的仿真结果如图 6.5.7 所示. 局部放大结果如图 6.5.8 所示.

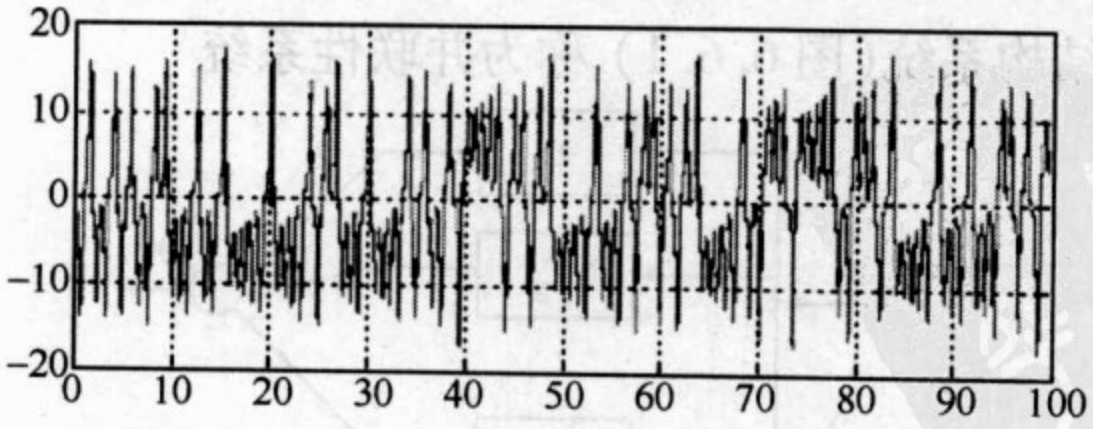


图 6.5.7

用 Chua 系统来跟踪给定周期轨线 $v(t) = \sin(5t) + 2\cos(7t)$ 的情形示于图 6.5.9. 局部放大的效果如图 6.5.10 所示.

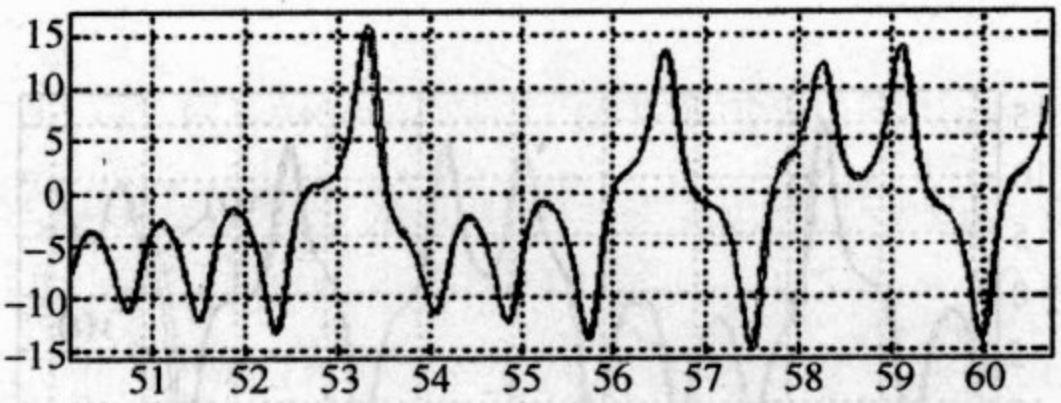


图 6.5.8

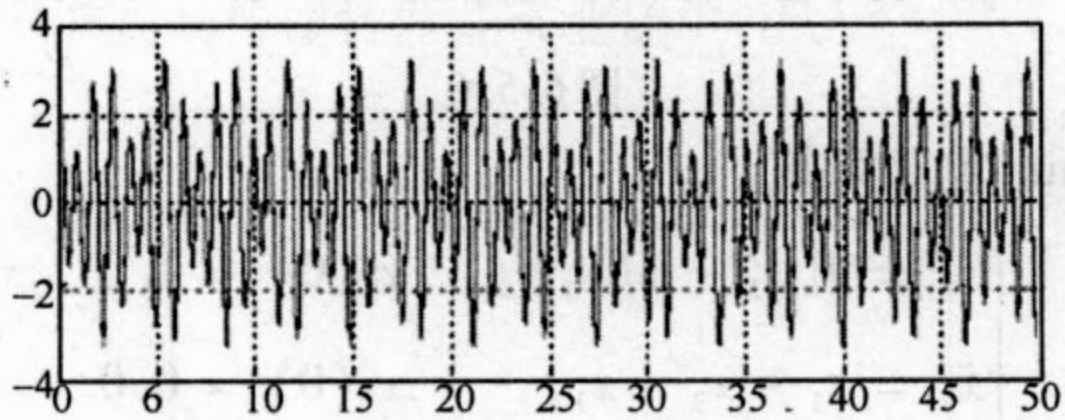


图 6.5.9

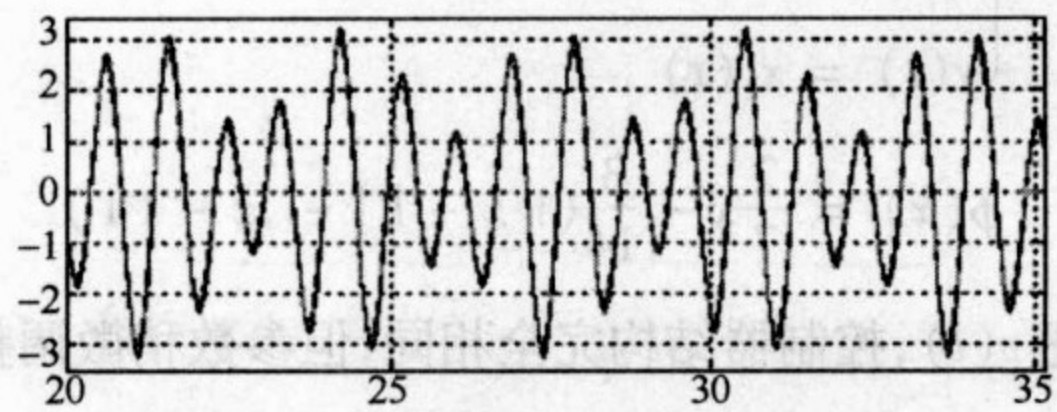


图 6.5.10

6.6 并联系统的自抗扰控制

如下结构系统(图 6.6.1) 称为并联性系统

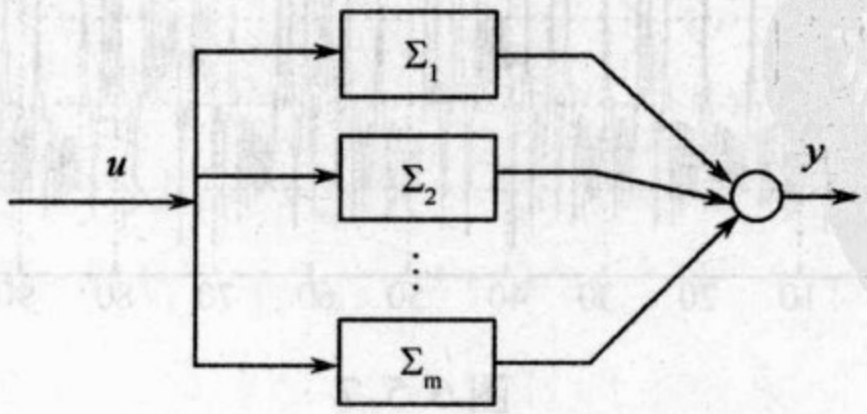


图 6.6.1

在柔性臂减震控制问题的数学模型可归结为如下并联系统

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = f_1(x_1, \dot{x}_1) + b_1 u \\ \ddot{x}_2 = f_2(x_2, \dot{x}_2) + b_2 u \\ \vdots \\ \ddot{x}_m = f_m(x_m, \dot{x}_m) + b_m u \\ y = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \end{cases} \tag{6.6.1}$$

系统输出 $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ 是被控量. 现在以这个被控量 y 作为基本状态变量来重新建立系统模型得

$$\begin{cases} \ddot{y} = f(y, \dot{y}) + w(x, \dot{x}) + bu \\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \\ b = b_1 + b_2 + \cdots + b_m \end{cases} \tag{6.6.2}$$

其中,$f(y, \dot{y})$ 和 b 作为已知函数和参数,$w(x, \dot{x})$ 作为未知扰动,设计自抗扰控制器来进行控制.

例如

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - 2\xi_1 \omega_1 \dot{x}_1 + b_1 u \\ \ddot{x}_2 = -\omega_2^2 x_2 - 2\xi_2 \omega_2 \dot{x}_2 + b_2 u \\ \vdots \\ \ddot{x}_m = -\omega_m^2 x_m - 2\xi_m \dot{x}_m + b_m u \\ y = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \end{cases} \tag{6.6.3}$$

此系统可以改写成

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - 2\xi_0 \omega_0 \dot{x}_1 + b_1 u - (\omega_1^2 - \omega_0^2) x_1 - 2(\xi_1 \omega_1 - \xi_0 \omega_0) \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 - 2\xi_0 \omega_0 \dot{x}_2 + b_2 u - (\omega_2^2 - \omega_0^2) x_2 - 2(\xi_2 \omega_2 - \xi_0 \omega_0) \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_m = -\omega_0^2 x_m - 2\xi_0 \omega_0 \dot{x}_m + b_m u - (\omega_m^2 - \omega_0^2) x_m - 2(\xi_m - \xi_0 \omega_0) \dot{x}_m \\ y = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \end{cases} \tag{6.6.4}$$

把各项加起来,有

$$\ddot{y} = -\omega_0 y - 2\xi_0\omega_0\dot{y} - \sum_1^m [(\omega_i^2 - \omega_0^2)x_i + 2(\xi_i\omega_i - \xi_0\omega_0)\dot{x}_i] + (\sum_1^m b_i)u \tag{6.6.5}$$

现在记

$$w(x,\dot{x}) = -\sum_1^m [(\omega_i^2 - \omega_0^2)x_i + 2(\xi_i\omega_i - \xi_0\omega_0)\dot{x}_i] \tag{6.6.6}$$

$$b = \sum_1^m b_i \tag{6.6.7}$$

则得

$$\ddot{y} = -\omega_0 y - 2\xi_0\omega_0\dot{y} + bu + w(x,\dot{x}) \tag{6.6.8}$$

在这里我们把 $w(x,\dot{x})$ 当作外扰来处理. 实际上每个分频是衰减振荡,因此控制过程中的扰动量 $w(x,\dot{x})$ 总是在有界范围内变化,这就可以用自抗扰控制器来有效地抑制其作用了.

例 设某一柔性弹性体的振荡按频谱分解取前三项的结果为

$$y = \frac{1}{176}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1.28}{s^2 + 0.01242s + 4.2849}\,\frac{0.03}{s^2 + 0.1422s + 561.69}\right)u \tag{6.6.9}$$

其状态变量实现为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{1}{176}u \\ \ddot{x}_2 = -4.2849x_2 - 0.01242\dot{x}_2 + \dfrac{1.28}{176}u \\ \ddot{x}_3 = -561.69x_3 - 0.1422\dot{x}_3 + \dfrac{0.03}{176}u \\ y = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases} \tag{6.6.10}$$

把它化成(6.6.8)的形式

$$\ddot{y} = -a_1 y - a_2 \dot{y} + w(x,\dot{x}) + bu \tag{6.6.11}$$

那么

$$b = \frac{1 + 1.28 + 0.003}{176} = 0.012972 \tag{6.6.12}$$

在这里控制的目的是尽快消除振荡,即 y 尽快趋近零. 只要 a_1, a_2 在一定范围之内不管怎么变,自抗扰控制器是能够控制好这个对象的.

对象(6.6.9)的设定值是 $y^* = 0$,y 的初始条件假设为 $y(0) = 1.0$.

整个自抗扰控制器算法为

安排过渡过程

$$\begin{cases} \mathrm{fh} = \mathrm{fhan}(v_1 - y^*, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2, v_1(0) = y(0) \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh}, v_2(0) = 0.0, r_0 = 0.002 \end{cases} \tag{6.6.13}$$

状态与扰动估计

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{6.6.14}$$

生成误差和误差反馈律

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ \mathrm{uu} = -\mathrm{fhan}(e_1, ce_2, r, h_0) \end{cases} \tag{6.6.15}$$

最终控制量

$$u = \mathrm{uu} - \frac{z_3}{b_0} \tag{6.6.16}$$

可调参数为 h_0, c, b_0（尽管对象中的 $b = 0.012972$，但对我们来说不一定可得，因此就把它作为可调参数来调整更好），至于参数 r 取适当大就可以了.

取参数

$$h_0 = 0.05, c = 30, b_0 = 0.003 \tag{6.6.17}$$

所作的仿真结果如图 6.6.2 所示.

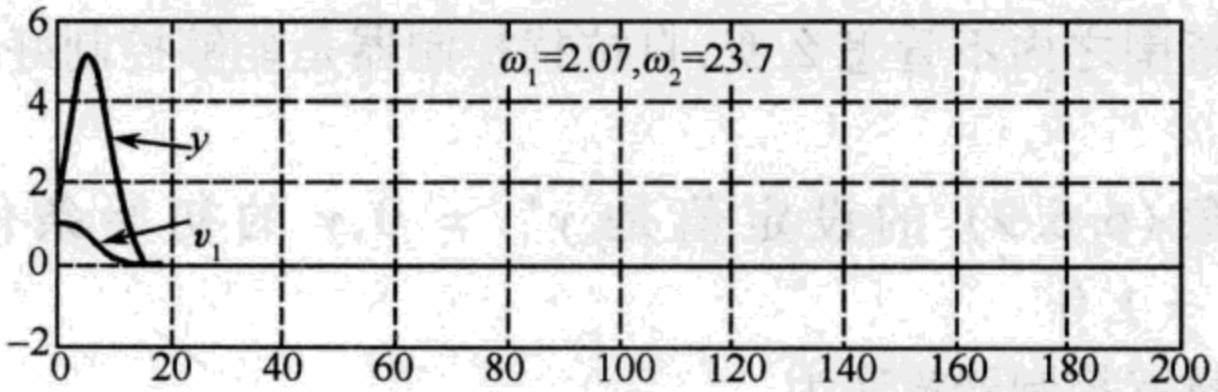


图 6.6.2

在模型(6.6.9) 中的频率 $\omega_1^2 = 4.2849 = (2.07)^2, \omega_2^2 = 561.69 = (23.7)^2$ 改成

$$\omega_1^2 = 1 = (1)^2, \omega_2^2 = 16 = (4)^2 \text{ 和}$$

$$\omega_1^2 = 9 = (3)^2, \omega_2^2 = 1600 = (40)^2$$

仿真结果分别如图 6.6.3、图 6.6.4 所示.

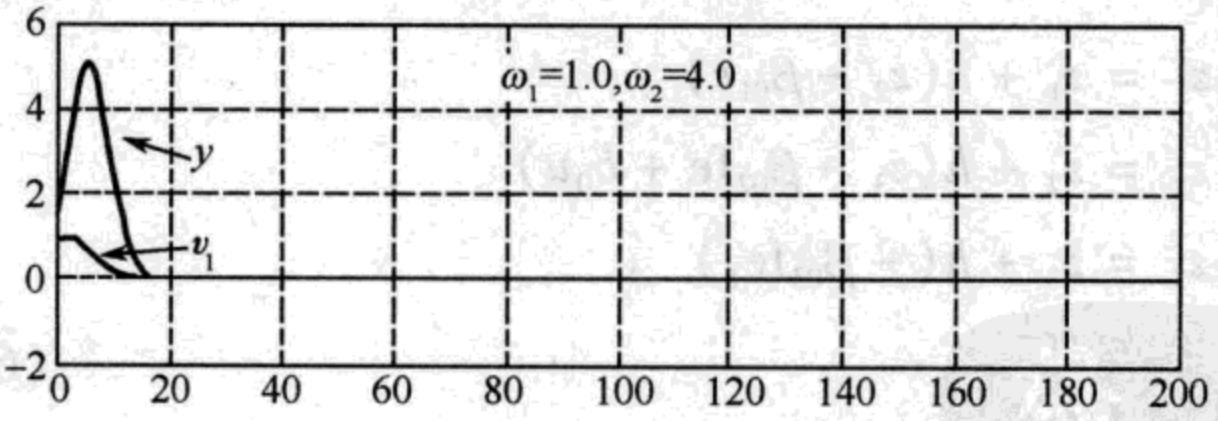


图 6.6.3

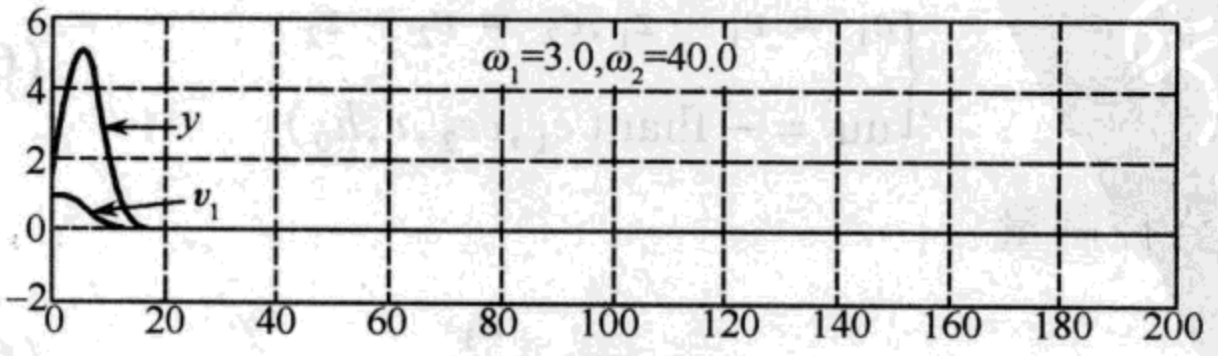


图 6.6.4

以上三种情形的控制器参数都是(6.6.16)固定不变,但振型变化这么大,控制器起很好的抗震作用.

6.7 自寻最优控制

考察如下控制问题:设有被控系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1(x_1 - v_0) - a_2 x_2 + w(t) + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.7.1}$$

如果 $a_1 > 0, a_2 > 0$,而 $w(t) = 0, u = 0$,那么系统输出 y 最终稳定在 $x_1 = v_0$ 上,即如果把 v_0 当作系统的设定值,那么当外扰 $w(t) = 0$ 时,控制量 $u \equiv 0$ 也能达到控制目的. 我们要考察有外扰作用时花最小控制量来达到控制目的的问题. 我们在系统(6.7.1)中仍假定设定值为常值 v_0,是控制要达到的目的,那么控制 u 至少要抵消外扰 $w(t)$ 的作用. 但是我们把系统(6.7.1)改写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_1\left(x_1 - \left(v_0 + \dfrac{w(t)}{a_1}\right)\right) - a_2 x_2 + u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.7.2}$$

从这个式子看,只要把设定值修正成 $v_0 + \dfrac{w(t)}{a_1}$,那么控制取 $u \equiv 0$ 也能达到控制目的.

实际上,控制量是系统设定值 v_0 的函数 $u = f(v_0)$,一般控制的能量是用 $u^2 = f^2(v_0)$ 来代表,因此能量最小的控制问题归结为选择函数 $u^2 = f^2(v_0)$ 取最小值的设定值 v_0 的问题,即根据外扰的变化随时调整设定值 v_0 来使所花的控制能量最小,是一种自适应控制过程.

尽管函数 $u^2 = f^2(v_0)$ 的具体表达式不知道,但是这个函数关

系是确实存在的. 因此用2.6节的第三段介绍的办法能够确定出最优的 v_0^*. 设定值 v_0 决定控制量 u,反过来控制能量 u^2 的大小又决定系统设定值 v_0. 这里,由 v_0 决定 u 的过程是自抗扰控制器来完成,而由 u^2 决定 v_0 的过程是2.6节的第三段介绍的优化办法来解决. 以系统(6.7.1)为例,上述自适应最优化过程的具体算法如下:

根据设定值 v_0 安排过渡过程

$$\begin{cases} \mathrm{fh}_1 = \mathrm{fhan}(v_1 - v_0, v_2, r_0, h) \\ v_1 = v_1 + hv_2 \\ v_2 = v_2 + h\mathrm{fh}_1 \end{cases} \tag{6.7.3}$$

根据系统输出估计系统状态和扰动总和作用的扩张状态观测器

$$\begin{cases} e = z_1 - y, \mathrm{fe} = \mathrm{fal}(e, 0.5, h), \mathrm{fe}_1 = \mathrm{fal}(e, 0.25, h) \\ z_1 = z_1 + h(z_2 - \beta_{01} e) \\ z_2 = z_2 + h(z_3 - \beta_{02}\mathrm{fe} + b_0 u) \\ z_3 = z_3 + h(-\beta_{03}\mathrm{fe}_1) \end{cases} \tag{6.7.4}$$

形成误差信号、误差反馈控制量及最终控制量 u

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - z_1, e_2 = v_2 - z_2 \\ \mathrm{uu} = -\mathrm{fhan}(e_1, ce_2, r, h_0) \\ u = \mathrm{uu} - \dfrac{z_3}{b_0} \end{cases} \tag{6.7.5}$$

确定优化所需导数 $d = \dfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}v_0}$

$$\begin{cases} \mathrm{fh}_u = \mathrm{fhan}(u_1 - u^2, u_2, r_1, h_1) \\ u_1 = u_1 + hu_2 \\ u_2 = u_2 + h\mathrm{fh}_u \end{cases} \tag{6.7.6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{fh}_v = \mathrm{fhan}(v_{01} - v_0, v_{02}, r_2, h_2) \\ v_{01} = v_{01} + hv_{02} \\ v_{02} = v_{02} + h\mathrm{fh}_v \end{cases} \tag{6.7.7}$$

$v_{02} = \max(\mathrm{abs}(v_{02}), 0.0001)\mathrm{sign}(v_{02})$ v_{02} 的非零处理

$$d = \frac{u_2}{v_{02}} \tag{6.7.8}$$

$$\begin{cases} \mathrm{fh}_d = \mathrm{fhan}(d_1 - d, d_2, r_3, h_3) \\ d_1 = d_1 + hd_2 \\ d_2 = d_2 + h\mathrm{fh}_d \end{cases}$$ d 的滤波处理

(6.7.9)

修正设定值

$$v_0 = v_0 - \lambda \mathrm{fal}(d_1, 0.1, 0.001) \tag{6.7.10}$$

在系统(6.7.1) 中取 $a_1 = 2.0, a_2 = 1.0, w(t) = \sin\left(\frac{t}{10}\right)$ 和 $w(t) = \sin\left(\frac{t}{50}\right)$,而自适应最优控制器参数为

$$\begin{cases} \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 300, \beta_3 = 1000 \\ r_0 = 20, r = 100, c = 3.0, h_0 = 0.2 \\ r_1 = r_2 = r_3 = 100, h_1 = h_2 = h_3 = 0.2 \\ \lambda = 0.0005\left(w(t) = \sin\left(\frac{t}{20}\right)\right) \text{或} \lambda = 0.0005\left(w(t) = \sin\left(\frac{t}{20}\right)\right) \end{cases}$$

(6.7.11)

所作的仿真结果如图 6.7.1 所示

设定值基本上跟上扰动的变化,而控制量基本上在零附近.为了适应扰动频率的变化,只需改变修正因子 λ 就可以了.

如果设定值受限制,我们把这个限制加在设定值上就可以了,如:

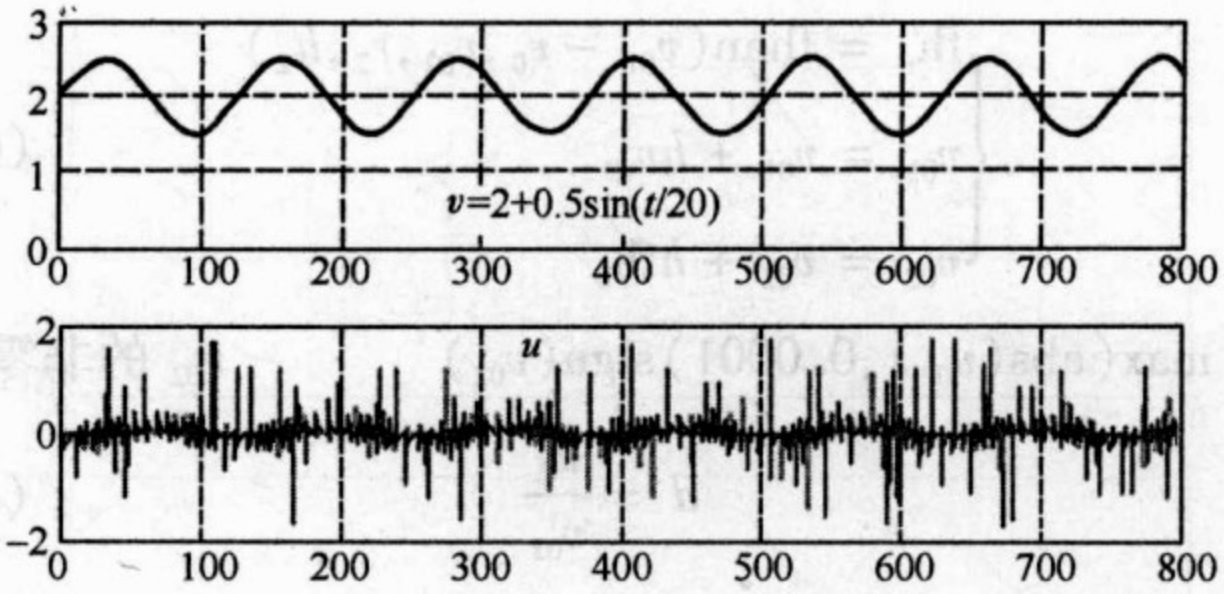


图 6.7.1

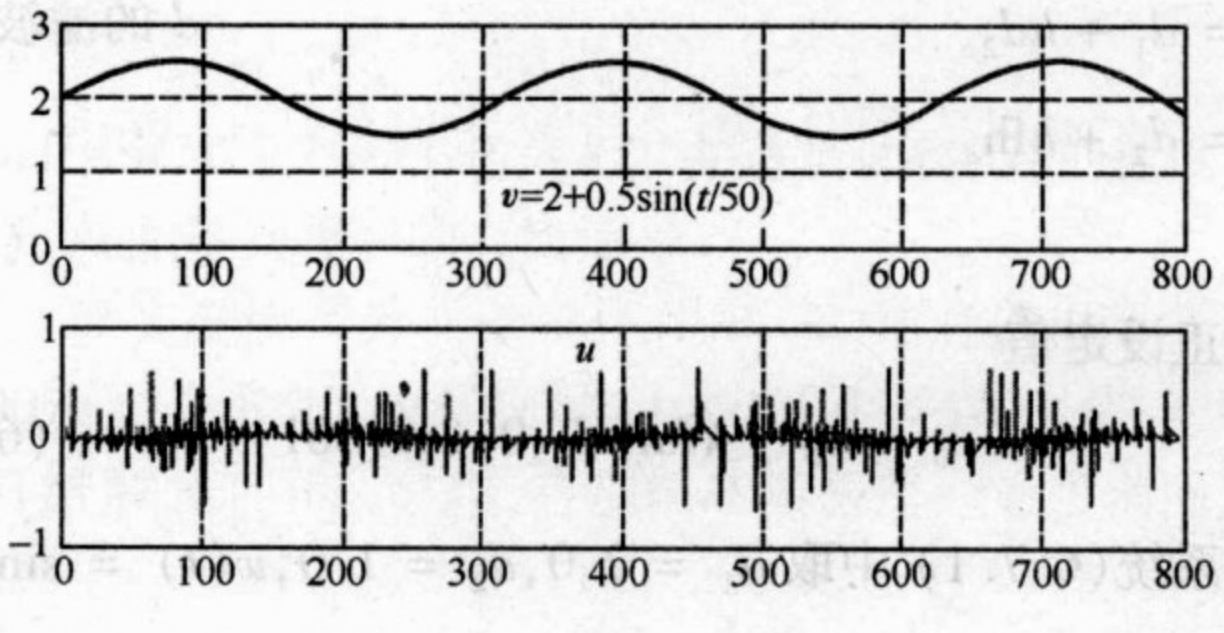


图 6.7.2

修正设定值

$$v_0 = v_0 - \lambda \mathrm{fal}(d_1, 0.1, 0.001)$$

之后再作两次运算

$$\begin{cases} v_0 = \min(v_{\max}, v_0) \\ v_0 = \max(v_{\min}, v_0) \end{cases} \tag{6.7.12}$$

就可以了. 取 $v_{\max} = 2.3, v_{\min} = 1.7$,并控制器参数是上面给定的参数. 对此所作的仿真结果如图 6.7.3 所示.

从图6.7.3 中可以看出,在设定值限制范围,设定值很好地跟踪扰动的变化而这时的控制量几乎等于 0,但是扰动的变化超出设定值限制范围时控制量必须以非零增益来抵消这个超出限制范围的扰动作用.

从上述讨论和仿真结果看,上面给出的“自适应最优控制”算法很有效,说明自抗扰控制技术也能够用来解决一些“自适应最

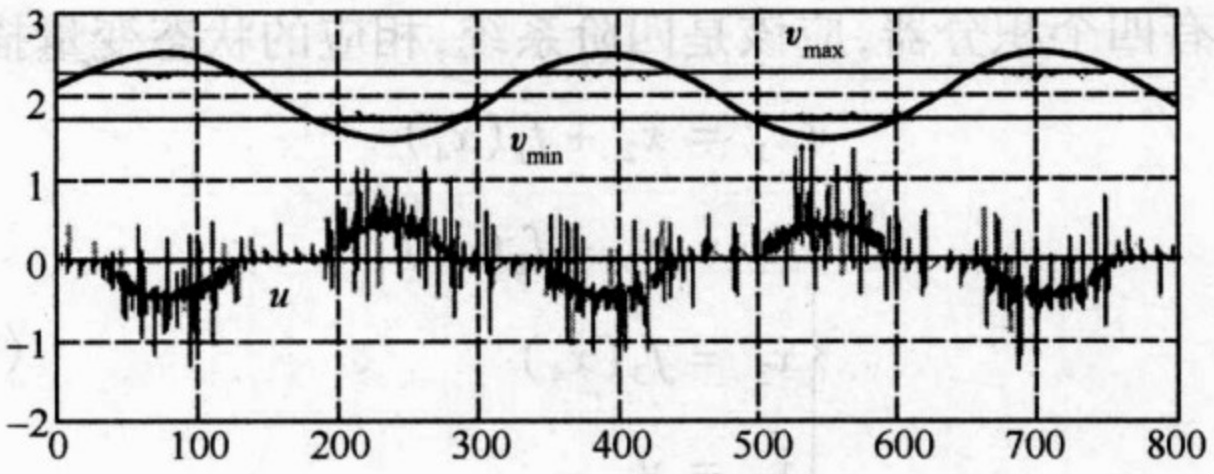


图 6.7.3

优控制”问题.

6.8 运用自抗扰控制技术的要点

要想成功地运用自抗扰控制技术来解决实际控制工程问题,必须要掌握如下几个要点:

(1) 必须要理清在被控对象中哪一个量是要控制的被控输出,控制被控输出量的主要手段 - 控制量又是哪一个量,即首先要搞清被控输出 y 和控制输入 u.

(2) 要分析清楚控制输入 u 的作用至少经过几个“积分器”的作用才能影响被控输出 y?从控制输入 u 到被控输出 y 之间的路径可能很多,但必有“最短”路径,即此路径所含“积分器个数最少”.至于积分器之间信息转化关系是线性还是非线性、时变还是时不变并不重要的,重要的是积分器之间有没有“信息通道”. 这个最少积分器个数就是所谓系统的“相对阶数”.

例如,对如下系统结构图(图 6.8.1).

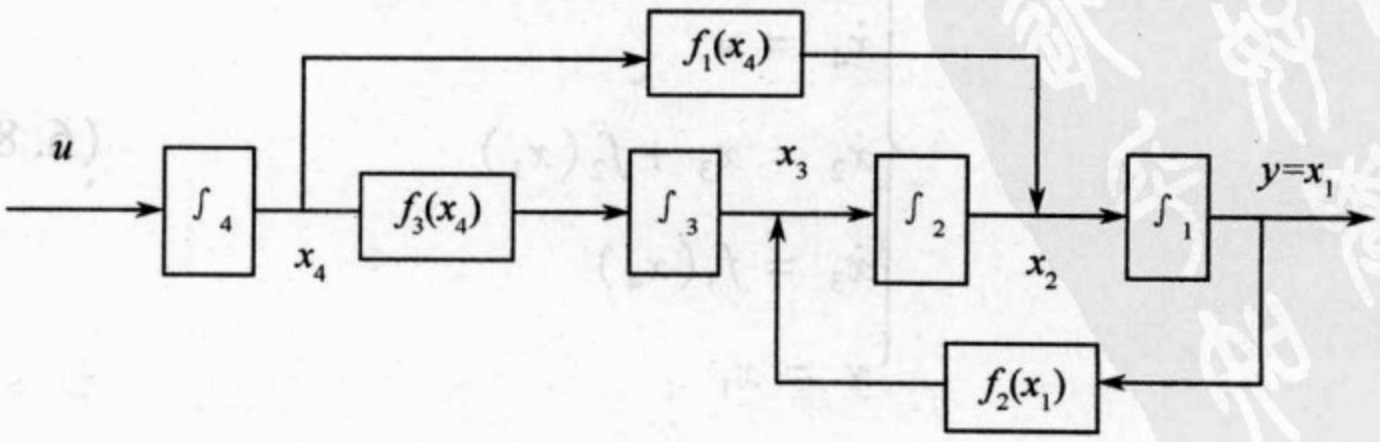


图 6.8.1

含有四个积分器,应该是四阶系统,相应的状态变量描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_4) \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_4) \\ \dot{x}_4 = u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.8.1}$$

在这里,从控制输入 u 到被控输出 y 之间的路径有三条:

第一条为 $u \to \int_4 \to f_1(x_4) \to \int_1 \to y$ 有两个积分器;

第二条为 $u \to \int_4 \to f_3(x_4) \to \int_3 \to \int_2 \to \int_1 \to y$ 有四个积分器;

第三条为 $u \to \int_4 \to f_3(x_4) \to \int_3 \to \int_2 \to \int_1 \to f_1 \to \int_2 \to \int_1 \to y$ 有六个积分器.

在这三条中,第一条为最短路径,只有两个积分器. 因此,尽管它是四阶系统但其相对阶数仅为“2”. 自抗扰控制器关注的就是这种相对阶数. 自抗扰控制器是通过估计补偿系统“总和扰动”的手段把系统转化为“纯积分器串联型”系统,然后对它设计“误差反馈律”. 这个相对阶数决定用于此对象的自抗扰控制器的“阶”.

实际上系统(6.8.1) 可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_4) \\ \dot{x}_4 = u \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_4) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.8.2}$$

令

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + f_1(x_4) \end{cases} \tag{6.8.3}$$

那么

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 + \dfrac{\partial f_1(x_4)}{\partial x_4}\dot{x}_4 = x_3 + f_2(x_1) + \dfrac{\partial f_1(x_4)}{\partial x_4}u \end{cases} \tag{6.8.4}$$

记 $w = x_3 + f_2(x_1), b = \dfrac{\partial f_1(x_4)}{\partial x_4}$,那么式(6.8.4) 变成

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = w + bu \\ y = y_1 \end{cases} \tag{6.8.5}$$

即上述四阶对象就化简成二阶系统来进行自抗扰控制,其中 w 就是要估计并补偿的“总和扰动”量.

例 在式(6.8.1) 中取 $f_1(x_4) = bx_4, f_2(x_1) = x_1^2, f_3(x_4) = \sin(x_4)$,并再加方波扰动,那么式(6.8.1) 变成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + w_0 + bx_4 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 3x_1^2 \\ \dot{x}_3 = \sin(x_4) \\ \dot{x}_4 = u \\ y = x_1 \end{cases} \tag{6.8.6}$$

式中参数 b 是不确定参数,

$$w_0 = 0.5\text{sign}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \tag{6.8.7}$$

对此系统,用标准二阶自抗扰控制器来进行控制的仿真结果如下,在此把未知参数取成 $b = 5$. 然后把它估计成 $b_0 = 2$、5、8 的情形所作的仿真结果如图 6.8.2 ~ 图 6.8.4 所示.

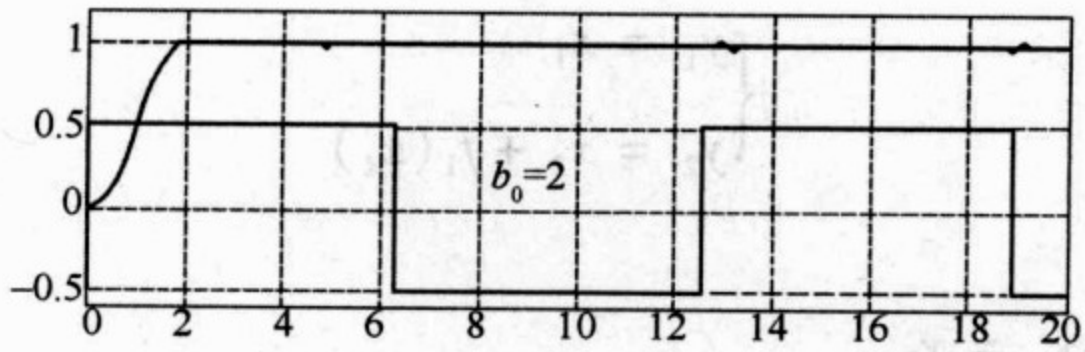


图 6.8.2

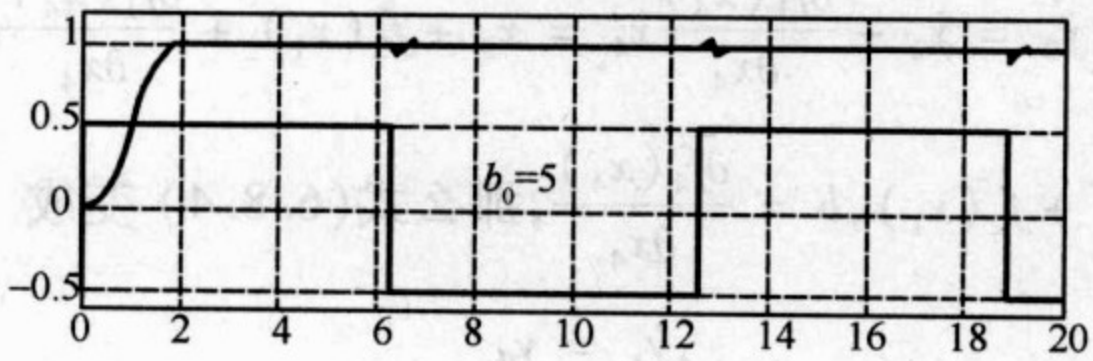


图 6.8.3

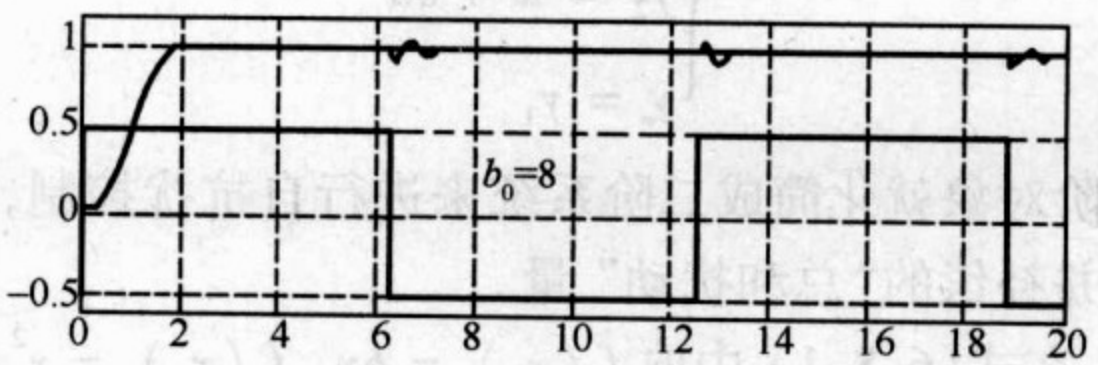


图 6.8.4

这里的控制器参数都是

$$h = 0.01; \beta_{01} = 100, \beta_{02} = 2000,$$

$$\beta_{03} = 14000; r = 100, c = 1, h_1 = 0.06$$

设有传递关系

$$y = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u$$

今令

$$z = \frac{1}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}t^3} = -a_1 \ddot{z} - a_2 \dot{z} - a_3 z + u$$

那么

$$y = b_1\ddot{z} + b_2\dot{z} + b_3 z$$

$$\dot{y} = b_1\frac{\mathrm{d}^3 z}{\mathrm{d}t^3} + b_2\ddot{z} + b_3\dot{z}$$

$$\dot{y} = b_1(-a_1\ddot{z}d^3 z - a_2\dot{z} - a_3 z + u) = W(\cdots) + b_1 u$$

$$\dot{y} = W(\cdots) + b_1 u$$

式中，$W(\cdots) = b_1(-a_1\ddot{z}d^3 z - a_2\dot{z} - a_3 z)$ 当作总和扰动. 因此这个对象当作一阶对象来进行控制是合适的. 这个一阶就是上述传递关系的相对阶，分母分子次数之差.

(3) 如何把作用于被控对象的各种不确定因素和扰动作用归结为能够被估计补偿的总和扰动作用中. 这是把复杂问题进行简化的很关键的一步.

在上述例子中我们把变量 x_2, x_3 的作用同外扰 w_0 的作用都归结为要估计补偿的总和扰动项 w 中，从而使四阶系统控制问题简化成二阶自抗扰控制问题.

(4) 灵活运用虚拟控制量. 这是把复杂问题化为简单问题的很好的手法. 我们在处理多变量解耦控制问题、串级系统控制问题、时滞系统控制问题时都成功的运用这种手法来解决相应问题. 另外，控制量经非线性变换之后作用于对象的情形，如控制量为 u，但直接给予系统的控制作用量是 $U = f(u)$. 这时把 U 作为虚拟控制量来设计控制器，然后用 $u = f^{-1}(U)$ 的办法确定实际所需的控制量 u. 当然这就需要满足可逆性条件 $\dfrac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u} \neq 0$.

参考文献

[1] 宋健,韩京清. 线性最速控制系统的分析与综合理论. 数学进展,1962,5(4):264-284.

[2] 宋健,韩京清. 最速控制系统的分析与综合. 自动化学报,1965,3(3):121-129.

[3] 韩京清. 最优导引律. 航空学报,1979,(1):83-90.

[4] 韩京清. 线性控制系统的结构与反馈系统计算. 全国控制理论及其应用学术交流会议论文集. 北京:科学出版社,1981.

[5] 韩京清. 反馈系统中的线性与非线性. 控制与决策,1987,(2):27-32.

[6] 韩京清. 控制理论－模型论还是控制论. 系统科学与数学,1989,9(4):328-335.

[7] 韩京清. 非线性系统的状态观测器. 控制与决策,1990,5(3):57-60.

[8] 韩京清. 非线性控制系统中状态反馈的实现. 控制与决策,1991,6(3):161-167.

[9] 韩京清. 一类不确定系统的控制与滤波. 系统仿真学报,1992 年,增刊:1-7.

[10] 王伟,韩京清. 估计非线性系统参数的一种方法. 控制与决策,1993,8(3):161-165.

[11] 王伟,韩京清. 非线性系统中时变参数的辨识. “控制理论及其应用”年会论文集. 北京:海洋出版社,1993:300-304.

[12] 韩京清,王伟. 非线性跟踪－微分器. 系统科学与数学,1994,14(2):177-183.

[13] 韩京清. 非线性 PID 控制器. 自动化学报,1994,20(4):487-490.

[14] 韩京清. 一种新型控制器——NLPID. 控制与决策,1994,9(6):401-407.

[15] 韩京清,王学军. 系统的时间尺度和非线性 PID 控制器. 中国控制会议论文集. 北京:中国科学技术出版社,1994:314-321.

[16] 姚翠珍,韩京清. 非线性跟踪-微分器在生育模式预测中的应用. 中国控制会议论文集. 北京:中国科学技术出版社,1994:322-326.

[17] 韩京清. 一类不确定对象的“扩张状态观测器”. 控制与决策,1995,10(1):85-88.

[18] 陈昶,王朝珠,韩京清. 一种估计机动目标运动参数的方法. 宇航学报,1995,16(1):30-34.

[19] 韩京清. 非线性状态误差反馈控制律-NLSEF. 控制与决策,1995,10(3):221-225.

[20] 韩京清. 利用非线性特性改进 PID 控制律. 信息与控制,1995,24(6):356-363.
[21] 韩京清. 控制系统鲁棒性与 Godel 不完备性定理. 95 中国控制会议论文集. 北京:中国科学技术出版社. 1995:248-255.
[22] 袁露林,韩京清. 恒温连续搅拌式生化反应器的控制策略探讨. 95 中国控制会议论文集. 北京:中国科学技术出版社. 1995:491-495.
[23] 姚翠珍,韩京清. 非线性跟踪-微分器在生育模式预测中的应用. 系统工程理论与实践,1996,16(2):57-61.
[24] 黄远灿,韩京清. ADRC 用于空间降噪,97 中国控制会议论文集. 武汉:武汉出版社,1997:1105-1108.
[25] 周力军,韩京清. 不确定系统的一种在线寻优方法,97 中国控制会议论文集. 武汉:武汉出版社,1997:633-636.
[26] 韩京清,王伟,黄一. 二阶不确定系统的一种综合方法-自稳定域法. 系统科学与数学,1997,10(2):673-676.
[27] 洪奕光,张荣,韩京清. Nonlinear Observer Design Method and its Applications, 98 中国控制会议论文集. 北京:国防大学出版社,1998:233-236.
[28] 张文革,韩京清,高志强. 模型配置自抗扰控制器. 98 中国控制会议论文集. 北京:国防大学出版社. 1998:273-276.
[29] 黄远灿,韩京清. 一种新型的非线性滤波器. 98 中国控制会议论文集. 北京:国防大学出版社. 1998:282-284.
[30] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用. 控制与决策,1998,13(1):19-23.
[31] 黄远灿,韩京清. 扩张状态观测器用于连续系统辨识. 控制与决策,1998,13(4):381-384.
[32] 张荣,韩京清. 加快神经网络学习的梯度幂次法. 系统工程理论与实践,1998,18(6):97-101.
[33] 韩京清,袁露林. 跟踪-微分器的离散形式. 系统科学与数学,1999,19(3):278-273.
[34] 韩京清,张文革. 大时滞系统的自抗扰控制. 控制与决策,1999,14(4):354-358.
[35] Huang Yi, Han Jingqing. Disturbace Rejection and Tracking Design via the SSR Aproach for Second Order Uncertain Systems. Sys. Sci. & Math. Scis. ,1999,12(suppl):96-103.
[36] Huang Yi, Han Jingqing. The Self-Stable Region Approach for Second Order Systems. Sys. Sci. & Math. Scis. ,1999,12(3):238-245.
[37] 张献文,韩京清. 柔臂振动的非线性张力反馈控制. 系统工程理论与实践,1999,19(4):83-89.
[38] 韩京清,张荣. 二阶扩张状态观测器的误差分析. 系统科学与数学,1999,19(3):465-471.

[39] 朴军,韩京清. 自抗扰控制器(ADRC)仿真软件. 系统仿真学报,1999,11(5):383-387.

[40] 张文革,韩京清. 跟踪-微分器用于连续系统辨识. 控制与决策,1999,14(增刊):557-560.

[41] 韩京清. 控制系统的鲁棒性与 Gödel 不完备性定理. 控制理论与应用,1999,16(增刊):150-155.

[42] Huang Yi, Han Jingqing. A new synthesis method for uncertain systems-the Self-Stable Region approach, Int. Journal of Systems Science. 1999,30(1):33-38.

[43] Han Jingqing. Nonlinear Design Methods for Control Systems. 14th world Congress of IFAC International Federation of Automatic Control, 1999, Vol. C:521-526.

[44] Huang Yi, Han Jingqing. Self-Stable Region Approach for Second Order Nonliear Uncertain Systems, Proc. 14th IFAC World Congress, 1999, Vol. E:135-139.

[45] Bagus Manhawan, Zheng-Hua Luo, Jing-Qing Han, et al. High-speed High-precision Moton Control of Robots Using Extended state Obseyver. Journal of the Robotios Society of Japen. 2000,18(2):86-93.

[46] 张荣,韩京清. 串联型扩张状态观测器构成的自抗扰控制器. 控制与决策,2000,15(1):122-124.

[47] 张荣,韩京清. 用模型补偿自抗扰控制器进行参数辨识. 控制理论与应用,2000,17(1):79-81.

[48] 张荣,韩京清. 基于神经网络的自抗扰控制器. 系统仿真学报,2000,12(2):149-151.

[49] 张献文,韩京清. 加载柔性臂振动的非线性应力反馈控制. 系统仿真学报,2000,12(2):169-171.

[50] 张文革,韩京清. 一类混沌系统的状态观测与控制. 控制与决策,2000,15(3):301-304.

[51] 韩京清,侯增广. 利用跟踪微分器构造未知函数的寻优器及求根器. 控制与决策,2000,15(3):365-367.

[52] 侯增广,韩京清. 滑模寻优机构非线性改造及其在自寻最优点控制中的应用. 控制与决策,2000,15(4):473-475.

[53] 黄一,韩京清. 非线性连续二阶扩张状态观测器的分析与设计. 科学通报,2000,45(13):1373-1379.

[54] Yi Huang, Jingqing Han. Analysis and design for the second order Nonlinear continuous exteded. state observer. Chinese Science Bulletin, 2000, 45(21):1938-1944.

[55] Yi Huang, Kekang Xu, Jingqing Han. Application of ADRC for Aircraft Attitude Control. Proc. of 3rd Asian Control Con ference, July, 4-7, 2000, Shanghai, 548-552.

[56] Baozhu Guo, Jingqing Han, A Linear Tracking-Differentiator and Applications to the

Online Estimation of the Frequency of a Sinusoidal Signal, Proc. of 2000IEEE Int. Conf. on Control Applicatiaons, Anchorage, Alaska, USA, Sept. 25-27, 2000:9-13.

[57] Zhiqiang Gao, Yi Huang, Jingqing Han, An alternative paradigm for control system design, proc. of the 40th IEEE Conference on Decision and Control December 4-7, Orlando, Florida, 2001, 5:4578-4585.

[58] Yi Huang, Kekang Xu, Jingqing Han, et al. Flight control design using extended state observer and non-smooth feedback, December 4-7, Orlando, Florida. 2001, 1: 223-228.

[59] 张献文,韩京清. 柔臂弯曲和绕转振动的非线性应力反馈控制. 系统仿真学报, 2001,13(3):364-367.

[60] 黄焕袍,万晖,韩京清. 安排过渡过程是提高闭环系统"鲁棒性、适应性和稳定性"的一种有效方法. 控制理论与应用,2001,18(增刊):89-94.

[61] 张文革,韩京清. 跟踪微分器用于零点配置. 自动化学报,27(5),2001:724-727.

[62] 陈忻彦,黄一,韩京清,等. 基于自抗扰控制思想的动力调谐陀螺力平衡回路设计分析,等. 中国控制会议论文集. 杭州:浙江大学出版社. 2002:564-568.

[63] 甘作新,韩京清,等. 二阶 ESO 的 Lyapunov 函数构造. 中国控制会议论文集. 杭州:浙江大学出版社,2002:354-357.

[64] Guo B Z, Han J Q, Xi F B. Linear Tracking-differentiator and application to online estimation of the frequency of a sinusoidal signal with random noise perturbation. International Journal of Systems Science. 2002,33(5):351-358.

[65] 韩京清. 从 PID 技术到"自抗扰控制"技术. 控制工程,2002,9(3):13-18.

[66] 宋金来,韩京清. 平台式惯导系统的快速初始对准方法的研究, 中国惯性技术学报,2002,10(1):25-29.

[67] 宋金来,杨雨,韩京清,等. 捷联式惯导系统静基座快速初始对准方法的研究. 系统仿真学报,2002,14(10):1352-1354.

[68] 宋金来,杨雨,许可康,等. 惯性平台稳定回路的自抗扰控制. 系统仿真学报, 2002,14(3):391-393.

[69] 武利强,韩京清. 基于 TD 滤波器的野值剔除方法. 中国控制会议论文集. 武汉:武汉理工大学出版社. 2003:646-648.

[70] 陈忻彦,黄 一,韩京清,等. 基于自抗扰控制思想的动力调谐陀螺力平衡回路控制的实验研究. 中国控制会议论文集. 武汉:武汉理工大学出版社. 2003:283-286.

[71] 夏元清,黄焕袍,等. 不确定时滞系统 ADRC 控制. 中南大学学报,2003,34(4): 383-385.

[72] 夏元清,韩京清. 线性时滞系统复合状态反馈镇定. 控制与决策,2003,18(2): 257-259.

[73] 夏元清,黄一,等. 大射电望远镜馈源精定位控制. 系统仿真学报,2003,15

(11):1651-1654.
[74] 武利强,韩京清. TD 滤波器及其应用. 计算技术与自动化,2003,22(2):61-63.
[75] 韩京清,金奎焕. 自抗扰控制算法在聚丙烯反应釜过程控制中的应用. 计算技术与自动化,2003,22(2):43-45.
[76] 宋金来,甘作新,等. 自抗扰控制技术滤波特性的研究. 控制与决策,2003,18(1):110-112.
[77] 韩京清,黄远灿. 二阶跟踪微分器的频率特性. 数学的实践与认识, 2003,33(3):71-74.
[78] 夏元清,黄一,许可康,等. 大射电望远镜 FAST 馈源舱位姿控制,控制与决策,2004:19(2):195-198.
[79] 武利强,韩京清. 直线型倒立摆的自抗扰控制设计方案. 控制理论与应用,2004,21(5):654-659.
[80] 黄焕袍,武利强,高峰,等. 火电单元机组协调系统的自抗扰控制方案研究. 中国电机工程学报,2004,24(10):168-173.
[81] 黄焕袍,武利强,高峰,等. 自抗扰控制在火电厂主汽温控制中的应用系统仿真学报,2005,17(1):241-244.
[82] 韩京清. 最速反馈控制的不变性. 系统科学与数学,2005,25(4):498-506.
[83] 韩京清. 自抗扰控制技术. 前沿科学 2007,1(1):24-31.

内 容 简 介

本书全面介绍作者研究发展了的自抗扰控制技术. 自抗扰控制技术是分析经典 PID 技术优缺点的基础上,为了克服 PID 的先天不足,相继提出了安排过渡过程,跟踪微分器,扩张状态观测器,开发利用特殊非线性效应等思想来发展的新的数字控制技术. 介绍了根据这些新技术研发出的不依赖于对象数学模型的新型实用数字控制器结构——非线性 PID 控制器结构与自抗扰控制器结构,并介绍这些新技术在各种典型控制问题上的应用问题.

第一章分析了经典 PID 控制技术的优缺点和事先安排过渡过程的好处;第二章介绍从给定信号合理提取其微分信号的问题;第三章介绍各种非线性反馈形式的功效和效率;第四章介绍如何估计作用于系统的各种总合扰动作用的问题;第五章介绍综合安排过渡过程、合理提取微分信号、总合扰动的估计与补偿及非线性反馈等技术提出的非线性 PID 结构和自抗扰控制器结构,并介绍相应的仿真研究;第六章介绍自抗扰控制技术在几类典型控制问题上的应用范例.

本书的内容将会对控制理论研究者和控制工程实践者会有很好的参考价值和实践指导作用.

A comprehensive introduction for ADRC technique, which is proposed by the author, is presented in this book. On the base of analyzing the advantages and shortcomings of the classical PID technique, the ideas of arranging the transient process, the Tracking-Differentiator, the Extended State Observer and utili-

zing some special nonlinear effects are proposed to overcome the shortcomings of PID. These ideas finally expanded into some novel practical digital control techniques: the nonlinear PID control and ADRC.

The text is organized in 6 chapters. Chapter 1 analyzes the advantages and shortcomings of the classical PID control and the advantages of arranging transient process. Chapter 2 treats the problem of how to get the differential signal from the given signal. Chapter 3 deals with the functions and the effects of some classes of nonlinear feedback. Chapter 4 treats the problem of how to estimate the effects of the total disturbances on the system. In Chapter 5, the nonlinear PID and ADRC, developed by combining the ideas of arranging the transient process, properly extracting the differential signal, estimating and compensating the total disturbance, and utilizing the nonlinear feedback, are introduce. Some simulation research is also proposed. Chapter 6 presents the applications of ADRC in some typical control problems.

The book can be used as a reference book for both control theory researchers and control engineers.